

# Notatki z ćwiczeń z MMF 19/20 <sup>1</sup>

Andrzej Krawiecki, Monika Petelczyc, Grzegorz Siudem

2 czerwca 2020

Notatki z ćwiczeń z Metod Matematycznych Fizyki. Polecanym źródłem teorii jest [1]. Plik na bieżąco aktualizowany. Zgłoszenie każdego błędu będzie bardzo mile widziane.

---

## Spis treści

C1: Równania różnicowe	3
Treść zadań	3
Wskazówki	4
Odpowiedzi	5
Rozwiązania	6
C2: Funkcje zespolone	9
Treść zadań	9
Wskazówki	10
Odpowiedzi	11
Rozwiązania	12
C3: Funkcje Eulera	15
Treść zadań	15
Wskazówki	16
Odpowiedzi	17
Rozwiązania	18
C4: Transformacja Laplace'a	20
Treść zadań	20
Wskazówki	21
Odpowiedzi	22
Rozwiązania	23
C5-C6: Wielomiany ortogonalne	26
Treść zadań	26
Wskazówki	28
Odpowiedzi	30
Rozwiązania	31

<sup>1</sup> Złożono w klasie tufte-handout, [www.ctan.org/pkg/tufte-latex](http://www.ctan.org/pkg/tufte-latex)

Materiał do każdych zajęć przedstawiony jest w tej samej formie:

- ◆ treść zadań,
- ◆ wskazówki rozwiązań,
- ◆ odpowiedzi,
- ◆ rozwiązania.

Zachęcamy do samodzielnego (lub opartego o wskazówki) rozwiązania, a **dopiero po podjęciu jego próby** sprawdzenia odpowiedzi lub rozwiązań.

<i>C7: Funkcje sferyczne</i>	37
<i>Treść zadań</i>	37
<i>Wskazówki</i>	38
<i>Odpowiedzi</i>	42
<i>Rozwiązania</i>	43
<i>C8-C9: Funkcje Bessela</i>	48
<i>Treść zadań</i>	48
<i>Wskazówki</i>	49
<i>Odpowiedzi</i>	50
<i>Rozwiązania</i>	51
<i>C10-C11: Dystrybucje</i>	55
<i>Treść zadań</i>	55
<i>Wskazówki</i>	57
<i>Odpowiedzi</i>	58
<i>Rozwiązania</i>	60
<i>C12-C13: Transformacja Fouriera</i>	71
<i>Treść zadań</i>	71
<i>Wskazówki</i>	72
<i>Wskazówki</i>	75
<i>Wskazówki</i>	76
<i>C14: Szeregi Fouriera</i>	81
<i>Treść zadań</i>	81
<i>Treść zadań</i>	82
<i>Treść zadań</i>	83
<i>Treść zadań</i>	84
<i>Notacje i oznaczenia</i>	87
<i>Wprowadzenie do środowiska Wolfram Mathematica</i>	88
<i>Przybornik mathematiczny</i>	89

---

*C1: Równania różnicowe**C1: Równania różnicowe: treść zadań.*

1. Rozwiązać równania różnicowe pierwszego rzędu:

(a)  $y_{n+1} - y_n = 1, \quad y_1 = 1,$

(b)  $y_{n+1} - ny_n = n!, \quad y_1 = 1,$

2. Rozwiązać równania różnicowe drugiego rzędu:

(a)  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2,$

(b)  $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$

(c)  $y_n^2 - y_{n-1} \cdot y_{n+1} = 0, \quad y_0 = 4, \quad y_1 = 1,$

3. Rozwiązać równanie  $y(n) = y(n/2) + n, \quad y(1) = 3.$ 4. Obliczyć wyznacznik  $D_n$  zdefiniowany jako:

$$D_n = \det \left[ \begin{array}{cccccccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 \end{array} \right]_{n \times n}.$$

## C1: Równania różnicowe: wskazówki

1.

- (a) Proste rozwiązanie iteracyjne.  
 (b) Równanie różnicowe rzędu pierwszego w ogólnej postaci

$$y_{n+1} - a_n y_n = b_n$$

rozwiązuje się, sprowadzając je do postaci znanej z punktu (a), przez podzielenie stronami przez  $\prod_{i=0}^n a_i$  i podstawienie

$$z_0 = y_0, z_n = y_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i, n = 1, 2, 3 \dots$$

W ten sposób otrzymujemy równanie na  $z_n$  w postaci

$$z_{n+1} - z_n = c_n, n = 1, 2, 3 \dots$$

gdzie  $c_n = b_n / \prod_{i=0}^n a_i$ .

W szczególności tutaj należy podzielić równanie przez  $n!$  i podstawić  $z_n = y_n / (n-1)!$

2. Rozwiązania równania różnicowego drugiego rzędu

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

poszukujemy w postaci  $x_n = \lambda^n$ . Jeżeli  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  (rzeczywiste lub zespolone) rozwiązanie równania różnicowego ma postać

$$x_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n,$$

W obu przypadkach stałe  $A, B$  wyznacza się z warunków początkowych. Jak widać, metoda rozwiązywania równań różnicowych z wykorzystaniem równania charakterystycznego podobna jest do metody używanej przy rozwiązywaniu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.

- (a) Patrz ogólna wskazówka powyżej.  
 (b)  $(F_n)$  jest ciągiem Fibonacciego.  
 (c) Zlogarytmować równanie i potem podstawić  $z = \ln(y)$ .

3. Podstawić  $n = 2^k$ , po czym rozwiązać równanie na  $y_k = y(2^k)$ .4. Należy rozwinąć wyznacznik względem pierwszego wiersza lub kolumny i zauważyć, że w ten sposób otrzymuje się równanie różnicowe na  $D_n$  w postaci

$$D_n^2 - 4D_{n-1} + D_{n-2} = 0.$$

Przy rozwiązywaniu równania dla ułatwienia obliczeń wygodnie jest dokonać podstawienia  $2 \cosh \phi = 4 \Rightarrow \operatorname{arcosh} \phi = 2$ .

Proszę rozpisać równanie  $y_{n+1} = 1 + y_n = 1 + (1 + y_{n-1}) + \dots$

Rozwiązanie równania jest prostym szeregiem iteracyjnym  $z_{n+1} = z_n + c_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , stąd  $y_n = z_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ .

Po wstawieniu do równania otrzymujemy równanie charakterystyczne na  $\lambda$  w postaci  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . Jest to równanie drugiego stopnia, którego pierwiastkami są  $\lambda_1, \lambda_2$  (dwa pierwiastki rzeczywiste lub jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny lub para pierwiastków zespolonych, wzajemnie sprzężonych).

Jeżeli  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , rozwiązanie ma postać  $x_n = (A + Bn)\lambda^n$ .

Warunki początkowe wynikają z ogólnej postaci wyznacznika dla  $n = 1$  i  $n = 2$ , tj.  $D_1 = 1, D_2 = 12$ .

Stąd  $\cosh \phi = 2, \sinh \phi = 3$ .

C1: Równania różnicowe: odpowiedzi.

1.

(a)  $y_n = n$

(b)  $y_n = n!$

2.

(a)  $x_n = 2^n$

(b)  $F_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} [(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n]$

(c)  $y_n = 4^{1-n}$

3.  $y(n) = 2n + 1$

4.  $D_n = \frac{\sinh[(n+1)\phi]}{\sinh \phi}$ , gdzie  $\sinh \phi = \sqrt{3}$

## C1: Równania różnicowe: rozwiązania.

1.

(a)  $y_{n+1} = y_n + 1 \Rightarrow y_2 = y_1 + 1, y_3 = y_2 + 1 = y_1 + 2, \dots$   
 $y_n = y_1 + (n-1)$ . Z warunku początkowego  $y_1 = 1 \Rightarrow y_n = n$ .

(b)  $a_n = n \Rightarrow \prod_{i=0}^n a_i = n!$ . Podstawiając  $z_n = y_n / (n-1)!$  otrzymujemy

$$z_{n+1} - z_n = 1, z_1 = y_1 = 1,$$

więc zgodnie z (a) mamy  $z_n = n, y_n = n(n-1)! = n!$ .

2.

(a) Postać ogólna rozwiązania

$$x_n = 3^n A + 2^n B,$$

z warunków początkowych  $x_0 = 1 = A + B, x_1 = 2 = 3A + 2B$   
 $\Rightarrow A = 0, B = 1 \Rightarrow x_n = 2^n$ .

(b) Postać ogólna rozwiązania

$$F_n = A \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

z warunków początkowych

$$\begin{cases} F_0 = 0 = A + B, \\ F_1 = 1 = A \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + B \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/\sqrt{5}, \\ B = 1/\sqrt{5}, \end{cases}$$

co prowadzi do  $F_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} [(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n]$ .

(c) Logarytmując równanie obustronnie otrzymujemy

$$\ln y_{n+1} - 2 \ln y_n + \ln y_{n-1} = 0.$$

Podstawiając dalej  $z_n = \ln y_n$  otrzymujemy równanie na  $z_n$  w postaci

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} = 0, z_0 = \ln y_0 = \ln 4, z_1 = \ln y_1 = \ln 1 = 0$$

Postać ogólna rozwiązania  $z_n = (A + Bn)1^n = A + Bn$ ,  
a końcowe rozwiązanie  $y_n = 4^{1-n}$ .

3. Niech  $y_k \equiv y(2^k) \Rightarrow y_k - y_{k-1} = 2^k, y_0 = 3$ . Ogólne wyrażenie iteracyjne ma więc postać  $y_k = y_{k-1} + 2^k, k = 1, 2, 3, \dots$  Stąd  
 $y_1 = y_0 + 2^1 = y_0 + 2, y_2 = y_1 + 2^2 = y_0 + 2^1 + 2^2, \dots, y_k = y_0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k$ . Sumując ciąg geometryczny, otrzymujemy

$$y_k = y_0 + 2 \frac{1 - 2^k}{1 - 2} = y_0 + 2(2^k - 1) = 3 + 2(2^k - 1) = 2^{k+1} + 1$$

$$\Rightarrow y_k = y(2^k) = 2 \cdot 2^k + 1 \Rightarrow y(n) = 2n + 1.$$

Równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

co prowadzi do  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ .

Równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

co prowadzi do  $\lambda_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ ,  
 $\lambda_2 = (1 + \sqrt{5})/2$ .

Równanie charakterystyczne  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$  ma pierwiastek podwójny  $\lambda = 1$ .

A z warunków początkowych  $z_0 = \ln 4 = A, z_1 = 0 = A + B \Rightarrow A = \ln 4, B = -\ln 4 \Rightarrow z_n = (1 - n) \ln 4 = \ln 4^{1-n} = \ln y_n$ .

$n = 2^k \Rightarrow y(2^k) = y(2^{k-1}) + 2^k$ ,  
 $y(1) = y(2^0) = 3$ .

4. Rozważmy ogólniejszy wyznacznik z  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$D_n = \det \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{n \times n} \end{bmatrix}.$$

Rozwijając powyższy wyznacznik względem pierwszego wiersza, otrzymujemy

$$D_n = x \det \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix} + (-1)^3 \det \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix}.$$

Pierwszy wyznacznik w powyższym równaniu wynosi  $D_{n-1}$

Rozwijamy drugi wyznacznik względem pierwszej kolumny

$$\det \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} \end{bmatrix} = D_{n-2}.$$

Stąd otrzymujemy równanie różnicowe na  $D_n$ ,

$$D_n - xD_{n-1} + D_{n-2} = 0.$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci  $D_n = \lambda^n$ , skąd otrzymujemy równanie charakterystyczne,

$$\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0, \quad \Delta = x^2 - 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Rightarrow D_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

Warunki początkowe są znane z ogólnej postaci wyznaczników  $D_n$ , mianowicie

$$D_1 = x, D_2 = \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 1.$$

- (1) Rozpatrzmy przypadek  $\Delta > 0$  ( $x = 4 \Rightarrow \Delta = 12 > 0$ ) oraz  $x > 2$ . W celu uproszczenia obliczeń dokonajmy podstawienia  $x = 2 \cosh \phi \Rightarrow \phi = \operatorname{arcosh}(x/2)$ ,  $\phi > 0$ .

$$\lambda_1 = \frac{2 \cosh \phi - \sqrt{4 \cosh^2 \phi - 4}}{2} = \cosh \phi - \sqrt{\cosh^2 \phi - 1} = \cosh \phi - \sinh \phi = e^{-\phi}$$

$$\lambda_2 = e^{\phi}$$

$$D_1 = 2 \cosh \phi = e^{\phi} + e^{-\phi} = Ae^{-\phi} + Be^{\phi}$$

$$D_2 = 4 \cosh^2 \phi - 1 = e^{2\phi} + e^{-2\phi} + 1 = Ae^{-2\phi} + Be^{2\phi}$$

$$\text{Stąd } A = e^{-2\phi} / (e^{-2\phi} - 1), B = e^{2\phi} / (e^{2\phi} - 1),$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{e^{-2\phi}}{e^{-2\phi} - 1} e^{-n\phi} + \frac{e^{2\phi}}{e^{2\phi} - 1} e^{n\phi} = -\frac{e^{-(n+2)\phi}}{e^{-\phi}(e^{\phi} - e^{-\phi})} + \frac{e^{(n+2)\phi}}{e^{\phi}(e^{\phi} - e^{-\phi})} \\ &= \frac{e^{(n+1)\phi} - e^{-(n+1)\phi}}{e^{\phi} - e^{-\phi}} = \frac{\sinh[(n+1)\phi]}{\sinh \phi} \end{aligned}$$

$$\text{Przy czym } x = 2 \cosh \phi = 4 \Rightarrow \cosh \phi = 2 \Rightarrow \sinh \phi = \sqrt{\cosh^2 \phi - 1} = \sqrt{3}.$$

- (2) Jeżeli  $\Delta > 0$ ,  $x < -2$ , można dokonać podstawienia  $x = -2 \cosh \phi$ ,  $\phi > 0$ . Powtarzając rozumowanie z punktu (1), otrzymujemy

$$D_n = (-1)^n \frac{\sinh[(n+1)\phi]}{\sinh \phi}.$$

- (3) Jeżeli  $\Delta < 0$ , tj.  $-2 < x < 2$ , można dokonać podstawienia  $x = 2 \cos \phi$ ,  $\phi \in (0, \pi)$  (por. rozdział D.2 w skrypcie). Powtarzając rozumowanie z punktu (1), otrzymujemy

$$D_n = \frac{\sin[(n+1)\phi]}{\sin \phi}.$$

- (4) Jeżeli  $\Delta = 0$ ,  $x = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda = 1$ . Rozwiązanie ogólne ma postać  $D_n = (A + Bn)\lambda^n = A + Bn$ . Z warunków początkowych  $D_1 = x = 2 = A + B$ ,  $D_2 = x^2 - 1 = 3 = A + 2B$ , stąd  $A = B = 1$ ,  $D_n = n + 1$ .
- (5) Jeżeli  $\Delta = 0$ ,  $x = -2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda = -1$ . Rozwiązanie ogólne ma postać  $D_n = (A + Bn)\lambda^n = (-1)^n(A + Bn)$ . Z warunków początkowych  $D_1 = x = -2 = -A - B$ ,  $D_2 = x^2 - 1 = 3 = A + 2B$ , stąd  $A = B = 1$ ,  $D_n = (-1)^n(n + 1)$ .



## C2: Funkcje zespolone

## C2: Funkcje zespolone: treść zadań

1. Znaleźć graficznie liczby dla  $z^3$ ,  $\sqrt[3]{z}$ ,  $\ln z$  dla

(a)  $z = (-4, 0) = -4,$

(b)  $z = (1, \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}i,$

2. Rozwiązać równania na  $x$ :

Przyjmijmy, że  $x \in \mathbb{R}$ .

(a)  $e^{ix} = 1,$

(b)  $e^{ix} = -1,$

(c)  $e^{ix} = i,$

3. Wyrazić przez „zwykłe“ funkcje trygonometryczne/hyperboliczne następujące wyrażenia:

(a)  $\sin(ix),$

(b)  $\cos(ix),$

(c)  $\operatorname{tg}(ix),$

(d)  $\sinh(ix),$

(e)  $\cosh(ix),$

(f)  $\operatorname{tgh}(ix),$

4. Oszacować wartość wyrażenia  $W = |\sin(i + \pi/4)|$ .

5. Znaleźć obraz odcinka  $L$  przy odwzorowaniu  $F(z)$ , jeśli:

(a)  $F(z) = e^z$ ,  $L$  – odcinek  $AB$ ,  $A = (1, 0)$ ,  $B = (1, \pi)$ ,

(b)  $F(z) = e^z$ ,  $L$  – prosta o równaniu  $y = \pi/2$ ,

(c)  $F(z) = e^{iz}$ ,  $L$  – odcinek  $AB$ ,  $A = (\pi, 0)$ ,  $B = (\pi, 1)$ ,

(d)  $F(z) = iz$ ,  $L$  – oś  $OY$ ,

6. Stosując metodę funkcji zespolonych rozwiązać równanie:

$$x''' + 2\gamma x' + \beta x = F \cos(\omega t),$$

7. Obliczyć całki:

(a)  $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \varphi} d\varphi,$

(b)  $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 4} dx,$

(c)  $I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i)^2} dx,$

## C2: Funkcje zespolone: wskazówki

1. Zapisz liczby zespolone w postaci wykładniczej (por. str. 87)

(a)  $-4 + 0i = 4e^{i\pi}$

(b)  $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$

2. Skorzystaj ze wzoru Eulera  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ .

3. Najpierw udowodnij, że dla  $z \in \mathbb{C}$  zachodzą relacje

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

a następnie dodawaj lub odejmuj je stronami.

4. Skorzystaj ze wzoru na  $\sin(z)$  ze wskazówki do Zadania 3.

5. Zapisz liczby  $z \in L$  parametrycznie:

(a)  $z = 1 + i\beta, \beta \in [0, \pi]$ .

(b)  $z = \alpha + i\pi/2, \alpha \in \mathbb{R}$ .

(c)  $z = \pi + i\beta, \beta \in [0, 1]$ .

(d)  $z = i\beta, \beta \in \mathbb{R}$ .

6. Dopisz równanie na  $y$  postaci

$$y''' + 2\gamma y' + \beta y = F \sin(\omega t),$$

7. Wyraż wyjściowe całki przez całki zespolone po odpowiednich konturach, a następnie skorzystaj ze wzoru Cauchy'ego.

(a) Dokonaj podstawienia  $z = e^{i\phi}, \phi \in [0, 2\pi)$ . Stąd

$$dz = ie^{i\phi} d\phi = iz d\phi,$$

więc  $d\phi = \frac{1}{iz} dz$ . Ze wzoru Eulera  $\sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$

(b) Dopisz drugą całkę  $I_2' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+4} dx$  i oblicz  $I_2 + iI_2'$ , korzystając z lematu Jordana.

(c) Kontur to *nieskończony* prostokąt o dłuższych bokach danych osiami  $OX$  oraz  $i + \mathbb{R}$ .

Przypominamy, że

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i \arctan(y/x)}.$$

Sugerujemy rozwinąć w szereg lewą i prawą stronę każdego równania.

Pamiętając, że

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{i} \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Przyjmij, że  $z(t) = x(t) + iy(t)$ .

Jak widać,  $z$  leżą na okręgu  $O((0,0), 1)$ , który jest w związku z tym konturem całkowania,  $\Gamma = O((0,0), 1)$

Należy znaleźć wartość całki po konturze skończonego prostokąta i, przechodząc do granicy, pokazać, że całki na krótszych bokach zbiegają do zera, a całka po  $\mathbb{R}$  powinna być Państwu znana.

## C2: Funkcje zespolone: odpowiedzi

1.

$$(a) z^3 = -64, \sqrt[3]{z} \in \{-2^{2/3}, (1+i\sqrt{3})2^{-1/3}, (1-i\sqrt{3})2^{-1/3}\}, \\ \ln z \in \{2\ln(2) + i\pi(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(b) z^3 = -8, \sqrt[3]{z} \in \{2^{1/3}e^{i\pi/9}, 2^{1/3}e^{7i\pi/9}, 2^{1/3}e^{13i\pi/9}\}, \ln z \in \{\ln(2) + i\pi(2k + \frac{1}{3}) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.

$$(a) x = 2k\pi, \text{ dla } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(b) x = (2k+1)\pi, \text{ dla } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(c) x = (2k + 1/2)\pi, \text{ dla } k \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$(a) \sin(ix) = i \sinh(x),$$

$$(b) \cos(ix) = \cosh(x),$$

$$(c) \operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{tgh}(x),$$

$$(d) \sinh(ix) = i \sin(x),$$

$$(e) \cosh(ix) = \cos(x),$$

$$(f) \operatorname{tgh}(ix) = i \operatorname{tg}(x).$$

$$4. W = \frac{\sqrt{1+e^4}}{2e}.$$

5.(a) Półokrąg o środku  $(0,0)$  i promieniu  $e$  w górnej półpłaszczyźnie,  $F(z) = \{(x,y) : x^2 + y^2 = e^2, y \geq 0\}$

$$(b) \text{Dodatnia półoś zespolona, } F(z) = \{(x,y) : x = 0, y \in (0, \infty)\}$$

$$(c) \text{Odcinek } (-1, -e^{-1}), F(z) = \{(x,y) : x \in (-1, -e^{-1}), y = 0\}$$

$$(d) \text{Oś rzeczywista, } F(z) = \{(x,y) : x \in (-\infty, \infty), y = 0\}$$

$$6. x(t) = F \frac{\beta \cos(\omega t) + (2\gamma\omega - \omega^3) \sin(\omega t)}{\beta^2 + (2\gamma\omega - \omega^3)^2}$$

7.

$$(a) I_1 = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

$$(b) I_2 = \frac{\pi e^{-2}}{2}.$$

$$(c) I_3 = \sqrt{\pi}$$

## C2: Funkcje zespolone: rozwiązania

1. Dla liczby postaci  $z = re^{i\varphi}$  mamy:

$$\begin{aligned} z^3 &= r^3 e^{3i\varphi}, \\ \sqrt[3]{z} &\in \{ \sqrt[3]{r} e^{i\varphi/3}, \sqrt[3]{r} e^{i\varphi/3+2i\pi/3}, \sqrt[3]{r} e^{i\varphi/3+4i\pi/3} \}, \\ \ln(z) &\in \{ \ln(r) + i\varphi + 2i\pi k : k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

2. Korzystamy ze wzoru Eulera:

$$(a) \cos(x) + i \sin(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = 1 \wedge \sin(x) = 0 \Rightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(b) \cos(x) + i \sin(x) = -1 \Rightarrow \cos(x) = -1 \wedge \sin(x) = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(c) \cos(x) + i \sin(x) = i \Rightarrow \cos(x) = 0 \wedge \sin(x) = 1 \Rightarrow x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. Rozważmy funkcje trygonometryczne:

Dla funkcji hiperbolicznych rachunki są analogiczne.

$$\sin(iz) = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = \frac{-1}{i} \sinh(z) = i \sinh(z),$$

$$\cos(iz) = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh(z),$$

$$\operatorname{tg}(iz) = \frac{\sin(iz)}{\cos(iz)} = \frac{i \sinh(z)}{\cosh(z)} = i \operatorname{tgh}(z)$$

4. Rozpisujemy funkcję  $\sin$  zgodnie ze wskazówką

Zauważamy, że

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} W &= \left| \frac{e^{-1+i\pi/4} - e^{1-i\pi/4}}{2i} \right| = \\ &= \left| \frac{[\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)] e^{-1} - [\cos(\pi/4) - i \sin(\pi/4)] e^1}{2i} \right| = \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{4i} (e^{-1} + ie^{-1} - e + ie) \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} |-ie^{-1} + e^{-1} + ie + e| = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} |\cosh(1) + i \sinh(1)| = \frac{\sqrt{2}}{2} |\cosh(1) + i \sinh(1)| = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\cosh^2(1) + \sinh^2(1)} = \frac{\sqrt{1+e^4}}{2e} \end{aligned}$$

5.

$$(a) F(z) = F(1+i\beta) = e^z = e^{1+i\beta} = e e^{i\beta}, \quad \beta \in [0, \pi].$$

$$(b) F(z) = F(\alpha + i\pi/2) = e^z = e^{\alpha+i\pi/2} = e^\alpha e^{i\pi/2} = i e^\alpha, \quad \alpha \in (-\infty, \infty).$$

$$(c) F(z) = F(\pi + i\beta) = e^{iz} = e^{i\pi-\beta} = e^{i\pi} e^{-\beta} = -e^{-\beta}, \quad \beta \in (0, 1).$$

$$(d) F(z) = F(i\beta) = i\bar{z} = i\bar{i\beta} = i(-i\beta) = \beta, \quad \beta \in (-\infty, \infty).$$

6. TBA

7.

(a) Dokonujemy podstawienia jak we wskazówce  $z = e^{i\phi}$ 

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2 + \sin \phi} = \oint_{\Gamma} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)} = 2 \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

Znajdujemy bieguny funkcji podcałkowej:

$$z_1 = -(2 + \sqrt{3})i, \quad z_2 = -(2 - \sqrt{3})i,$$

Dalej liczymy residuum w punkcie  $z_2$  (por. komentarz)

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_2} \left( \frac{1}{z^2 + 4iz - 1} \right) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{z + (2 - \sqrt{3})i}{[z + (2 + \sqrt{3})i][z + (2 - \sqrt{3})i]} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{1}{z + (2 + \sqrt{3})i} = \frac{1}{2\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

Stąd natychmiast otrzymujemy wartość całki

$$I_1 = 2 \cdot 2\pi i \operatorname{res}_{z_2} \left( \frac{1}{z^2 + 4iz - 1} \right) = 2 \cdot 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{3}i} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

(b)

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Re e \left( \frac{e^{ix}}{x^2 + 4} \right) dx = \Re e \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4} dx \right).$$

Obliczamy więc całkę zespoloną

$$J_R = \oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

Szacujemy wartość funkcji podcałkowej na półokręgu  $C_R$ :

$$\begin{aligned} |F(z)|_{C_R} &= \left| \frac{1}{z^2 + 4} \right|_{z=Re^{i\phi}} = \frac{1}{|R^2 e^{2i\phi} + 4|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(R^2 e^{2i\phi} + 4)(R^2 e^{-2i\phi} + 4)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^4 + 4R^2(e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}) + 16}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^4 + 8R^2 \cos \phi + 16}} \leq \frac{1}{\sqrt{R^4 - 8R^2 + 16}} = \\ &= \frac{1}{R^2 - 4} < \frac{2}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Z lematu Jordana

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

A konturem całkowania jest okrąg jednostkowy  $O((0,0), 1)$ . $|z_1| > 1$ , więc biegun  $z_1$  leży na zewnątrz konturu całkowania  $\Gamma$ ,  $|z_2| < 1$ , więc tylko biegun  $z_2$  leży wewnątrz konturu całkowania  $\Gamma$ . $z_2$  jest pojedynczym biegunem pierwszego rzędu wewnątrz konturu całkowania, więc ze wzoru Cauchy'ego otrzymujemy:

Na szczęście całkowanie jest liniowe, więc możemy je wykonywać przemienianie z braniem części rzeczywistej!

Rozpatrzmy funkcję  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} \equiv F(z)e^{iz}$ ,  $F(z) \equiv \frac{1}{z^2 + 4}$ .Kontur całkowania  $C$  jest krzywą zamkniętą złożoną z odcinka  $(-R, R)$  na osi rzeczywistej i domykającego półokręgu  $C_R = \{z : z = Re^{i\phi}, \phi \in (0, \pi)\}$  w górnej półpłaszczyźnie. $F(z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$  jednostajnie na  $C_R$ , czyli dla  $\phi \in (0, \pi)$ , można więc skorzystać z lematu Jordana

stąd

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4} dx$$

Bieguny  $f(z)$ :  $z_1 = -2i$ ,  $z_2 = 2i$ , więc dla dostatecznie dużego  $R$

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{res}_{z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2=2i} \frac{(z-2i)e^{iz}}{(z-2i)(z+2i)} = \\ &= 2\pi i \frac{e^{i(2i)}}{4i} = \frac{\pi}{2e^2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$I_2 = \Re \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4} dx \right) = \Re \left( \oint_C f(z) dz \right) = \frac{\pi}{2e^2}.$$

- (c) Rozważmy prostokąt  $\Gamma_R$  wyznaczony przez punkty  $\{-R, -R + i, R + i, R\}$ . Całkując po nim wyjściową funkcję otrzymujemy

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz &= \underbrace{\int_{-R}^R e^{-(z+i)^2} dz}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} I_3} + \int_1^0 e^{-(R+iu)^2} du + \\ &+ \int_R^{-R} e^{-z^2} dz + \int_0^1 e^{-(-R+iu)^2} du = 0 \end{aligned}$$

Rozważmy normę funkcji podcałkowej dla pionowych boków  $\Gamma_R$

$$\begin{aligned} \left| e^{-(\pm R+iu)^2} \right| &= \left| e^{-R^2 \mp 2iuR + u^2} \right| = \left| e^{u^2 - R^2} [\cos(2uR) \mp i \sin(2uR)] \right| = \\ &= e^{u^2 - R^2} \underbrace{\sqrt{\sin^2(2uR) + \cos^2(2uR)}}_{=1} \leq e^{1-R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

A zatem przechodząc do granicy z  $R \rightarrow \infty$  otrzymujemy

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Bieguny są rzędu pierwszego, tylko biegun  $z_2$  leży wewnątrz konturu  $C$ .

Zwróćmy uwagę, że funkcja podcałkowa jest analityczna, a zatem całka ta dla każdego  $R > 0$  równa jest zeru.

Pokażemy teraz, że dla dostatecznie dużych  $R$  całki postaci  $\int_0^1 e^{-(\pm R+iu)^2} du$  zbiegają do zera.

## C3: Funkcje Eulera

C3: Funkcje Eulera: treść zadań.

1. Wyrazić przez funkcje Eulera, a następnie uprościć, całki:

- (a)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx,$
- (b)  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx,$
- (c)  $\int_0^1 [-\ln(t)]^{3/2} dt,$
- (d)  $\int_0^{\pi/2} [\operatorname{tg}(t)]^{1/3} dt,$
- (e)  $\int_0^1 [1 - \sqrt{t}]^{1/3} dt,$
- (f)  $\int_{-1}^1 (1-t)^{1/3} (1+t)^{1/2} dt,$

Jak nazwalibyśmy tę całkę na  
Probabilistyce?

2. Wyprowadzić zwarty wzór na „silnię“  $\Gamma(1/2 - n)$ .
3. Wyznaczyć  $x \in [0, N]$ , dla którego  $\ln \binom{N}{x}$  osiąga maksimum.

## C3: Funkcje Eulera: wskazówki.

1.

- (a) Określ parzystość funkcji podcałkowej i rozważ najpierw podpunkt (b).
- (b) Podstaw  $v = x^2$  i szukaj funkcji gamma.
- (c) Podstaw  $v = -\ln(t)$  i szukaj funkcji gamma.
- (d) Podstaw  $v = \operatorname{tg}(t)$ ,  $w = v^2 + 1$ ,  $z = w^{-1}$  i szukaj funkcji beta.
- (e) Podstaw  $v = \sqrt{t}$  i szukaj funkcji beta.
- (f) Podstaw  $v = \frac{1+t}{2}$  i szukaj funkcji beta.

2. Skorzystaj z relacji  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .

W przeciwną, niż zazwyczaj, stronę.

3. Wykorzystaj wzór Stirlinga.

Najlepiej użyć wersji

$$\ln(n!) = n \ln(n) - n + \mathcal{O}[\ln(n)].$$



## C3: Funkcje Eulera: odpowiedzi.

1.

(a)  $\frac{(-1)^n + 1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$

(b)  $\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$

(c)  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$

(d)  $\frac{1}{2} \beta\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$

(e)  $2\beta\left(2, \frac{4}{3}\right) = \frac{9}{14}.$

(f)  $2^{11/6} \beta\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) = \frac{2^{5/6} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}.$

2.  $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{\sqrt{\pi}(-2)^n}{(2n-1)!}.$

3.  $x = \frac{N}{2}.$

## C3: Funkcje Eulera: rozwiązania.

1.

- (a) Zwróćmy najpierw uwagę, że parzystość funkcji jest taka sama jak parzystość liczby  $n$ . A zatem dla  $n$  nieparzystych całka po całej osi  $\mathbb{R}$  daje wynik 0, natomiast dla parzystych  $n$  mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx.$$

Zwracamy uwagę, że słowo *parzystość* pojawia się w tym zdaniu dwa razy w zupełnie różnych znaczeniach!

Co sprowadza punkt (a) do punktu (b).

- (b) Stosujemy podstawienie  $v = x^2$ , w którym  $dv = 2x dx$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} v^{n/2} e^{-v} \frac{1}{2\sqrt{v}} dv = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} v^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-v} dv = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}.$$

- (c) Stosujemy podstawienie  $v = -\ln(t)$ , w którym  $dv = -dt/t$

$$\int_0^1 [-\ln(t)]^{3/2} dt = \int_{\infty}^0 v^{3/2} (-e^{-v}) dv = \int_0^{\infty} v^{5/2-1} e^{-v} dv = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

Zauważmy, że stosując analogiczne podstawienie łatwo można obliczyć ogólniejszą całkę  $\int_0^1 [-\ln(t)]^p dt = \Gamma(p+1)$ ,  $p \in \mathbb{R}$

Aby obliczyć dokładną wartość końcowej funkcji gamma skorzystajmy z relacji rekurencyjnej oraz faktu, że  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

- (d) Stosujemy podstawienie  $v = \operatorname{tg}(t)$ , w którym  $dv = dt / \cos^2(t)$

Zauważamy, że  $v^2 + 1 = \cos^{-2}(t)$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\operatorname{tg}(t)]^{1/3} dt = \int_0^{\infty} v^{1/3} (v^2 + 1)^{-1} dv = (\spadesuit),$$

gdzie podstawiamy  $w = v^2 + 1$ , co skutkuje  $dw = 2v dv$

$$(\spadesuit) = \int_1^{\infty} (w-1)^{1/6} w^{-1} \frac{1}{2\sqrt{w-1}} dw = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} (w-1)^{-1/3} w^{-1} dw = (\clubsuit),$$

gdzie podstawiamy  $z = w^{-1}$  i  $dz = -dw/w^2$

$$(\clubsuit) = \frac{1}{2} \int_1^0 \left(\frac{1-z}{z}\right)^{-1/3} z(-z^{-2}) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^{-1/3} z^{-2/3} dz = \frac{\beta\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}{2} = (\diamondsuit),$$

co upraszczamy korzystając z

$$(\diamondsuit) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Uwaga: Znacznie łatwiejszy sposób rozwiązania zadania polega na rozpisaniu całki tak, aby można było bezpośrednio skorzystać z definicji funkcji beta Eulera za pomocą funkcji trygonometrycznych. Ogólnie:

$$\beta(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \phi)^{2x-1} (\sin \phi)^{2y-1} d\phi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} [\operatorname{tg}(t)]^r dt &= \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{(r+1)-1} (\cos t)^{(-r+1)-1} dt \\ &= \beta\left(\frac{-r+1}{2}, \frac{r+1}{2}\right) \end{aligned}$$

(e) Stosujemy podstawienie  $v = \sqrt{t}$ , w którym  $dv = dt/(2\sqrt{t})$

$$\int_0^1 (1 - \sqrt{t})^{1/3} dt = \int_0^1 (1 - v)^{1/3} (2v) dv = 2 \int_0^1 v(1 - v)^{1/3} dv = 2\beta\left(2, \frac{4}{3}\right)$$

Uwaga: jest to szczególny przypadek całki ( $p, q, m > 0$ )

$$\int_0^1 t^{p-1} (1 - t^m)^{q-1} dt = \frac{1}{m} \beta\left(\frac{p}{m}, q\right),$$

którą można obliczyć jak wyżej, stosując ogólniejsze podstawienie  $v = t^m$ .

(f) Stosujemy podstawienie  $v = (1 + t)/2$ , w którym  $dv = dt/2$

Zauważmy, że  $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - t)^{1/3} (1 + t)^{1/2} dt &= \int_0^1 (2 - 2v)^{1/3} (2v)^{1/2} 2dv = \\ &= 2^{11/6} \int_0^1 (1 - v)^{1/3} v^{1/2} dv = 2^{11/6} \beta\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Uwaga: jest to szczególny przypadek całki ( $p, q > -1$ )

$$\int_{-1}^1 1(1 - t)^p (1 + t)^q dt = 2^{p+q+1} \beta(p + 1, q + 1),$$

którą można obliczyć, stosując podstawienie jak wyżej.

2. Opierając się na rekurencyjnej własności funkcji gamma rozwijamy

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - n} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - n + 1\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} - n + 1} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - n + 2\right) = \dots = (\spadesuit),$$

gdzie rozpisujemy aż do uzyskania dodatnich argumentów

$$(\spadesuit) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - n\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - n + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\sqrt{\pi}} = \frac{(-2)^n \sqrt{\pi}}{(2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot \dots \cdot 1} = (\clubsuit),$$

gdzie zauważyliśmy, że czynnik  $-2$  możemy wyciągnąć z każdego czynnika iloczynu w mianowniku. Finalnie, posługując się notacją podwójnej silni otrzymujemy

$$(\clubsuit) = \frac{(-2)^n \sqrt{\pi}}{(2n - 1)!!}.$$

3. Wychodząc z przybliżenia Stirlinga mamy

$$\ln\binom{N}{x} \approx \underbrace{N \ln(N) - N - (N - x) \ln(N - x) + N - x - x \ln(x) + x}_{=: f(x)},$$

co po zróżniczkowaniu po  $x$  daje

$$f'(x) = -\ln(N - x) + \ln(x),$$

Pytając o maksimum  $f$  szukamy wartości  $x$  dla której  $f'(x) = 0$

$$-\ln(N - x) + \ln(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{N}{2}.$$

Jako proste zadanie dla Czytelnika zostawiamy sprawdzenie, że  $f''(x) > 0$ .

## C4: Transformacja Laplace'a

## C4: Transformacja Laplace'a: treść zadań.

1. Obliczyć transformaty Laplace'a funkcji:

(a)  $f(t) = t \sin(\omega t),$

(b)  $g(t) = \sinh(\omega t),$

(c)  $h(t) = \cosh(\omega t),$

[Transformata Laplace'a: czyli tam...](#)2. Znaleźć funkcję  $f(t)$ , dla której transformata Laplace'a wynosi:

(a)  $\tilde{f}(s) = \frac{s+1}{s^2+2s},$

(b)  $\tilde{f}(s) = \frac{s^3+2s}{(s^2+1)^2},$

(c)  $\tilde{f}(s) = \frac{s}{s^2+4s+13}.$

Zauważmy, że zadanie wymaga wyznaczenia oryginału funkcji, czyli jego transformaty odwrotnej

[... i z powrotem.](#)

3. Metodą transformat Laplace'a rozwiązać równania:

(a)  $f'' + f' = t^2 + 2t, \quad f(0) = 4, \quad f'(0) = -2,$

(b)  $f'' - f' - 6f = 2, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0,$

(c)  $f'' + f = t, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2,$

Uwaga! Rozwiązywanie równań różniczkowych (najczęściej pierwszego lub drugiego rzędu) to ważne zastosowanie transformat Laplace'a.

4. Podobną metodą rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} f' + 2g = 3t, \\ g' - 2f = 4, \end{cases} \quad f(0) = 2, \quad g(0) = 3.$$

5. Określić przebieg natężenia prądu elektrycznego  $I(t)$  w obwodzie RC podłączonym do stałego napięcia  $U_0$ .Przyjąć, że początkowo kondensator nie był naładowany, czyli  $Q(0) = 0$ .6. Określić przebieg natężenia prądu elektrycznego  $I(t)$  w obwodzie RL podłączonym do zmiennego napięcia  $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ .Przyjąć, że  $I(0) = 0$ .

## C4: Transformacja Laplace'a: wskazówki.

1. Należy skorzystać z definicji transformaty Laplace'a

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

(a) Funkcję  $\sin(\omega t)$  należy zastąpić przez  $e^{i\omega t}$ .

Proszę zauważyć, że dostaniemy od razu przepis na transformatę gdy  $f(t) = t \cos(\omega t)$ .

(b) Należy skorzystać z relacji  $\sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$ .

(c) Należy skorzystać z relacji  $\cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$ .

Poprzez ułamki proste, wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia, etc. Przy przekształcaniach warto pamiętać o transformacji funkcji przesuniętej  $h(t) = f(t - a)$ , która  $\tilde{h}(s) = e^{-as} \tilde{f}(s)$ .

2. Celem jest maksymalne uproszczenie zadanych wyrażeń, a następnie wykorzystanie transformat podstawowych funkcji. **Przykład:** transformata:  $\tilde{f}(s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow$  oryginał:  $f(t) = e^{-2t}$ .

(c) Zauważmy że transformatę Laplace'a funkcji typu  $g(t) = e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$  można łatwo obliczyć, gdyż jest to transformata funkcji  $\cos(\omega t)$  od argumentu przesuniętego o  $\lambda$

Analogicznie dla funkcji, gdzie  $\cos$  jest zastąpiony przez  $\sin$ .

$$\begin{aligned} g(t) = e^{-\lambda t} \cos(\omega t) &\Rightarrow \tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} \cos(\omega t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \cos(\omega t) dt = \frac{s + \lambda}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) = e^{-\lambda t} \sin(\omega t) &\Rightarrow \tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} \sin(\omega t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} \sin(\omega t) dt = \frac{\omega}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

3. Należy zastosować transformatę do obu stron równania, rozwiązać równanie algebraiczne i wykonać transformatę odwrotną.

Pomocne mogą okazać się transformaty pochodnych:  $\tilde{f}'(s) = s\tilde{f}(s) - f(0)$ ,  $\tilde{f}''(s) = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$ .

4. Należy stosować wskazówki z Zadania 3.

5. Należy rozpisać równanie Kirchhoffa dla obwodu RC ze stałym źródłem napięcia, a następnie rozwiązać je jak w Zadaniach 3-4.

Natężenie  $I(t)$  najlepiej wyrazić jako pochodną  $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ .

6. Należy rozpisać równanie Kirchhoffa dla obwodu RL ze zmiennym źródłem napięcia, a następnie rozwiązać jak poprzednio.

Ma ono postać równania różniczkowe pierwszego rzędu z warunkiem początkowym  $I(0) = 0$ .

C4: Transformacja Laplace'a: odpowiedzi.

1.

$$(a) \tilde{f}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

$$(b) \tilde{f}(s) = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}.$$

$$(c) \tilde{f}(s) = \frac{s}{s^2 - \omega^2}.$$

2.

$$(a) f(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}.$$

$$(b) f(t) = \frac{t}{2} \sin(t) + \cos(t).$$

$$(c) f(t) = e^{-2t} \left[ \cos(3t) - \frac{2}{3} \sin(3t) \right].$$

3.

$$(a) f(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2e^{-t} + 2.$$

$$(b) f(t) = \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{1}{3}.$$

$$(c) f(t) = t + \cos(t) + \sin(t).$$

$$4. f(t) = -\frac{5}{4} + \frac{13}{4} \cos(2t) - 3 \sin(2t), g(t) = \frac{13}{4} \sin(2t) + 3 \cos(2t) + \frac{3}{2}t.$$

$$5. I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

$$6. I(t) = \frac{U_0}{R^2 + (L\omega)^2} \left[ L\omega e^{-\frac{Rt}{L}} - L\omega \cos(\omega t) + R \sin(\omega t) \right].$$

## C4: Transformacja Laplace'a: rozwiązania.

1.

(a) Zgodnie ze wskazówką liczymy transformatę funkcji  $e^{i\omega t}$ 

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s) &= \int_0^\infty t \sin(\omega t) e^{-st} dt = \int_0^\infty t \Im(e^{i\omega t}) e^{-st} dt \stackrel{\spadesuit}{=} \\ &\stackrel{\spadesuit}{=} \Im \left[ \int_0^\infty t e^{-(s-i\omega)t} dt \right] \stackrel{\clubsuit}{=} \Im \left[ \underbrace{\frac{-t}{s-i\omega} e^{-(s-i\omega)t}}_{=0} \Big|_0^\infty \right] + \\ &\quad - \Im \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-(s-i\omega)t}}{s-i\omega} dt \right] = -\Im \left[ \frac{1}{(s-i\omega)^2} \right] = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}.\end{aligned}$$

Pamiętamy przy tym w  $\spadesuit$ , że transformata Laplace'a, jak każda całka jest liniowa, więc możemy zamienić operacje całkowania z braniem części rzeczywistej (urojonej).

W  $\clubsuit$  liczymy całkę przez części.

(b) Zgodnie ze wskazówką rozpisujemy funkcję  $\sinh$ 

$$\begin{aligned}\tilde{g}(s) &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^\infty e^{(-s+\omega)t} dt - \int_0^\infty e^{(-s-\omega)t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{\omega-s} - \frac{1}{\omega+s} \right] = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}\end{aligned}$$

$$\sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$$

(c) Postępujemy analogicznie jak w punkcie (b).

Jedyna różnica to zamiana odpowiedniego znaku  $-$  na  $+$ .

2.

(a) Sprowadzamy transformatę do sumy funkcji wymiernych

$$\tilde{f}(s) = \frac{s+1}{s^2+2s} = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)}$$

stąd  $A = B = \frac{1}{2}$  oraz

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} \right) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2t}).$$

Porównując wyrażenia przy tych samych potęgach  $s$  w liczniku, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A=1. \end{cases}$$

Korzystając z tablicy transformat Laplace'a.

(b) Podobnie jak w punkcie (a) rozpisujemy

$$\tilde{f}(s) = \frac{s^3+2s}{(s^2+1)^2} = \frac{s^3+s+s}{(s^2+1)^2} = \frac{s(s^2+1)+s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{(s^2+1)^2},$$

co prowadzi do wniosku, że

$$f(t) = \cos(t) + \frac{t \sin(t)}{2}.$$

Korzystamy z tablicy transformat Laplace'a funkcji elementarnych oraz wyniku Zadania 1. (a) (dla  $\omega = 1$ ).

(c) Funkcja kwadratowa w mianowniku nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc wygodnie jest ją zapisać w postaci

$$\tilde{f}(s) = \frac{s}{s^2+4s+13} = \frac{s}{(s+2)^2+3^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - \frac{2}{3} \frac{3}{(s+2)^2+3^2}.$$

Korzystając ze wskazówki do zadania otrzymujemy

$$f(t) = e^{-2t} \left[ \cos(3t) - \frac{2}{3} \sin(3t) \right].$$

3.

(a) Transformując obie strony równania, otrzymujemy

$$s^2 \tilde{f} - 4s + 2 + s\tilde{f} - 4 = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}.$$

Wyznaczając stąd  $\tilde{f}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \frac{2}{s^4} + \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s(s+1)} = \\ &= \frac{2}{s^4} + \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} = \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s}. \end{aligned}$$

Zapisując ją w postaci sumy funkcji wymiernych (por. Zadanie 2.(a))

Korzystając z tablicy transformat Laplace'a, otrzymujemy

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2e^{-t} + 2.$$

(b) Analogicznie jak w Zadaniu 3.(a) otrzymujemy

$$\tilde{f}(s) = -\frac{1}{3} \frac{1}{s} + \frac{8}{15} \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \frac{1}{s+2} \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}.$$

(c) Transformując obie strony równania, otrzymujemy

$$(s^2 + 1)\tilde{f} = \frac{1}{s^2} + s + 2 = \frac{s^2 + 1 - s^2}{s^2} + s + 2 = \frac{s^2 + 1}{s^2} + s + 1$$

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow f(t) = t + \cos t + \sin t$$

4. Układy równań różniczkowych rozwiązuje się analogicznie jak pojedyncze równania różniczkowe:

$$\begin{cases} s\tilde{f} - 2 + 2\tilde{g} = \frac{3}{s^2}, \\ s\tilde{g} - 3 - 2\tilde{f} = \frac{4}{s}. \end{cases}$$

Z powyższego układu równań należy wyznaczyć  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{g}$ , a następnie zapisać je w postaci sumy funkcji wymiernych

$$\tilde{f}(s) = \frac{-5}{s(s^2+4)} + \frac{2s}{s^2+4} + \frac{-3 \cdot 2}{s^2+4} = -\frac{5}{4s} + \frac{13s}{4(s^2+4)} - \frac{6}{s^2+4},$$

$$\tilde{g}(s) = \frac{26}{4(s^2+4)} + \frac{3s}{s^2+4} + \frac{3}{2s^2}.$$

Korzystając z tablicy transformat Laplace'a, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{5}{4} + \frac{13}{4} \cos(2t) - 3 \sin(2t) \\ g(t) &= \frac{13}{4} \sin(2t) + 3 \cos(2t) + \frac{3t}{2}. \end{aligned}$$



5. Korzystając z II prawa Kirchhoffa i sumując spadki napięć na elementach obwodu do zera, otrzymujemy równanie

$$RI + \frac{Q}{C} = U_0,$$

co sprowadzamy do równania różniczkowego dla ładunku

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{U_0}{R} \Rightarrow \left(s + \frac{1}{RC}\right) \tilde{Q} = \frac{U_0}{R} \frac{1}{s}$$

skąd wyznaczamy  $\tilde{Q}(s) = \frac{U_0}{R} \frac{1}{s} \left(s + \frac{1}{RC}\right)^{-1}$ , co prowadzi do

$$\tilde{I}(s) = s\tilde{Q}(s) - Q(0) = \frac{U_0}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

6. Podobnie jak w zadaniu poprzednim w celu uzyskania równania różniczkowego na natężenie prądu korzystamy z II prawa Kirchhoffa i dokonujemy obustronnej transformaty Laplace'a

$$L \frac{dI}{dt} + IR = U_0 \sin \omega t \Rightarrow (sL + R) \tilde{I} = U_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Stąd wyznaczamy  $\tilde{I}$  i zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \tilde{I}(s) &= \frac{U_0}{L} \frac{\omega}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s^2 + \omega^2)} = \\ &= \frac{U_0}{L} \left( \frac{\omega}{\omega^2 + R^2/L^2} \frac{1}{s + R/L} + \frac{-\omega s + \omega R/L}{\omega^2 + R^2/L^2} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right) = \\ &= \frac{U_0 L}{\omega^2 L^2 + R^2} \left( \omega \frac{1}{s + R/L} - \omega \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{R}{L} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right). \end{aligned}$$

Korzystając z tablicy transformat Laplace'a, otrzymujemy

$$I(t) = \frac{U_0 L}{\omega^2 L^2 + R^2} \left[ \omega e^{-\frac{R}{L}t} - \omega \cos(\omega t) + \frac{R}{L} \sin(\omega t) \right].$$

Podstawiamy  $I = \frac{dQ}{dt}$ , co po podzieleniu stronami przez  $R$  prowadzi do otrzymanego równania.

Z warunku początkowego  $Q(0) = 0$ .  
Ponieważ  $I = \frac{dQ}{dt}$ , pozostaje nam skorzystać ze wzoru na transformate pochodnej i tablic transformat Laplace'a.

Z warunku początkowego  $I(0) = 0$ .

Porównaj Zadanie 2.

## C5-C6: Wielomiany ortogonalne

C5-C6: Wielomiany ortogonalne: treść zadań.

1. Dla  $x \in [-1, 1]$  zortogonalizować wielomiany:

- (a) 1,  
 (b)  $x$ ,  
 (c)  $x^2$ ,

2. Napisać równania różniczkowe dla

- (a) wielomianów Laguerre'a,  
 (b) wielomianów Czebyszewa,

3. Podać rozwiązanie równania:

$$(1 - x^2)f'' - 2xf' + 12f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad x \in [-1, 1].$$

4. Korzystając ze wzoru Rodriguesa obliczyć współczynniki  $a_n$  i  $b_n$ 

Czyli współczynniki przy pierwszych dwóch najwyższych potęgach.

- (a) wielomianów Laguerra  $L_n^\lambda$  dla  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$   
 (b) wielomianów Czebyszewa  $T_n$

5. Obliczyć wartość wielomianów Laguerra  $L_n^\lambda(x)$  w  $x = 0$ .Dla  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ 

6. Obliczyć kwadraty norm

- (a) wielomianów Laguerra  $\|L_n^\lambda\|^2$  dla  $m = 0, 1, 2, \dots$   
 (b) wielomianów Czebyszewa'a  $\|T_n\|^2$ ,

7. Napisać związki rekurencyjne dla

- (a) wielomianów Laguerre'a,  
 (b) wielomianów Czebyszewa,

8. Obliczyć całki:

Korzystając ze związków rekurencyjnych dla wielomianów.

- (a)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_1(x) H_3(x) dx$ ,  
 (b)  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} L_2^1(x) L_3^1(x) dx$ ,

9. Korzystając z odpowiednich funkcji tworzących obliczyć:

- (a)  $P_n(\pm 1)$ ,  
 (b)  $H_n(0)$ ,  
 (c)  $L_n^0(0)$ ,  
 (d)  $L_n^1(0)$ ,

10. Sprawdzić poprawność wzoru:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos [n \arccos(x)], \quad n > 1, \quad T_0(x) = 1.$$

Korzystając z równania rekurencyjnego dla wielomianów Czebyszewa.

11. Określić wszystkie miejsca zerowe wielomianu  $T_5(x)$ .

Dla  $x \in [-1, 1]$ .

12. Sprawdzić rozwinięcie:

$$\frac{4 - w^2}{4 - wx + w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n T_n(x)$$

Uwaga: jest to funkcja tworząca dla wielomianów Czebyszewa.

13. Wyprowadzić wzory

$$(a) \quad (2n + 1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1},$$

$$(b) \quad H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x),$$

$$(c) \quad H_n(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

## C5-C6: Wielomiany ortogonalne: wskazówki.

1. Można spróbować ortogonalizacji Grama-Schmidta.
2. Należy rozważyć uniwersalne równanie dla wielomianów  $Q_n$

$$BQ_n'' + (A + B')Q_n' - n[A_1 + (n + 1)B_2]Q_n = 0.$$

- (a) dla wielomianów Laguerre'a  $L_n^\lambda$  mamy  $A(x) = \lambda - x$ ,  $B(x) = x$ ,
- (b) a dla Czebyszewa  $T_n$   $A(x) = x$ ,  $B(x) = 1 - x^2$ .

3. Jest to równanie na jeden z wielomianów Legendre'a.

4. Należy skorzystać z ogólnego wzoru

$$W_{k+1} = BW_k' + [A + (n - k)B']W_k, W_0 = 1$$

Współczynniki przy najwyższych potęgach  $w_n$ ,  $v_n$  oraz  $a_n$  i  $b_n$  spełniają związek  $a_n = f_n w_n$ ,  $b_n = f_n v_n$ .

5. Skorzystać ze wzoru Rodriguesa.
6. Należy użyć ogólnego wzoru na kwadrat normy wielomianu

$$\|Q_n\|^2 = (-1)^n n! a_n f_n \int_x^\beta \rho(x) B^n(x) dx$$

7. Należy skorzystać z ogólnej postaci równania rekurencyjnego

$$xQ_n = c_{n+1}Q_{n+1} + c_nQ_n + c_{n-1}Q_{n-1},$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}, c_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, c_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{\|Q_n\|^2}{\|Q_{n-1}\|^2}.$$

8. Skorzystać ze związków rekurencyjnych i relacji ortogonalności.
9. Obliczenia wartości dowolnego wielomianu ortogonalnego  $Q_n(x)$  przy pomocy funkcji tworzącej dokonuje się, rozwijając analityczną postać funkcji tworzącej dla tego wielomianu przy zadanej wartości  $x$  w szereg Taylora wokół  $w = 0$ . Rozwinięcie to należy przyrównać do przedstawienia funkcji tworzącej w postaci szeregu względem potęg  $w$ , którego współczynnikami są  $Q_n(x)$ .
10. Zadanie rozwiązuje się, wstawiając bezpośrednio postulowaną postać  $T_n(x)$  do wzoru rekurencyjnego  $xT_n = T_{n+1} + \frac{1}{4}T_{n-1}$ .
11. Należy wprost skorzystać z przedstawienia  $T_5$  w formie z Zad 10.
12. Zauważmy, że nie jest to funkcja tworząca dla wielomianów  $\tilde{T}_n$ , którą można wyznaczyć z ogólnych wzorów podanych na wykładzie. Szereg występujący w podanej definicji funkcji tworzącej jest zbieżny dla  $|w| < 2$ . Należy:

Zadaną wagą, jeśli taka wola.

Wzory (4.11), (4.12) w [1].

$$A(x) = A_1x + A_0,$$

$$B(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0,$$

są wielomianami przez które wyraża się pochodna logarytmiczna wagi

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{A}{B}.$$

Wzór (4.18) w [1].

Odpowiednio wielomianu  $W_n = w_n x^n + v_n x^{n-1} + \dots$  i wielomianu  $Q_n = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$

Inny sposób (przy pomocy funkcji tworzących) - patrz Zad 9(c).

Wzór (4.34) w [1].

Wzory (4.42 - 46) w [1].

Odpowiednie funkcje tworzące znane są z wykładu i dane wzorami (4.57), (4.61), (4.62) w [1].

Szukane wartości  $Q_n(x)$  znajduje się przez przyrównanie po obu stronach wyrazów przy tych samych potęgach  $w$ .

Pomocne okażą się wzory na cosinus sumy i różnicy kątów.

Wzór (4.54) w [1].

- podstawić za  $T_n$  przedstawienie z Zad 10.
- podstawić  $\xi = \arccos x$ .
- rozpisać  $\cos(n\xi) = \frac{1}{2} (e^{in\xi} + e^{-in\xi})$ .
- zsumować szeregi geometryczne o ilorazach  $e^{\pm i\xi} w/2$ .
- odwrócić podstawienie  $\cos \xi = x$ .

13.

- (a) - zróżniczkować obustronnie funkcję tworzącą po  $x$ .
  - porównać współczynniki przy konkretnej potędze  $t^{k+1}$ .
  - zróżniczkować obustronnie formułę rekurencyjną dla  $P_n$ .
- (b) Zróżniczkować stronami wzór Rodriguesa.
- (c) Dowód indukcyjny: skorzystać ze wzoru Rodriguesa dla  $H_n$ .

Dla wielomianów Hermite'a (z indeksem  $n - 1$ ).

C5-C6: Wielomiany ortogonalne: odpowiedzi.

1. Przyjmując wagę  $\rho(x) = 1$ , otrzymujemy

- (a) 1
- (b)  $x$
- (c)  $x^2 - \frac{1}{3}$

2.

- (a)  $xL_n^{\lambda\prime\prime} + (\lambda - x + 1)L_n^{\lambda\prime} + nL_n^\lambda = 0$
- (b)  $(1 - x^2)T_n^{\prime\prime} - xT_n^{\prime} + n^2T_n = 0$

3.  $f(x) = P_3(x)$

4.

- (a)  $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}n(\lambda + n)$
- (b)  $a_n = 1, b_n = 0$

5.  $L_n^\lambda(0) = \frac{(\lambda+n)!}{\lambda!}$

6.

- (a)  $\|L_n^\lambda\|^2 = n!\Gamma(\lambda + n + 1) = n!(\lambda + n)!$
- (b)  $\|T_n\|^2 = \pi/2^{2n-1}$

7.

- (a)  $xL_n^\lambda = -L_{n+1}^\lambda + (\lambda + 2n + 1)L_n^\lambda - n(\lambda + n)L_{n-1}^\lambda,$
- (b)  $xT_n = T_{n+1} + \frac{1}{4}T_{n-1}.$

8.

- (a)  $12\sqrt{\pi}$
- (b)  $-3! \cdot 4!$

9.

- (a)  $P_n(1) = 1, n = 0, 1, 2, \dots, P_n(-1) = (-1)^n, n = 0, 1, 2, \dots$
- (b)  $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, H_{2n+1}(0) = 0.$
- (c)  $L_n^0(0) = n!, n = 0, 1, 2, \dots$
- (d)  $L_n^1(0) = (n+1)!, n = 0, 1, 2, \dots$

10. **TBA**

11.  $x = \cos(\frac{\pi}{10}), x = \cos(\frac{3\pi}{10}), x = 0, x = \cos(\frac{7\pi}{10}), x = \cos(\frac{9\pi}{10})$

12. **TBA**

13. **TBA**

## C5-C6: Wielomiany ortogonalne: rozwiązania.

1.

(a) 1 - pierwszy wielomian można pozostawić bez zmiany,

(b)  $(x, 1) = \int_{-1}^1 x dx = 0$

(c) Rozwiążmy układ równań

$$(x^2 + ax + b, 1) = (x^2, 1) + a(x, 1) + b(1, 1) = \frac{2}{3} + 2b = 0,$$

$$(x^2 + ax + b, x) = (x^2, x) + a(x, x) + b(1, x) = \frac{2}{3}a = 0,$$

Stąd  $a = 0$ ,  $b = -\frac{1}{3}$  i ortogonalny wielomian ma postać  $x^2 - \frac{1}{3}$ Przyjmujemy  $\rho(x) = 1$ Zatem  $x$  jest już ortogonalne do poprzedniego wielomianu 1. $a$  i  $b$  są szukanymi współczynnikami.Warunki te gwarantują ortogonalność  $x^2 + ax + b$  do poprzednich wielomianów  $x, 1$ .

2.

(a) wystarczy podstawić do wzoru ze wskazówki

(b) j.w., ( $A_1 = 1, B_2 = -1$ )

$$A_1 = -1, B_2 = 0$$

3. Jest to równanie dla wielomianów Legendre'a

$$(1 - x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0 \text{ z } n(n+1) = 12 \Rightarrow n = 3$$

Jawna postać wielomianu  $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ , więc spełnione są warunki początkowe  $P_3(0) = 0, P_3(1) = 1$ .

4.

(a) Rozpisując obie strony wzoru ze wskazówki, mamy

$$w_{k+1}x^{k+1} + v_{k+1}x^k + \dots = x[kw_kx^{k-1} + (k-1)v_kx^{k-2} + \dots] + (\lambda - x + n - k)[w_kx^k + v_kx^{k-1} + \dots]$$

Dla wielomianów Laguerre'a  $A(x) = \lambda - x, B(x) = x$ .Porównanie współczynników po obu stronach przy  $x^{k+1}$  daje

$$w_{k+1} = -w_k, w_0 = 1 \Rightarrow w_n = (-1)^n$$

Porównanie współczynników po obu stronach przy  $x^k$  daje(ponieważ  $w_k = (-1)^k$ )

$$v_{k+1} = kw_k + (\lambda + n - k)w_k - v_k = (\lambda + n)(-1)^k - v_k.$$

Ponieważ  $W_1 = BW_0' + (A + nB')W_0 = \lambda - x + n = -x + (\lambda + n) \Rightarrow v_1 = \lambda + n$ , stąd

$$v_2 = (\lambda + n)(-1) - (\lambda + n) = -2(\lambda + n),$$

$$v_3 = (\lambda + n)(-1)^2 + 2(\lambda + n) = 3(\lambda + n) \dots,$$

ogólnie  $v_n = (-1)^{n-1}n(\lambda + n)$ .

Dla wielomianów Laguerre'a

$$f_n = 1 \Rightarrow a_n = w_n = (-1)^n, b_n = v_n = (-1)^{n-1}n(\lambda + n)$$

Dla wielomianów Czebyszewa  $A(x) = x, B(x) = 1 - x^2$ .

(b) Rozpisując obie strony wzoru ze wskazówki, mamy

$$w_{k+1}x^{k+1} + v_{k+1}x^k + \dots = (1 - x^2)[kw_kx^{k-1} + (k-1)v_kx^{k-2} + \dots] + \underbrace{[x + (n-k)(-2x)]}_{(-2n+2k+1)x}[w_kx^k + v_kx^{k-1} + \dots]$$

Porównanie współczynników po obu stronach przy  $x^{k+1}$  daje  
 $w_{k+1} = -kw_k + (-2n + 2k + 1)w_k = (-2n + k + 1)w_k$ .

Ponieważ  $w_0 = 1 \Rightarrow w_1 = -2n + 1, w_2 = (-2n + 2)(-2n + 1),$   
 $w_3 = (-2n + 3)(-2n + 2)(-2n + 1) \dots$

$\Rightarrow w_n = (-2n + n)(-2n + (n - 1)) \dots (-2n + 1) = (-1)^n (2n - 1) \dots (n + 1)n = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$

Porównanie współczynników po obu stronach przy  $x^k$  daje  
 $v_{k+1} = -(k - 1)v_k + (-2n + 2k + 1)v_k = (-2n + k + 2)v_k$ .

Ponieważ  $W_1 = BW'_0 + (A + nB')W_0 = x - 2nx = (1 - 2n)x,$   
 stąd  $v_1 = 0,$  więc  $v_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$

Dla wielomianów Czebyszewa  $f_n = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \Rightarrow a_n = 1, b_n = 0.$

Ze wzoru Rodriguesa  $L_n^\lambda(x) = \tilde{L}_n^\lambda(x) = x^{-\lambda} e^x (x^\lambda e^{-x} x^n)^{(n)}$

5.

$$\begin{aligned} L_n^\lambda(x) &= x^{-\lambda} e^x \left[ (x^{\lambda+1} e^{-x} x^{n-1})^{(n-1)} \right]' = x^{-\lambda} e^x [x^{\lambda+1} e^{-x} L_{n-1}^{\lambda+1}(x)]' \\ &= (\lambda + 1) L_{n-1}^{\lambda+1}(x) - x L_{n-1}^{\lambda+1}(x) + x (L_{n-1}^{\lambda+1}(x))' \end{aligned}$$

$L_{n-1}^{\lambda+1}, (L_{n-1}^{\lambda+1})'$  są wielomianami stopnia  $n - 1, n - 2$  (lub zerem),  
 odpowiednio, więc  $L_n^\lambda(0) = (\lambda + 1) L_{n-1}^{\lambda+1}(0)$ . Powtarzając powyższe  
 rozumowanie  $n$  razy, dla wielomianów  $L_{n-1}^{\lambda+1}, L_{n-2}^{\lambda+2}, \dots, L_1^{\lambda+n-1},$   
 dochodzimy do wyrażenia

$$L_n^\lambda(0) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + n) L_0^{\lambda+n}(0) = \frac{(\lambda + n)!}{\lambda!}$$

Ze wzoru Rodriguesa  $L_0^{\lambda+n}(x) = x^{-(\lambda+n)} e^x (x^{\lambda+n} e^{-x} x^0)^{(0)} = 1$

6.

(a)

$$\|L_n^\lambda\|^2 = n! \int_0^\infty x^{\lambda+n} e^{-x} dx = n! \int_0^\infty x^{(\lambda+n+1)-1} e^{-x} dx = n! \Gamma(\lambda + n + 1)$$

$a_n = (-1)^n, f_n = 1, \rho(x) = x^\lambda e^{-x},$   
 $B(x) = x, (\alpha, \beta) = (0, \infty)$

(b)

$$\begin{aligned} \|T_n\|^2 &= (-1)^n n! (-1)^n \frac{(n-1)!}{(2n-1)!} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2)^n dx \\ &= \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \end{aligned}$$

$a_n = 1, f_n = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}, \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$   
 $B(x) = 1 - x^2, (\alpha, \beta) = (-1, 1).$

ponieważ

Całkę można sprowadzić do funkcji beta Eulera, dokonując podstawień  
 $t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t, dx = -dt,$  a  
 następnie  $t = 2s \Rightarrow s = \frac{t}{2}, dt = 2ds.$



$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} dx &= \int_{-1}^1 (1-x)^{n-\frac{1}{2}} (1+x)^{n-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \int_0^2 t^{n-\frac{1}{2}} (2-t)^{n-\frac{1}{2}} dt \\
 &= 2^{2n} \int_0^1 s^{n-\frac{1}{2}} (1-s)^{n-\frac{1}{2}} ds \\
 &= 2^{2n} \int_0^1 s^{(n+\frac{1}{2})-1} (1-s)^{(n+\frac{1}{2})-1} ds \\
 &= 2^{2n} \beta\left(n+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right) = 2^{2n} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2n+1)} \\
 &= 2^{2n} \frac{1}{(2n)!} \left[ \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!} \right]^2
 \end{aligned}$$

7.

(a)  $c_{n+1} = -1$ ,  
 $c_n = \frac{(-1)^{n-1} n(n+\lambda)}{(-1)^n} - \frac{(-1)^n (n+1)(n+\lambda+1)}{(-1)^{n+1}} = 2n + \lambda + 1$ ,  
 $c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1} n!}{(-1)^n (n-1)!} \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+n)} = -n(\lambda+n)$ .  
 Stąd  $xL_n^\lambda = -L_{n+1}^\lambda + (\lambda+2n+1)L_n^\lambda - n(\lambda+n)L_{n-1}^\lambda$ .

(b)  $c_{n+1} = 1, c_n = 0$ ,  
 $c_{n-1} = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{2^{2n-3}}{\pi} = \frac{1}{4}$ . Stąd  $xT_n = T_{n+1} + \frac{1}{4}T_{n-1}$ .

Dla wielomianów Laguerre'a  $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1} n(n+\lambda), \|L_n^\lambda\|^2 = n! \Gamma(\lambda+n+1)$

Dla wielomianów Czebyszewa  $a_n = 1, b_n = 0, \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2^{2n-1}}$

8.

(a)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_1(x) H_3(x) dx &= (xH_1, xH_3) = \left(\frac{1}{2}H_2 + H_0, \frac{1}{2}H_4 + 3H_2\right) \\
 &= \frac{3}{2}(H_2, H_2) = \frac{3}{2} \|H_2\|^2 = 12\sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

Związek rekurencyjny dla wielomianów Hermite'a  $xH_n = \frac{1}{2}H_{n+1} + nH_{n-1}$ , norma  $\|H_n\|^2 = n! 2^n \sqrt{\pi}$ , waga  $\rho(x) = e^{-x^2}$ .

(b)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-x} x^2 L_2^1(x) L_3^1(x) dx &= \int_0^{\infty} x e^{-x} x L_2^1(x) L_3^1(x) dx \\
 &= (xL_2^1, L_3^1) = (-L_3^1 + 6L_2^1 - 6L_1^1, L_3^1) \\
 &= -(L_3^1, L_3^1) = -\|L_3^1\|^2 = -3! \Gamma(5) = -3! \cdot 4!
 \end{aligned}$$

Związek rekurencyjny dla wielomianów Laguerre'a  $xL_n^\lambda = -L_{n+1}^\lambda + (\lambda+2n+1)L_n^\lambda - n(n+\lambda)L_{n-1}^\lambda$ , norma  $\|L_n^\lambda\|^2 = n! \Gamma(\lambda+n+1)$ , waga  $\rho(x) = x^\lambda e^{-x}$ .

9.

(a) Funkcja tworząca dla wielomianów Legendre'a

$$\Psi(x, w) = \frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) w^n$$

Dla  $x = 1$  mamy więc

$$\frac{1}{\sqrt{1-2w+w^2}} = \frac{1}{|1-w|} \stackrel{w \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) w^n = P_0(1) + P_1(1)w + P_2(1)w^2 + \dots,$$

stąd  $P_n(1) = 1, n = 0, 1, 2, \dots$

Analogicznie dla  $x = -1$  mamy

$$\frac{1}{\sqrt{1+2w+w^2}} = \frac{1}{|1+w|} \stackrel{w \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1)w^n = P_0(-1) + P_1(-1)w + P_2(-1)w^2 + \dots,$$

stąd  $P_n(-1) = (-1)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

(b) Funkcja tworząca dla wielomianów Hermite'a

$$\Psi(x, w) = e^{-w^2+2wx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{w^n}{n!}$$

Dla  $x = 0$  mamy więc

$$e^{-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(0) \frac{w^n}{n!}$$

stąd  $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$  (wyrazy parzyste),  $H_{2n+1}(0) = 0$  (wyrazy nieparzyste).

(c) Funkcja tworząca dla wielomianów Laguerre'a  $L_n^\lambda(x)$

$$\Psi(x, w) = \frac{1}{(1-w)^{\lambda+1}} e^{x \frac{w}{1-w}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\lambda(x) \frac{w^n}{n!}$$

Dla  $\lambda = 0$  i  $x = 0$  mamy więc

$$\frac{1}{(1-w)} = 1 + w + w^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^0(0) \frac{w^n}{n!} = L_0^0(0) + \frac{w}{1!} L_1^0(0) + \frac{w^2}{2!} L_2^0(0) + \dots$$

stąd  $L_n^0(0) = n!, n = 0, 1, 2, \dots$

(d) Analogicznie jak w (c), dla  $\lambda = 1, x = 0$ ,

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} = 1 + 2w + 3w^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^1(0) \frac{w^n}{n!} = L_0^1(0) + \frac{w}{1!} L_1^1(0) + \frac{w^2}{2!} L_2^1(0) + \dots$$

stąd  $L_n^1(0) = (n+1)n! = (n+1)!$ .

10.

Wstawiając postulowaną postać  $T_n(x)$  do wzoru rekurencyjnego dla wielomianów Czebyszewa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{x}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) &= \frac{1}{2^n} \cos[(n+1) \arccos x] + \frac{1}{4} \frac{1}{2^{n-2}} \cos[(n-1) \arccos x] \\ x \cos(n \arccos x) &= \frac{1}{2} \cos[(n+1) \arccos x] + \frac{1}{2} \cos[(n-1) \arccos x] \end{aligned}$$

Rozpisując po prawej stronie

$$\begin{aligned} \cos(n \arccos x \pm \arccos x) &= \cos(n \arccos x) \cos(\arccos x) \mp \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \\ &= x \cos(n \arccos x) \mp \sin(n \arccos x) \sin(\arccos x) \end{aligned}$$

otrzymujemy, że jest ona równa stronie lewej, c.d.o.

11.

Miejsca zerowe spełniają równanie  $\cos(5 \arccos x) = 0$ , stąd

$$\arccos x = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}$$

12.

Niech  $\xi = \arccos x$ , więc  $\cos \xi = x$ . Wstawiamy z zad.10

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\xi)$$

stąd

$$\begin{aligned} \Psi(x, w) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)w^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)w^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\xi)w^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2} (e^{in\xi} + e^{-in\xi}) w^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{e^{i\xi}w}{2} \right)^n + \left( \frac{e^{-i\xi}w}{2} \right)^n \right] = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{e^{i\xi}w}{2} \right)^n + \left( \frac{e^{-i\xi}w}{2} \right)^n \right] \\ &= -1 + \frac{1}{1 - \frac{w}{2}e^{i\xi}} + \frac{1}{1 - \frac{w}{2}e^{-i\xi}} = -1 + \frac{2 - w \cos \xi}{1 - w \cos \xi + w^2/4} = \frac{4 - w^2}{4 - 4w \cos \xi + w^2} = \frac{4 - w^2}{4 - 4wx + w^2} \end{aligned}$$

13.

- (a) Różniczkujemy obustronnie funkcję tworzącą po  $x \Rightarrow \frac{t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n$

Porównujemy współczynniki przy konkretnym  $t^{k+1} \Rightarrow P_k =$

$$P'_{k+1} - 2xP'_k + P'_{k-1} \Rightarrow 2xP'_k = P'_{k+1} + P'_{k-1} - P_k. (\spadesuit)$$

Różniczkujemy obustronnie podstawową formułę rekurencyjną

(z zamianą  $n \rightarrow k$ ) po  $x$  i mnożymy przez 2

$$\Rightarrow 2P_k + 2xP'_k = \frac{2k}{2k+1}P'_{k-1} + \frac{2(k+1)}{2k+1}P'_{k+1}$$

$$\stackrel{(\spadesuit)}{\Rightarrow} P_k = \frac{2k}{2k+1}P'_{k-1} + \frac{2(k+1)}{2k+1}P'_{k+1} - P'_{k+1} - P'_{k-1}$$

$$= -\frac{1}{2k+1}P'_{k-1} + \frac{1}{2k+1}P'_{k+1} \Rightarrow (2k+1)P_k = P'_{k+1} - P'_{k-1}, \text{ cbdo.}$$

- (b) Ze wzoru Rodriguesa (dla  $n-1$ )

$$\begin{aligned} H'_{n-1}(x) &= \frac{d}{dx} \left[ (-1)^{n-1} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n-1)} \right] \\ &= (-1)^{n-1} 2xe^{x^2} (e^{-x^2})^{(n-1)} + (-1)^{n-1} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} \\ &= 2x \left[ \underbrace{(-1)^{n-1} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n-1)}}_{H_{n-1}} \right] - \underbrace{(-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}}_{H_n} \\ &\Rightarrow H'_{n-1}(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x) = \left( 2x - \frac{d}{dx} \right) H_{n-1}(x) \end{aligned}$$

cbdo.

- (c) Dla  $n=0 \Rightarrow H_0(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right)^0 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 1$ , więc twierdzenie jest prawdziwe.

Funkcja tworząca dla wielomianów Legendre'a  $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ , podstawowa formuła rekurencyjna  $xP_n = \frac{n}{2n+1}P_{n-1} + \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}$

Wzór Rodriguesa dla wielomianów Hermite'a  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$

Należy skorzystać ze wzoru Rodriguesa  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ . Dowód indukcyjny.

Zakładamy prawdziwość wzoru dla  $n$  i sprawdzamy prawdziwość dla  $n + 1$ . Ze wzoru Rodriguesa

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = (-1)^n e^{-x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)}, \text{ stąd}$$

$$\begin{aligned} P &= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right)^{n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right) \left[\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right) \left[(-1)^n e^{-x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)}\right] \\ &= e^{x^2/2} x (-1)^n e^{-x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)} - e^{x^2/2} \frac{d}{dx} \left[(-1)^n e^{-x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)}\right] \\ &= (-1)^n x e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} - (-1)^n x e^{x^2/2} e^{x^2/2} (e^{-x^2})^{(n)} - (-1)^n e^{x^2/2} e^{x^2/2} \frac{d}{dx} (e^{-x^2})^{(n)} \\ &= (-1)^{n+1} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n+1)} = H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

(ostatnia równość wynika ze wzoru Rodriguesa dla  $H_{n+1}$ ), czyli wzór jest prawdziwy również dla  $n + 1$ , c.d.o.

## C7: Funkcje sferyczne

C7: Funkcje sferyczne: treść zadań.

1. Napisać jawne wzory na wszystkie funkcje sferyczne  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ .
2. Obliczyć normę  $\|Y_{2,1}\|$ .
3. Wyrazić wielomian  $P_1(t)$  przez funkcje sferyczne  $Y_{lm}(t, \varphi)$ .
4. Wyrazić funkcję  $f(x, y, z) = xy$  przez funkcje sferyczne  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ .
5. Na sferze jednostkowej zaznaczyć punkty, gdzie  $Y_{2,1}(\theta, \varphi) = 0$ .
6. Sprawdzić, że równanie Laplace'a jest spełnione również przez funkcję  $f(r, \theta, \varphi) = r^{-l-1}Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ .
7. Wykazać, że funkcje sferyczne są funkcjami własnymi operatora trzeciej składowej  $\hat{L}_3$  momentu pędu oraz kwadratu momentu pędu  $\hat{L}^2$ , gdzie  $\hat{L}_3 = -i\hbar\partial/\partial\varphi$ ,  $\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2$ .
8. Podać, z dokładnością do stałej, całkową postać funkcji sferycznych. W tym celu należy sprawdzić, że funkcja

$$f(x, y, z) = \int_0^{2\pi} [z + ix \cos(u) + iy \sin(u)]^l e^{imu} du$$

spełnia równanie Laplace'a.

9. Wyprowadzić związki rekurencyjne dla funkcji sferycznych

$$\hat{L}_{\pm} Y_{l,m} = (\hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2) Y_{l,m} = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{l,m \pm 1}$$

Należy wyjść od wielomianu Legendre'a  $P_2(t)$ , gdzie  $t = \cos\theta$ .Niezależnie od funkcji  $f(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ .Innymi słowy  $\hat{L}_3 Y_{l,m} = m\hbar Y_{l,m}$ , gdzie  $\hbar = h/(2\pi)$ , a  $h$  to stała Plancka, oraz  $\hat{L}^2 Y_{l,m} = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m}$  $L_{\pm}$  są operatorami podwyższającymi i obniżającymi liczbę kwantową  $m$ ; porównaj z operatorami kreacji i anihilacji np. dla oscylatora harmonicznego

C7: Funkcje sferyczne: wskazówki.

1. Funkcje sferyczne pochodzące od wielomianu Legendre'a  $P_2(t)$  to:  
 $Y_{2,m}(\theta, \varphi)$ , gdzie  $m = -2, -1, 0, 1, 2$ .

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} (1-\cos^2\theta)^{\frac{|m|}{2}} P_l^{(|m|)}(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (1)$$

oraz

$$P_l^{(|m|)}(\cos\theta) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} [(1-\cos^2\theta)^l]^{(|m|+l)}$$

Nawiasy () w wykładniku potęgi oznaczają pochodną.

2. Czynniki normujące funkcji sferycznej  $N$  wynosi:

$$N = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}$$

$N$  zapewnia normę funkcji równą jedności.

3. Należy wykorzystać równie (1) i podstawić  $m=0$ .
4. Rozwiązanie zadania wymaga przejścia ze zmiennych w układzie kartezyjskim do zmiennych w układzie sferycznym.
5. Należy przedyskutować rozwiązania dla  $\theta$  oraz  $\varphi$ .
6. Laplasjan we współrzędnych sferycznych ma postać

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right].$$

Dokonując podstawienia  $\xi = \cos\theta$ , mamy

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial \cos\theta}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial \cos\theta} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial \cos\theta} = -(1-\xi^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} =$$

$$\frac{1}{(1-\xi^2)^{1/2}} [-(1-\xi^2)^{1/2}] \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (1-\xi^2)^{1/2} [-(1-\xi^2)^{1/2}] \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{1-\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1-\xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1-\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$\Rightarrow \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1-\xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1-\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right\}.$$

Należy bezpośrednio podzielać operatorem Laplace'a (w formie podanej powyżej) na funkcję  $r^{-l-1} Y_{lm}$  i skorzystać z równania różniczkowego na funkcje sferyczne (wzór (5.8) ze skryptu),

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1-\xi^2) \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1-\xi^2} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2} = -l(l+1) Y_{lm}$$

7. W tym miejscu trochę wyprowadzeń, zwykle pomijanych w kursach fizyki kwantowej jako trywialne.

Dokonujemy transformacji do współrzędnych sferycznych,

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\y &= r \sin \theta \sin \phi, & \phi &= \arctan(y/x) \\z &= r \cos \theta, & \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.\end{aligned}$$

Obliczamy składowe jacobianu,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \phi, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \dots = \sin \theta \sin \phi, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \dots = \cos \theta, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{1}{1 + y^2/x^2} \frac{(-y)}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{r \sin \theta \sin \phi}{r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{1 \sin \phi}{r \sin \theta}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \dots = \frac{1 \cos \phi}{r \sin \theta}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)/z^2} \frac{1}{z} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi}{r^3 \sin \theta} = \frac{\cos \theta \cos \phi}{r}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \dots = \frac{\cos \theta \sin \phi}{r}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \dots = -\frac{1}{r} \sin \theta.\end{aligned}$$

Pochodne względem współrzędnych kartezjańskich, wyrażone we współrzędnych sferycznych, mają więc postać (korzystamy z "reguły łańcuchowej" obliczania pochodnej funkcji złożonej)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1 \sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1 \cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}$$

Składowe operatora momentu pędu wyrażone w układzie sferycznym mają więc znaną z wykładów z mechaniki kwantowej

postać

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x &= \hat{L}_1 = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= -i\hbar \left[ r \sin \theta \sin \phi \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - r \cos \theta \left( \sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \\
&= i\hbar \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\
\hat{L}_y &= \hat{L}_2 = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = \dots = i\hbar \left( -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \phi \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\
\hat{L}_z &= \hat{L}_3 = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \dots = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x^2 &= -\hbar^2 \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\
&= -\hbar^2 \left[ \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sin \phi \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \cos \phi \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \cos \phi \operatorname{ctg}^2 \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] \\
&= -\hbar^2 \left[ \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \sin \phi \cos \phi \left( -\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cos \phi \operatorname{ctg} \theta \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \theta} \right) + \cos \phi \operatorname{ctg}^2 \theta \left( -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \cos \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] \\
\hat{L}_y^2 &= \dots = -\hbar^2 \left[ \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \sin \phi \cos \phi \left( -\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} \right) \right. \\
&\quad \left. - \sin \phi \operatorname{ctg} \theta \left( -\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \theta} \right) + \sin \phi \operatorname{ctg}^2 \theta \left( \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \sin \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] \\
\Rightarrow \quad L_x^2 + L_y^2 &= -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg}^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \\
\hat{L}_z^2 &= -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Operator kwadratu momentu pędu we współrzędnych sferycznych przyjmuje więc znaną z mechaniki kwantowej postać,

$$\begin{aligned}
\hat{L}^2 &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \\
&= -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right].
\end{aligned}$$

Jest to pomnożona przez  $-\hbar^2$  część kątowa laplasjanu we współrzędnych sferycznych (por. wskazówka do zad.6).

Należy po prostu bezpośrednio podzielać operatorami  $\hat{L}_3, \hat{L}^2$  w podanej wyżej postaci na funkcje sferyczne  $Y_{l,m}$  i skorzystać z definicji funkcji sferycznych (wzór (5.21) w skrypcie) lub równania różniczkowego na funkcje sferyczne (wzór (5.8) w skrypcie).



8. Bezpośrednio podziałać laplasjanem (we współrzędnych kartezyjskich) na podaną funkcję  $f(x, y, z)$  (obliczając pochodne pod znakiem całki).
9. Korzystając z postaci operatorów  $\hat{L}_1, \hat{L}_2$  podanej we wskazówce do zad.7, otrzymujemy

$$\begin{aligned} L_{\pm} &= L_1 \pm iL_2 = i\hbar \left[ (\sin \phi \mp i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta (\cos \phi \pm i \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &= \hbar \left[ \pm (\cos \phi \pm i \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta (\cos \phi \pm i \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &= \hbar e^{\pm i\phi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \end{aligned}$$

Szukaną relację rekurencyjną dla  $L_+$  otrzymuje się, obliczając bezpośrednio  $L_+ Y_{l,m}$ . W przypadku operatora  $L_-$  wyprowadzenie jest bardziej skomplikowane, zalecane jest zapoznanie się z rozwiązaniem.

C7: Funkcje sferyczne: odpowiedzi.

$$1. \begin{aligned} Y_{2,2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \\ Y_{2,-2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} \\ Y_{2,1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} \\ Y_{2,-1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\varphi} \\ Y_{2,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

$$2. \|Y_{2,1}\| = \sqrt{\frac{5}{24\pi}}$$

$$3. P_l(t) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l,0}(t, \varphi)$$

$$4. f(r, \theta, \varphi) = i \sqrt{\frac{2\pi}{15}} [Y_{2,-2}(\theta, \varphi) - Y_{2,2}(\theta, \varphi)] r^2$$

$$5. \theta = 0 \vee \theta = \frac{\pi}{2} \text{ przy } \varphi \in \mathbb{R}$$

6.

$$7. \hat{L}_3 Y_{l,m} = m\hbar Y_{l,m}; \hat{L}^2 Y_{l,m} = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,m}$$

8. Przedstawienie całkowe:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \propto \int_0^{2\pi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos(u - \varphi)]^l e^{imu} du.$$

9.

## C7: Funkcje sferyczne: rozwiązania.

1. Podstawiając do wzoru na funkcje sferyczne otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Y_{2,2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} (1 - \cos^2 \theta) \frac{1}{8} [(1 - \cos^2 \theta)^2]^{(4)} e^{2i\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} (1 - \cos^2 \theta) \frac{1}{8} [1 - 2\cos^2 \theta + \cos^4 \theta]^{(4)} e^{2i\varphi} \\ &\quad \spadesuit \sqrt{\frac{45}{96\pi}} (1 - \cos^2 \theta) e^{2i\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \end{aligned}$$

Obliczenia dla  $Y_{2,-2}$  są takie same, jedynie pamiętamy o zamianie  $m=2$  na  $m=-2$   $Y_{2,-2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi}$ .

W  $\spadesuit$  wyznaczana jest czwarta pochodna z wyrażenia w nawiasie kwadratowym.

$$\begin{aligned} Y_{2,1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{24\pi}} (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} [(1 - \cos^2 \theta)^2]^{(3)} e^{i\varphi} \\ &\quad \clubsuit \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Dla  $m=-1$  ( $Y_{2,-1}$ ) postępuje się jak w poprzednim przypadku.

W  $\clubsuit$  wyznaczana jest trzecia pochodna z wyrażenia w nawiasie kwadratowym.

$$\begin{aligned} Y_{2,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (1 - \cos^2 \theta)^0 \frac{1}{8} [(1 - \cos^2 \theta)^2]^{(2)} \\ &= \sqrt{\frac{5}{256\pi}} (-4 + 12\cos^2 \theta) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

Proszę zauważyć brak zależności funkcji sferycznej względem  $\varphi$ .

$$2. \|Y_{2,1}\| = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} \stackrel{l=2, m=1}{=} \sqrt{\frac{5}{24\pi}}$$

3.

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(t, \varphi) &= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} (1-t^2)^{\frac{|m|}{2}} P_l^{(|m|)}(t) e^{im\varphi} \\ &\quad \stackrel{m=0}{=} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} P_l(t) \end{aligned}$$

Proszę zauważyć, że przy  $m=0$ , nie ma funkcyjnej zależności względem  $\varphi$ .

$$P_l(t) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}} Y_{l,0}(t, \varphi)$$

4. Funkcja  $f(x, y, z) = xy$  wyrażona w zmiennych układu sferycznego ma postać  $f(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi$ .

Do rozwiązania wykorzystamy funkcje sferyczne dla małych wartości indeksów ( $l=2, m=2$  oraz  $m=-2$ ).

$$\begin{aligned} Y_{2,2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \\ Y_{2,-2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 \frac{Y_{2,2}(\theta, \varphi) - Y_{2,-2}(\theta, \varphi)}{2i} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} r^2 \sin^2 \theta \sin(2\varphi) \\ r^2 \frac{Y_{2,2}(\theta, \varphi) + Y_{2,-2}(\theta, \varphi)}{2i} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ i \sqrt{\frac{2\pi}{15}} [Y_{2,-2}(\theta, \varphi) - Y_{2,2}(\theta, \varphi)] r^2 &= r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

Zaproponowane rozwiązanie nie jest jedyne.

5.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} &= 0 \\ 2 \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} &= 0 \\ \sin(2\theta) e^{i\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Musi zachodzić:  $\sin(2\theta) = 0 \vee e^{i\varphi} = 0$

Redukuje się do:  $2\theta = 0$  przy  $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$

Ostatecznie  $\theta = 0 \vee \theta = \frac{\pi}{2}$  przy  $\varphi \in \mathbb{R}$

6.

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \nabla^2 r^{-l-1} Y_{lm}(\xi, \phi) \\ &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} r^{-l-1} Y_{lm}(\xi, \phi) \\ &= Y_{lm}(\xi, \phi) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) r^{-l-1} + \frac{r^{-l-1}}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} Y_{lm}(\xi, \phi) \\ &= [(l+1)(l+2) - 2(l+1) - l(l+1)] r^{-l-3} Y_{lm}(\xi, \phi) = 0 \end{aligned}$$

7. Korzystając z równania na funkcje sferyczne (wzór (5.8) w skrypcie) oraz ze wskazówki do zad.6 otrzymujemy

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\xi, \phi) = -\hbar^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} Y_{lm}(\xi, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\xi, \phi),$$

więc rzeczywiście funkcje sferyczne  $Y_{l,m}$  są funkcjami własnymi operatora  $\hat{L}^2$ , odpowiadającymi wartościom własnym  $\hbar^2 l(l+1)$ .

Korzystając z jawnej postaci funkcji sferycznych (wzór (5.21) w skrypcie) otrzymujemy z kolei

$$\begin{aligned} \hat{L}_3 Y_{l,m}(\xi, \phi) &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} N_{lm} (1 - \xi^2)^{\frac{|m|}{2}} (P_l(\xi))^{|m|} e^{im\phi} \\ &= m\hbar N_{lm} (1 - \xi^2)^{\frac{|m|}{2}} (P_l(\xi))^{|m|} e^{im\phi} \\ &= m\hbar Y_{l,m}, \end{aligned}$$

więc rzeczywiście funkcje sferyczne  $Y_{l,m}$  są funkcjami własnymi operatora  $\hat{L}_3$ , odpowiadającymi wartościom własnym  $\hbar m$ .

8.

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^l e^{imu} du, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \int_0^{2\pi} du e^{imu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z + ix \cos u + iy \sin u)^l \\
&= -l(l-1) \cos^2 u \int_0^{2\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^{l-2} e^{imu} du, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \dots = -l(l-1) \sin^2 u \int_0^{2\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^{l-2} e^{imu} du, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \dots = l(l-1) \int_0^{2\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^{l-2} e^{imu} du, \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
&= \left[ l(l-1) \int_0^{2\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^{l-2} e^{imu} du \right] (-\cos^2 u - \sin^2 u + 1) = 0
\end{aligned}$$

Zapiszmy funkcję  $f$  w zmiennych układu sferycznego, ,

$$\begin{aligned}
x &= r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \\
z &= r \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z + ix \cos u + iy \sin u)^l &= r^l [\cos \theta + i \sin \theta (\cos \phi \cos u + \sin \phi \sin u)]^l \\
&= r^l [\cos \theta + i \sin \theta \cos(u - \phi)]^l \\
\Rightarrow f(r, \theta, \phi) &= r^l \int_0^{2\pi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos(u - \phi)]^l e^{imu} du
\end{aligned}$$

Wiadomo że  $\tilde{f}(r, \theta, \phi) = r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$  również spełnia równanie Laplace'a  $\nabla^2 \tilde{f} = 0$  (por. wykład i wzory (5.6), (5.7) w skrypcie). Wobec tego otrzymujemy następujące przedstawienie całkowe funkcji sferycznych (z dokładnością do stałej)

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \propto \int_0^{2\pi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos(u - \phi)]^l e^{imu} du.$$

9. Ograniczmy się dla uproszczenia do przypadku  $m \geq 0$ . Wprowadźmy oznaczenie

$$P_l^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} P_l^{(m)}(\xi) \Rightarrow Y_{lm}(\xi, \phi) = N_{lm} P_l^m(\xi) e^{im\phi}.$$

Obliczamy wyrażenia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\xi, \phi) &= -N_{lm} e^{im\phi} (1 - \xi^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} P_l^m(\xi) \\
&= -N_{lm} e^{im\phi} (1 - \xi^2)^{1/2} \left[ \frac{m}{2} (1 - \xi^2)^{m/2-1} (-2\xi) P_l^{(m)}(\xi) + (1 - \xi^2)^{m/2} P_l^{(m+1)}(\xi) \right] \\
&= N_{lm} e^{im\phi} \left[ m\xi (1 - \xi^2)^{(m-1)/2} P_l^{(m)}(\xi) - (1 - \xi^2)^{(m+1)/2} P_l^{(m+1)}(\xi) \right] \\
&= N_{lm} e^{im\phi} \left[ m\xi (1 - \xi^2)^{-1/2} P_l^m(\xi) - P_l^{m+1}(\xi) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm}(\xi, \phi) &= -m N_{lm} \operatorname{ctg} \theta P_l^m(\xi) e^{im\phi} \\
&= -m \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} N_{lm} (1-\xi^2)^{m/2} P_l^{(m)}(\xi) e^{im\phi} \\
&= N_{lm} e^{im\phi} \left[ -m \xi (1-\xi^2)^{(m-1)/2} P_l^{(m)}(\xi) \right] \\
&= N_{lm} e^{im\phi} \left[ -m \xi (1-\xi^2)^{-1/2} P_l^m(\xi) \right].
\end{aligned}$$

Stąd dla  $L_+ Y_{lm}$  otrzymujemy bezpośrednio

$$\begin{aligned}
L_+ Y_{lm}(\xi, \phi) &= \hbar e^{i\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{lm}(\xi, \phi) = -\hbar N_{lm} P_l^{m+1}(\xi) e^{i(m+1)\phi} \\
&= -\hbar \frac{N_{lm}}{N_{l,m+1}} N_{l,m+1} P_l^{m+1} e^{i(m+1)\phi} = -\hbar \frac{N_{lm}}{N_{l,m+1}} Y_{l,m+1}(\xi, \phi).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{N_{lm}}{N_{l,m+1}} &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m+1)!}{(l-m-1)!}} = \sqrt{\frac{(l-m)!(l+m+1)!}{(l+m)!(l-m-1)!}} \\
&= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$L_+ Y_{lm} = -\hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} Y_{l,m+1}.$$

Obliczenia dla  $L_- Y_{lm}$  są bardziej złożone.

$$\begin{aligned}
L_- Y_{lm}(\xi, \phi) &= \hbar e^{-i\phi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{lm}(\xi, \phi) \\
&= \hbar N_{lm} e^{i(m-1)\phi} \left[ -2m \xi (1-\xi^2)^{-1/2} P_l^m(\xi) + P_l^{m+1}(\xi) \right] \\
&= \hbar N_{lm} e^{i(m-1)\phi} (1-\xi^2)^{(m-1)/2} \left[ -2m \xi P_l^{(m)}(\xi) + (1-\xi^2) P_l^{(m+1)}(\xi) \right].
\end{aligned}$$

Posłużmy się znanym z wykładu (wzór (5.16) w skrypcie) równaniem spełnianym przez pochodne wielomianów Legendre'a

$$(1-\xi^2)(P_l^{(m)})'' - 2\xi(m+1)(P_l^{(m)})' + [l(l+1) - m(m+1)]P_l^{(m)} = 0,$$

dokonajmy zamiany  $m \rightarrow m-1$

$$(1-\xi^2)(P_l^{(m-1)})'' - 2\xi m (P_l^{(m-1)})' + [l(l+1) - m(m-1)]P_l^{(m-1)} = 0.$$

Ponieważ  $(P_l^{(m-1)})' = P_l^{(m)}$ ,  $(P_l^{(m-1)})'' = P_l^{(m+1)}$ ,

$$\Rightarrow (1-\xi^2)P_l^{(m+1)} - 2\xi m P_l^{(m)} = -[l(l+1) - m(m-1)]P_l^{(m-1)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
L_- Y_{lm}(\xi, \phi) &= -\hbar \frac{N_{lm}}{N_{l,m-1}} [l(l+1) - m(m-1)] N_{l,m-1} e^{i(m-1)\phi} (1-\xi^2)^{(m-1)/2} P_l^{(m-1)} \\
&= -\hbar \frac{N_{lm}}{N_{l,m-1}} [l(l+1) - m(m-1)] Y_{l,m-1}(\xi, \phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{N_{lm}}{N_{l,m-1}} &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+m-1)!}{(l-m+1)!}} = \sqrt{\frac{(l-m)!(l+m-1)!}{(l+m)!(l-m+1)!}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(l+m)(l-m+1)}} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}} \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$L_- Y_{lm} = -\hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} Y_{l,m-1}.$$

## C8-C9: Funkcje Bessela

C8-C9: Funkcje Bessela: treść zadań.

- Wykazać, że  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  dla  $n \in \mathbb{N}$ .
- Podać rozwiązanie równania  $x^2 f'' + x f' + (4x^2 - 9)f = 0$ . Nieosobliwe, oczywiście!
- Podać szereg Bessela dla równania  $x^2 f'' + x f' - (x^2 + \nu^2)f = 0$ . Przyjmujemy, że  $\nu \in \mathbb{R}$ .
- Wyrazić funkcje  $\sin(x)$  oraz  $\cos(x)$  przez funkcje Bessela.
- Wykazać, że

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y).$$

- Zapisać w postaci szeregu całkę  $I = \int_0^{2\pi} \cos[2 \sin(\varphi) - 3\varphi] d\varphi$ . Zwykłego szeregu liczbowego.
- Wykazać, że transformata Laplace'a
  - funkcji Bessela  $J_0(t)$  wynosi  $\tilde{J}_0(s) = (s^2 + 1)^{-1/2}$ .
  - funkcji  $f(t) = J_0(2\sqrt{t})$  wynosi  $\tilde{f}(s) = s^{-1} e^{-1/s}$ .
- Wyrazić przez funkcje elementarne funkcję  $J_{-3/2}(x)$ .
- Znaleźć dwa związki między funkcjami  $J_0$  oraz  $J_1$ .
- Udowodnić, że  $J_{\nu+1} + J_{\nu-1} = \frac{2\nu}{x} J_\nu$ .
- To samo dla sferycznych funkcji Bessela,  $j_{l+1} + j_{l-1} = \frac{2l+1}{x} j_l$ .
- Rozwiązać równanie

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0.$$

- Sprawdzić ortogonalność funkcji  $J_{1/2}(2x)$  oraz  $J_{1/2}(x)$  dla  $L = \pi$ .



## C8-C9: Funkcje Bessela: wskazówki.

1. Korzystamy z szeregu Bessela (wzór (6.11) ze skryptu) oraz właściwości funkcji gamma Eulera
2. Dokonać podstawienia  $x = At$  i wyznaczyć  $A$  tak, żeby sprowadzić zadane równanie do równania na pewną funkcję Bessela.
3. Równanie jest spełnione przez funkcję  $K_\nu = J_\nu(ix)$ , tj. funkcję Bessela argumentu zespolonego.
4. Należy skorzystać z funkcji tworzącej dla funkcji Bessela (wzór (6.13) ze skryptu), w której przyjmujemy  $w = i$ .
5. Należy skorzystać z funkcji tworzącej dla funkcji Bessela (wzór (6.13) ze skryptu)
6. Należy skorzystać z przedstawienia całkowego funkcji Bessela (wzór (6.20) ze skryptu), wyniku zad.1 oraz z szeregu Bessela dla funkcji Bessela z indeksem całkowitym
- 7.(a) Należy skorzystać z przedstawienia całkowego funkcji Bessela (wzór (6.20) ze skryptu)  
(b) Korzystamy z rozwinięcia funkcji Bessela z indeksem całkowitym na szereg (wzór (6.12) w skrypcie), a przy obliczaniu transformaty całkujemy pod znakiem sumy (jest to możliwe, ponieważ szereg Bessela jest jednostajnie zbieżny),
8. Korzystamy ze wzorów rekurencyjnych dla funkcji Bessela (wzór (6.27) w skrypcie) oraz znanej postaci funkcji  $J_{-1/2}$  (wzór (6.28) w skrypcie).
9. Korzystamy ze wzorów rekurencyjnych dla funkcji Bessela (wzory (6.24), (6.27) w skrypcie).
10. Por. wskazówka do zad.9
11. Korzystamy z wyniku zad.10, przyjmując w nim  $\nu = l + \frac{1}{2}$ , i z definicji sferycznych funkcji Bessela
12. Dokonać zamiany zmiennych  $y = kr$ ,  $S = \sqrt{y}R$  (por. wykład z komentarzem).
13. Bezpośrednie całkowanie.

$$J_\nu(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(l+\nu+1)} (x/2)^{2l+\nu}.$$

W szczególności  $\Gamma(k) \rightarrow \pm\infty$  dla  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \leq 0$ , więc przy  $l, n \in \mathbb{N}$  zachodzi  $1/\Gamma(l-n+1) = 0$  dla  $l-n+1 \leq 0 \Rightarrow l \leq n-1$ .

$$\Psi(w, x) = e^{(x/2)(w-1/w)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) w^n$$

$$J_n(t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\phi \exp[i(t \sin \phi - n\phi)]$$

$$J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l!(n+l)!} (x/2)^{2l+n}.$$

$$J_n(t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\phi \exp[i(t \sin \phi - n\phi)]$$

$$J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}$$

$$J_{\nu-1}(x) = x^{-\nu} \frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)),$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$J_{\nu+1}(x) = -x^\nu \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu(x))$$

$$J_{\nu-1}(x) = x^{-\nu} \frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x))$$

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x).$$

$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ ; relacja ortogonalności dla funkcji Bessela ma postać  $\int_0^L x J_\mu(ax) J_\mu(bx) dx$  (wzór (6.74) ze skryptu)

C8-C9: Funkcje Bessela: odpowiedzi.

1.

2.  $f(x) = J_3(2x)$  lub  $f(x) = J_{-3}(2x)$

3.  $K_\nu = J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l! \Gamma(l+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu}$ .

4.

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) \\ \sin x &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(x) \end{aligned}$$

5.

6.  $I = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+3)!}$

7.

8.  $J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\cos x}{x} - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$

9.  $J_1(x) = -\frac{d}{dx} J_0(x)$ ,  $J_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x y J_0(y) dy$

10.

11.

12.  $R(y) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{l+1/2}(kr)$

13.

## C8-C9: Funkcje Bessela: rozwiązania.

1.

$$J_{-n}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(l-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-n} = \sum_{l=n}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l-n}$$

Dokonujemy zamiany indeksów sumowania  $m = l - n \Rightarrow l = m + n, m = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x) \text{ cbdo.}$$

2.

$$\begin{aligned} x = At &\Rightarrow f' = \frac{df}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{df}{dt} = \frac{1}{A} \frac{df}{dt} \\ f'' &= \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \frac{1}{A} \frac{df}{dt} = \frac{1}{A^2} \frac{d^2f}{dt^2} \\ &\Rightarrow t^2 \frac{d^2f}{dt^2} + t \frac{df}{dt} + (4A^2t^2 - 9)f = 0 \end{aligned}$$

Przyjęcie  $4A^2 = 1 \Rightarrow A = 1/2$  prowadzi do równania

$$t^2 \frac{d^2f}{dt^2} + t \frac{df}{dt} + (t^2 - 9)f = 0,$$

którego rozwiązaniem jest  $f(t) = J_3(t) \Rightarrow f(x) = J_3(x/A) = J_3(2x)$ .

Uwaga: innym rozwiązaniem jest  $J_{-3}(2x) = (-1)^3 J_3(2x) = -J_3(2x)$  (por. zad.1), które spełnia takie samo równanie na funkcję Bessela

3. Przyjmujemy  $\zeta = ix \Rightarrow x = -i\zeta$ .

$$\begin{aligned} K'_\nu &= \frac{d}{dx} J_\nu(ix) = \frac{d\zeta}{dx} \frac{d}{d\zeta} J_\nu(\zeta) = i \frac{dJ_\nu}{d\zeta} \\ K''_\nu &= \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} J_\nu(ix) = \frac{d\zeta}{dx} \frac{d}{d\zeta} i \frac{dJ_\nu}{d\zeta} = -\frac{d^2 J_\nu}{d\zeta^2} \end{aligned}$$

Wstawiając do zadanego równania, otrzymujemy że funkcja  $J_\nu(\zeta)$  rzeczywiście spełnia równanie Bessela

$$\zeta^2 \frac{d^2 J_\nu}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dJ_\nu}{d\zeta} + (\zeta^2 - \nu^2) J_\nu = 0$$

Odpowiedni szereg Bessela ma więc postać (por. wzór (6.11) ze skryptu)

$$\begin{aligned} K_\nu &= J_\nu(ix) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(l+\nu+1)} \underbrace{\left(\frac{ix}{2}\right)^{2l+\nu}}_{i^{2l+\nu} = i^{2l} i^\nu = (-1)^l i^\nu} \\ &= i^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l! \Gamma(l+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu}. \end{aligned}$$

4.

$$w = i \Rightarrow \frac{1}{2} \left( w - \frac{1}{w} \right) = \frac{1}{2} \left( i - \frac{1}{i} \right) = i.$$

$$\begin{aligned} \Psi(i, x) &= e^{ix} = \cos x + i \sin x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) i^n \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k}(x) i^{2k} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{2l+1}(x) i^{2l+1} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k}(x) (-1)^k + i \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{2l+1}(x) (-1)^l \\ \Rightarrow \cos x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) \\ \sin x &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l J_{2l+1}(x) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \Psi(w, x+y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) w^n \\ &= \exp \left[ \frac{x+y}{2} \left( w - \frac{1}{w} \right) \right] = \exp \left[ \frac{x}{2} \left( w - \frac{1}{w} \right) \right] \exp \left[ \frac{y}{2} \left( w - \frac{1}{w} \right) \right] \\ &= \Psi(w, x) \Psi(w, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) w^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(y) w^k \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_k(y) w^{m+k} \end{aligned}$$

Dokonujemy podstawienia  $n = m + k \Rightarrow k = n - m$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , stąd

$$\Psi(w, x+y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) w^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y) \right] w^n.$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach  $w$ , otrzymujemy

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(y) \quad \text{cbdo.}$$

6.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \cos(2 \sin \phi - 3\phi) d\phi \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(2 \sin \phi - 3\phi)} d\phi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[-2 \sin \phi - (-3)\phi]} d\phi \right\} \\ &= \pi [J_3(2) + J_{-3}(-2)] = \pi [J_3(2) + (-1)^3 J_3(-2)] \\ &= \pi \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+3)!} - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+3)!} (-1)^{2l+3} \right] = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+3)!} \end{aligned}$$

7.(a) Rozpatrzmy ogólniejszą transformatę Laplace'a funkcji  $J_n(bt)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n(s) &= \int_0^\infty dt e^{-st} J_n(bt) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt e^{-st} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(bt \sin \phi - n\phi)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} \int_0^\infty dt e^{-(s-ib \sin \phi)t} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} \left. \frac{e^{-(s-ib \sin \phi)t}}{s-ib \sin \phi} \right|_0^\infty = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-in\phi}}{s-ib \sin \phi} d\phi \\ &\quad = 0 \text{ dla } t \rightarrow \infty, \text{ bo } s > 0 \end{aligned}$$

Dokonyjemy zamiany zmiennych  $z = e^{-i\phi} \Rightarrow dz = -ie^{-i\phi} d\phi = -iz d\phi \Rightarrow d\phi = idz/z$ ,  $\sin \phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i = (z^{-1} - z)/2i$ .

$$\tilde{J}_n(s) = \frac{i}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{z^n dz}{bz^2 + 2sz - b}$$

Funkcja podcałkowa ma bieguny rzędu pierwszego w punktach

$$z_{1,2} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 + b^2}}{b}.$$

Zachodzi  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| > 1$ , więc tylko biegun  $z_1$  leży wewnątrz krzywej całkowania,

$$\begin{aligned} \tilde{J}_n(s) &= \frac{i}{\pi} (-2\pi i) \operatorname{res}_{z_1} = 2 \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{z^n}{b(z - z_1)(z - z_2)} \\ &= \frac{2z_1^n}{b(z_1 - z_2)} = \frac{(\sqrt{s^2 + b^2} - s)^n}{b^n \sqrt{s^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Podstawiając zgodnie z treścią zadania  $n = 0$ ,  $b = 1$  otrzymujemy  $\tilde{J}_0(s) = 1/\sqrt{s^2 + 1}$ .

(b)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l!)^2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} t^l dt}_{\text{transformata } t^l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l!)^2} \frac{l!}{s^{l+1}} \\ &= \frac{1}{s} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(-\frac{1}{s}\right)^l = \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} J_{-3/2}(x) &= J_{-1/2-1}(x) = x^{1/2} \frac{d}{dx} (x^{-1/2} J_{-1/2}) \\ &= -\frac{1}{2x} J_{-1/2} + \frac{d}{dx} J_{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x + \frac{d}{dx} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \right) \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\cos x}{x} - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \end{aligned}$$

Krzywa całkowania jest okręgiem jednostkowym  $O((0,0),1)$  (tj.  $|z| = 1$ ), obiegany zgodnie z ruchem wskazówek zegara (a więc przeciwnie do kierunku wzrostu kąta  $\phi$ ), co powoduje pojawienie się minusa przed wynikiem przy całkowaniu metodą residuów (lub we wzorze Cauchy'ego).

9.

$$J_1 = -x^0 \frac{d}{dx}(x^0 J_0) = -\frac{d}{dx} J_0$$

$$J_0 = x^{-1} \frac{d}{dx}(x J_1) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x J_1) = x J_0 \Rightarrow J_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x y J_0(y) dy$$

10.

$$J_{v+1} = -x^v \frac{d}{dx} \frac{J_v}{x^v} = -x^v \frac{J'_v x^v - J_v v x^{v-1}}{x^{2v}} = -J'_v + \frac{v J_v}{x}$$

$$\Rightarrow J'_v = \frac{v J_v}{x} - J_{v+1}$$

$$J_{v-1} = x^{-v} \frac{d}{dx}(x^v J_v) = x^{-v} (v x^{v-1} J_v + x^v J'_v) = \frac{v J_v}{x} + J'_v$$

$$\Rightarrow J'_v = -\frac{v J_v}{x} + J_{v-1}$$

Stąd

$$\frac{v J_v}{x} - J_{v+1} = -\frac{v J_v}{x} + J_{v-1} \Rightarrow J_{v+1} + J_{v-1} = \frac{2v J_v}{x} \quad \text{cbdo.}$$

$$11. \quad j_{l+1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(l+\frac{1}{2})+1}(x), \quad j_{l-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(l+\frac{1}{2})-1}(x).$$

Z zad.10, mnożąc wynik dla  $v = l + \frac{1}{2}$  stronami przez  $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$  otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(l+\frac{1}{2})+1} + \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(l+\frac{1}{2})-1} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{2(l+\frac{1}{2}) J_{l+\frac{1}{2}}}{x} \Rightarrow j_{l+1}(x) + j_{l-1}(x) = \frac{2l+1}{x} j_l(x) \quad \text{cbdo.}$$

12.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (\spadesuit)$$

$$y = kr, \quad R(r) = \frac{S(y)}{\sqrt{y}} \Rightarrow$$

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dy}{dr} \frac{d}{dy} \left( \frac{S}{\sqrt{y}} \right) = k \left( \frac{dS}{dy} y^{-1/2} - \frac{1}{2} y^{-3/2} S \right)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{dy}{dr} \frac{d}{dy} \frac{dR}{dr} = k^2 \frac{d^2}{dy^2} \left( \frac{S}{\sqrt{y}} \right) = k^2 \left( y^{-1/2} \frac{d^2 S}{dy^2} - y^{-3/2} \frac{dS}{dy} + \frac{3}{4} y^{-5/2} S \right)$$

Wstawiając powyższe do  $(\spadesuit)$ , mnożąc stronami przez  $y^{5/2}$ , dzieląc przez  $k^2$  i grupując wyrazy podobne, otrzymujemy równanie na funkcję  $S(y)$ ,

$$y^2 \frac{d^2 S}{dy^2} + y \frac{dS}{dy} + \left[ y^2 - l(l+1) - \frac{1}{4} \right] S = y^2 \frac{d^2 S}{dy^2} + y \frac{dS}{dy} + \left[ y^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] S = 0 \quad (\clubsuit)$$

Rozwiązaniem  $(\clubsuit)$  jest  $S(y) = J_{l+1/2}(y)$ , więc  $R(y) = S(y) / \sqrt{y} = S(kr) / \sqrt{kr} = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{l+1/2}(kr)$ .

$$13. \quad \int_0^\pi x J_{1/2}(2x) J_{1/2}(x) dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \sin(2x) \sin(x) dx = 0, \text{ co widać od razu bez obliczania całki, ponieważ } \sin(2x) \text{ ma okres dwukrotnie mniejszy niż } \sin x.$$

## C10-C11: Dystrybucje

C10-C11: Dystrybucje: treść zadań.

- Sporządzić wykresy funkcji  $\Theta(x)$  (oznacza funkcję Heaviside'a (schodkową))
  - $\Theta(-x)$
  - $\Theta(x^2 - a^2)$
  - $\Theta(a^2 - x^2)$
  - $\Theta(-x^2 + 4x - 3)$
- Obliczyć sploty dwóch ciągów  $(a_n)$  i  $(b_n)$ :
  - $a \star a$ ,
  - $a \star b$ ,

gdzie  $a_n = \delta_{1,n} + \delta_{2,n}$ ,  $b_n = \delta_{1,n} + 2\delta_{2,n} - \delta_{3,n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Obliczyć sploty funkcyjne  $f \star g$  dla
  - $f(x) = \Theta(1 - x^2)$ ,  $g(x) = \Theta(x)$ ,
  - $f(x) = x^2\Theta(1 - x^2)$ ,  $g(x) = x\Theta(x)$ ,
  - $f(x) = G_\alpha(x)$ ,  $g(x) = G_\beta(x)$ , gdzie  $G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$  - funkcja Gaussa,
  - $f(x) = Z_{\alpha,\lambda}(x)$ ,  $g(x) = Z_{\beta,\lambda}(x)$ , gdzie  $Z_{\alpha,\lambda}(x) = \Theta(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda x}$ ,
  - $f(x) = P_a(x)$ ,  $g(x) = P_b(x)$ , gdzie  $P_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$ ,  $a > 0$ .
- Obliczyć wartości główne całek
  - $I = P \int_0^4 \frac{dx}{x-1}$ ,
  - $I = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$ ; porównaj z całką  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{2A} \frac{xdx}{x^2+1}$ .
- Znaleźć granice ciągów dystrybucyjnych przy  $n \rightarrow \infty$ 
  - $P \frac{\cos(nx)}{x}$ ,
  - $P \frac{\cos(x/n)}{x}$ .
- Znaleźć granice ciągów dystrybucyjnych przy  $n \rightarrow \infty$ 
  - $f_n(x) = ne^{-n|x-1|}$ ,
  - $f_n(x) = ne^{-|nx-1|}$ .
- Napisać ciąg  $\delta$ -podobny, startując z funkcji  $-f'_F(x)$ , gdzie funkcja Fermiego  $f_F(x) = 1/(e^x + 1)$ .
- Uprościć iloczyny

- (a)  $x\delta(3 - 2x)$ ,
- (b)  $x\delta(x^2 - 4)$ ,
- (c)  $\sin(\pi x)\delta(x^2 - 4)$ .

9. Uprościć sploty

- (a)  $x \star \delta(3 - 2x)$ ,
- (b)  $x \star \delta(x^2 - 4)$ ,
- (c)  $\sin(\pi x) \star \delta(x^2 - 4)$ .

10. Naszkicować wykresy pierwszej i drugiej pochodnej dystrybucyjnej dla funkcji

- (a)  $f(x) = e^{-|x|}$ ,
- (b)  $f(x) = \Theta(\pi^2 - x^2) \sin x$ .

11. Obliczyć pochodną dystrybucyjną funkcji  $f(x) = \ln |x|$ .

12. Uprościć wyrażenia

- (a)  $x\delta''(x)$ ,
- (b)  $x^2\delta''(x)$ ,
- (c)  $x^3\delta''(x)$ ,

13. Rozwiązać równanie  $\nabla^2 f(\vec{r}) \pm k^2 f(\vec{r}) = -\delta(\vec{r})$ .



## C10-C11: Dystrybucje: wskazówki.

1.  $\Theta(f(x)) = 0$  dla  $f(x) < 0$ ,  $\Theta(f(x)) = 1$  dla  $f(x) \geq 0$
2. Splot dwóch ciągów jest zdefiniowany jako ciąg o wyrazach  $(a \star b)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k$ . Zauważmy że iloczyn dwóch delt Kroneckera  $\delta_{k,l} \delta_{l,m} = 1 \Leftrightarrow k = l \wedge l = m$ , w pozostałych przypadkach wynosi on zero. Stąd np. jedynym wyrazem niezerowym w sumie  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{1,n-k} \delta_{1,k}$  jest wyraz z  $k = 1, n - 1 = 1$ , więc  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{1,n-k} \delta_{1,k} = \delta_{1,n-1} = \delta_{2,n}$ , itd.
3. Splot funkcyjny jest zdefiniowany jako  $(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt$ . W pkt.(a,b,d) szczególną uwagę należy zwrócić na granice całkowania; proszę sprawdzać, dla jakich wartości  $t$  oraz  $x$  wynik jest różny od zera.
4. Zgodnie z definicją wartości głównej należy symetrycznie wyłączać osobliwość lub przechodzić do granicy w nieskończoności.
- 5.
6. Zauważmy, że ciąg bazujący na funkcji  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$  w postaci  $f_n(x) = nf(nx) = \frac{n}{2}e^{-n|x|}$  jest ciągiem  $\delta$ -podobnym (wzory (7.27), (7.28) w skrypcie), ponieważ  $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx \right] = \frac{1}{2} \left[ e^x \Big|_{-\infty}^0 - e^{-x} \Big|_0^{\infty} \right] = 1$ .
- 7.
8. Skorzystać ze wzorów  $\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x_j)|} \delta(x - x_j)$ , gdzie  $f(x_j) = 0$  (wzór (7.69) w skrypcie) oraz  $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$ , gdzie  $f$  - dowolna funkcja (wzór (7.34'') w skrypcie).
9. Skorzystać ze wzorów  $\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x_j)|} \delta(x - x_j)$ , gdzie  $f(x_j) = 0$  (wzór (7.69) w skrypcie) oraz  $T(x) \star \delta(x-a) = T(x-a)$ , gdzie  $T$  - dowolna dystrybucja (wzór (7.61') w skrypcie).
10. W pkt.(b) por. zad.1(c).
11. Uwaga: należy pamiętać, że dla  $x < 0$  zachodzi  $(\ln(-x))' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .
- 12.
13. Rozwiązanie jest złożone i miejscami dość subtelne, więc zalecane jest zapoznanie się z "gotowcem" w części "Rozwiązania". Przedstawione wyprowadzenie zwykle jest omawiane na wykładzie.

C10-C11: Dystrybucje: odpowiedzi.

1.(a)

$$\Theta(-x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \geq 0 \\ 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

(b)

$$\Theta(x^2 - a^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-a, a) \\ 1 & \text{dla } x \leq -a \vee x \geq a \end{cases}$$

(c)

$$\Theta(a^2 - x^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -a \vee x > a \\ 1 & \text{dla } x \in \langle -a, a \rangle \end{cases}$$

(d)

$$\Theta(-x^2 + 4x - 3) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1 \vee x > 3 \\ 1 & \text{dla } x \in \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$$

2.(a)  $(a \star a)_n = \delta_{2,n} + 2\delta_{3,n} + \delta_{4,n},$

(b)  $(a \star b)_n = \delta_{2,n} + 3\delta_{3,n} + \delta_{4,n} - \delta_{5,n}.$

3.(a)

$$(f \star g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ x+1 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

(b)

$$(f \star g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{3}x & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

(c)

$$(G_\alpha \star G_\beta)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} = G_{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}(x)$$

(d)

$$(Z_{\alpha,\lambda} \star Z_{\beta,\lambda})(x) = \Theta(x) \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{\lambda x} = Z_{\alpha+\beta,\lambda}(x)$$

(e)

$$(P_a \star P_b)(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a+b}{x^2 + (a+b)^2} = P_{a+b}(x)$$

4.(a)  $I = \ln 3$

(b)  $I = 0$  (druga całka daje  $\ln 2$ )

5.(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P \frac{\cos(nx)}{x} = 0,$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P \frac{\cos(x/n)}{x} = P \frac{1}{x}.$

6.(a)  $\delta(x-1),$

(b)  $\delta(x)$ .

7.  $f_n(x) = \frac{ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2}$

8.(a)  $\frac{3}{4}\delta(x - \frac{3}{2})$ ,

(b)  $\frac{1}{2}[\delta(x - 2) - \delta(x + 2)]$ ,

(c) 0

9.(a)  $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

(b)  $\frac{1}{2}x$

(c)  $\frac{1}{2}\sin(\pi x)$

10.(a)  $f'(x) = -\operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$ ;  $f''(x) = -2\delta + e^{-|x|}$ ,

(b)  $f'(x) = \Theta(\pi^2 - x^2) \cos x$ ;

$f''(x) = \delta(x - \pi) - \delta(x + \pi) - \Theta(\pi^2 - x^2) \sin x$ .

11.  $P\frac{1}{x}$

12.(a)  $-2\delta'(x)$ ,

(b)  $2\delta(x)$ ,

(c) 0.

13.  $g(r) = \frac{1}{4\pi r}e^{-kr}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + r^2}$ ,  $k > 0$  dla równania z "+",

$g(r) = \frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}$  dla równania z "-".

C10-C11: Dystrybucje: rozwiązania.

1.(a)

$$\Theta(-x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ 1 & \text{dla } -x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$

(b)

$$\Theta(x^2 - a^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-a, a) \\ 1 & \text{dla } x^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow x < -a \vee x > a \end{cases}$$

(c)

$$\Theta(a^2 - x^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a^2 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -a \vee x > a \\ 1 & \text{dla } a^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-a, a) \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned} \Theta(-x^2 + 4x - 3) &= \Theta(-(x-1)(x-3)) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } -(x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3 \\ 1 & \text{dla } -(x-1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3) \end{cases} \end{aligned}$$

2.(a)

$$\begin{aligned} (a \star a)_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} a_k = \sum_k (\delta_{1,n-k} + \delta_{2,n-k})(\delta_{1,k} + \delta_{2,k}) \\ &= \sum_k \delta_{1,n-k} \delta_{1,k} + \sum_k \delta_{1,n-k} \delta_{2,k} + \sum_k \delta_{2,n-k} \delta_{1,k} + \sum_k \delta_{2,n-k} \delta_{2,k} \\ &= \delta_{1,n-1} + \delta_{1,n-2} + \delta_{2,n-1} + \delta_{2,n-2} \\ &= \delta_{2,n} + 2\delta_{3,n} + \delta_{4,n}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy ciąg o wyrazach  $(a \star a)_2 = 1$ ,  $(a \star a)_3 = 2$ ,  
 $(a \star a)_4 = 1$ ,  $(a \star a)_n = 0$  dla  $n \neq 2, 3, 4$ .

(b)

$$\begin{aligned} (a \star b)_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k = \sum_k (\delta_{1,n-k} + \delta_{2,n-k})(\delta_{1,k} + 2\delta_{2,k} - \delta_{3,k}) \\ &= \sum_k \delta_{1,n-k} \delta_{1,k} + 2 \sum_k \delta_{1,n-k} \delta_{2,k} - \sum_k \delta_{1,n-k} \delta_{3,k} \\ &+ \sum_k \delta_{2,n-k} \delta_{1,k} + 2 \sum_k \delta_{2,n-k} \delta_{2,k} - \sum_k \delta_{2,n-k} \delta_{3,k} \\ &= \delta_{1,n-1} + 2\delta_{1,n-2} - \delta_{1,n-3} + \delta_{2,n-1} + 2\delta_{2,n-2} - \delta_{2,n-3} \\ &= \delta_{2,n} + 3\delta_{3,n} + \delta_{4,n} - \delta_{5,n}. \end{aligned}$$

3.(a)  $f(x) = \Theta(1 - x^2)$ ,  $g(x) = \Theta(x) \Rightarrow$

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(1 - t^2) \Theta(x - t) dt = \int_{-1}^1 \Theta(x - t) dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ \int_{-1}^x dt = x + 1 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ \int_{-1}^1 dt = 2 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

(b)  $f(x) = x^2\Theta(1-x^2)$ ,  $g(x) = x\Theta(x) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2\Theta(1-t^2)(x-t)\Theta(x-t)dt = \\ &= \int_{-1}^1 t^2(x-t)\Theta(x-t)dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ \int_{-1}^x t^2(x-t)dt = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ \int_{-1}^1 t^2(x-t)dt = \frac{2}{3}x & \text{dla } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (G_\alpha \star G_\beta)(x) &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\alpha^2} - \frac{t^2}{2\beta^2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{xt}{\alpha^2} - \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(t - \frac{\beta^2 x}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Dokonujemy podstawienia  $u = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\beta} \left(t - \frac{\beta^2 x}{\alpha^2+\beta^2}\right) \Rightarrow dt = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow (G_\alpha \star G_\beta)(x) &= \frac{1}{2\pi\alpha\beta} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}} \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{=\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}} = G_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x). \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że dla splotu  $n$  rozkładów Gaussa otrzymujemy  $G_\sigma \star G_\sigma \dots \star G_\sigma = G_{\sqrt{n}\sigma}$ .

(d)

$$(Z_{\alpha,\lambda} \star Z_{\beta,\lambda})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x-t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda(x-t)} \Theta(t) \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{\lambda t} dt.$$

Ponieważ  $\Theta(x-t) > 0 \Leftrightarrow t < x$ ,  $\Theta(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0$ , funkcja podcałkowa jest niezerowa dla  $0 < t < x$ , przy czym musi zachodzić  $x > 0$ ; jeżeli te warunki nie są spełnione, w wyniku całkowania otrzymujemy zero. Stąd

$$(Z_{\alpha,\lambda} \star Z_{\beta,\lambda})(x) = \Theta(x) \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt.$$

Podstawiając  $t = xu \Rightarrow dt = xdu$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} (Z_{\alpha,\lambda} \star Z_{\beta,\lambda})(x) &= \Theta(x) \frac{x^{\alpha+\beta-1} e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \\ &= \Theta(x) \frac{x^{\alpha+\beta-1} e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \beta(\alpha, \beta) \\ &= \Theta(x) \frac{x^{\alpha+\beta-1} e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \Theta(x) \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{\lambda x} = Z_{\alpha+\beta,\lambda}(x). \end{aligned}$$

(e)

$$(P_a \star P_b)(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + t^2} \frac{b}{(x-t)^2 + b^2} dt.$$

Rozważmy całkę z funkcji zespolonej

$$f(z) = \frac{1}{\pi^2} \frac{a}{a^2 + z^2} \frac{b}{(x-z)^2 + b^2}$$

po konturze  $C$  złożonym z odcinka  $(-R, R)$  domkniętego w górnej półpłaszczyźnie półokręgiem  $C_R$  o środku  $(0, 0)$  i promieniu  $R$ . Funkcja podcałkowa ma bieguny w punktach  $z_1 = ia$ ,  $z_2 = -ia$ ,  $z_3 = x + ib$ ,  $z_4 = x - ib$ , z których  $z_1$  i  $z_3$  należą do wnętrza konturu  $C$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_1} f(z) &= \frac{ab}{\pi^2} \frac{1}{2ia[x - i(a-b)][x - i(a+b)]}, \\ \operatorname{res}_{z_3} f(z) &= \frac{ab}{\pi^2} \frac{1}{2ib[x - i(a-b)][x + i(a+b)]}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i [\operatorname{res}_{z_1} f(z) + \operatorname{res}_{z_3} f(z)] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{x - i(a-b)} \left[ \frac{b}{x - i(a+b)} + \frac{a}{x + i(a+b)} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{a+b}{x^2 + (a+b)^2} = P_{a+b}(x) = (P_a \star P_b)(x). \end{aligned}$$

4.(a)

$$\begin{aligned} P \int_0^4 \frac{dx}{x-1} &= P \int_0^2 \frac{dx}{x-1} + \int_2^4 \frac{dx}{x-1} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\left[ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} \right]}_{=0} + \int_2^4 \frac{dx}{x-1} \\ &= \ln|x-1| \Big|_2^4 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że dla  $R \rightarrow \infty$  na półokręgu  $C_R$ , tj. dla  $z = Re^{i\phi}$ ,  $\phi \in (0, \pi)$  zachodzi  $|f(z)| \propto 1/R^4$ , więc  $\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \propto 2\pi R/R^4 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ , więc  $\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = (P_a \star P_b)(x)$ .

Całki w nawiasie kwadratowym dają w sumie zero, ponieważ funkcja podcałkowa jest "nieparzysta" względem punktu osobliwego  $x = 1$ ; można to też wykazać, obliczając te całki bezpośrednio, ponieważ  $\forall \varepsilon > 0$  są one dobrze określone i skończone.

- (b) W sensie wartości głównej (przy symetrycznym przejściu do  $\pm\infty$ )

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{xdx}{x^2+1} = 0,$$

ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta.

- 5.(a) Niech  $\varphi \in \mathcal{D}$  będzie funkcją próbną o nośniku ograniczonym do przedziału  $(-A, A)$ .

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( P \frac{\cos(nx)}{x}, \varphi \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{x} \varphi(x) dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-A}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^A \frac{\cos(nx)}{x} [\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)] dx \right\} \\ &= \varphi(0) \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\left[ \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\cos(nx)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\cos(nx)}{x} dx \right]}_{I_1} \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\left[ \int_{-A}^{-\varepsilon} \cos(nx) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^A \cos(nx) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right]}_{I_2}. \end{aligned}$$

W całce  $I_1$   $\cos(nx)$  jest funkcją parzystą,  $\frac{1}{x}$  jest funkcją nieparzystą, więc  $\forall \varepsilon > 0$  suma obu całek wynosi zero, więc  $\forall n$   $I_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .

W całce  $I_2$  mamy z twierdzenia Rolle'a  $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)|$ ,

a ponieważ  $\varphi \in \mathcal{D}$ , funkcja  $\Phi(x) \equiv \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$  jest ograniczona i nieosobliwa w  $x = 0$ , a więc całkowna; w całce  $I_2$  można więc pominąć wartość główną i szacować bezpośrednio

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \cos(nx) \Phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \left( \frac{1}{n} \sin(nx) \right)' \Phi(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sin(nx) \Phi(x) \Big|_{-A}^A - \frac{1}{n} \int_{-A}^A \sin(nx) \Phi'(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ  $\sin(\pm nA) \Phi(\pm A)$  są liczbami skończonymi, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \Phi(x) \Big|_{-A}^A = 0$ . Ponadto

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \int_{-A}^A \sin(nx) \Phi'(x) dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-A}^A |\sin(nx)| |\Phi'(x)| dx \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-A}^A |\Phi'(x)| dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} 2A \sup_{x \in (-A, A)} |\Phi'(x)| = 0 \end{aligned}$$

Ostatecznie  $\forall \varphi$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( P \frac{\cos(nx)}{x}, \varphi \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P \frac{\cos(nx)}{x} = 0$ .

Widać że symetria przedziału całkowania ma znaczenie, ponieważ

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{2A} \frac{xdx}{x^2+1} &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{2A} \frac{2xdx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \ln |x^2+1| \Big|_{-A}^{2A} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \ln \frac{4A^2+1}{A^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2. \end{aligned}$$

Wynik ten jest niepoprawny, chociaż formalnie w obu przypadkach przejście z  $A \rightarrow \infty$  prowadzi to tej samej całki  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1}$ .

- (b) Niech  $\varphi \in \mathcal{D}$  będzie funkcją próbną o nośniku ograniczonym do przedziału  $(-A, A)$ . Obie całki poniżej są bezwzględnie zbieżne dla dowolnego  $\varepsilon > 0$ , więc możemy zmienić kolejność obliczania granic i wejść z granicą  $n \rightarrow \infty$  pod całkę,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( P \frac{\cos(x/n)}{x}, \varphi \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos(x/n)}{x} \varphi(x) dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-A}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^A \frac{\cos(x/n)}{x} \varphi(x) dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-A}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^A \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(x/n)}{x} \right] \varphi(x) dx \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-A}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^A \frac{\cos(0)}{x} \varphi(x) dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-A}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^A \frac{\varphi(x)}{x} dx \right] = \left( P \frac{1}{x}, \varphi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ostatecznie } \forall \varphi \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( P \frac{\cos(x/n)}{x}, \varphi \right) &= \left( P \frac{1}{x}, \varphi \right) \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P \frac{\cos(x/n)}{x} &= P \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

- 6.(a) Dokonujemy podstawienia  $y = x - 1 \Rightarrow dy = dx$ ,

$$\begin{aligned} \forall \varphi \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n e^{-n|x-1|}, \varphi \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-n|x-1|} \varphi(x) dx \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{2} e^{-n|y|} \varphi(y+1) dy \\ &= 2(\delta(y), \varphi(y+1)) = 2\varphi(1) = (2\delta(y-1), \varphi(y)) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-n|x-1|} &= 2\delta(x-1). \end{aligned}$$

- (b) Dokonujemy podstawienia  $y = x - \frac{1}{n} \Rightarrow dy = dx$ ,

$$\begin{aligned} \forall \varphi \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n e^{-|nx-1|}, \varphi \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-|nx-1|} \varphi(x) dx \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{2} e^{-n|y|} \varphi\left(y + \frac{1}{n}\right) dy \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{2} e^{-n|y|} \varphi\left(y + \frac{1}{n}\right) dy \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \delta(y), \varphi\left(y + \frac{1}{n}\right) \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 2\varphi(0) = (2\delta(y), \varphi(y)) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-|nx-1|} &= 2\delta(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad -f'(x) &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2}, \int_{-\infty}^{\infty} (-f'(x)) dx = - \frac{1}{e^x+1} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 \\ \Rightarrow f_n(x) &= n f(nx) = \frac{n e^{nx}}{(e^{nx}+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta(x). \end{aligned}$$

$$8.(a) \quad x\delta(3-2x) = \frac{1}{2}x\delta\left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \delta\left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \delta\left(x - \frac{3}{2}\right).$$



$$(b) \quad x\delta(x^2 - 4) = \frac{1}{4}[x\delta(x-2) + x\delta(x+2)] = \frac{1}{4}[2\delta(x-2) - 2\delta(x+2)] = \frac{1}{2}[\delta(x-2) - \delta(x+2)].$$

$$(c) \quad \sin(\pi x)\delta(x^2 - 4) = \frac{1}{4}[\sin(\pi x)\delta(x-2) + \sin(\pi x)\delta(x+2)] = \frac{1}{4}[\sin(2\pi)\delta(x-2) + \sin(-2\pi)\delta(x+2)] = 0.$$

$$9.(a) \quad x \star \delta(3 - 2x) = \frac{1}{2}x \star \delta(x - \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

$$(b) \quad x \star \delta(x^2 - 4) = \frac{1}{4}[x \star \delta(x-2) + x \star \delta(x+2)] = \frac{1}{4}(x-2 + x+2) = \frac{1}{2}x.$$

$$(c) \quad \sin(\pi x) \star \delta(x^2 - 4) = \frac{1}{4}[\sin(\pi x) \star \delta(x-2) + \sin(\pi x) \star \delta(x+2)] = \frac{1}{4}\{\sin[(x-2)\pi] + \sin[(x+2)\pi]\} = \frac{1}{2}\sin(\pi x).$$

10.(a) Pamiętajmy, że dla funkcji próbnych  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ .

i.

$$\begin{aligned} ((e^{-|x|})', \varphi) &= -(e^{-|x|}, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \varphi'(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^0 e^x \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi'(x) dx \\ &= -\left[ e^x \varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^x \varphi(x) dx \right] - \left[ e^{-x} \varphi(x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx \right] \\ &= -\left[ \varphi(0) - \int_{-\infty}^0 e^x \varphi(x) dx \right] - \left[ -\varphi(0) + \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx \right] \\ &= \int_{-\infty}^0 e^x \varphi(x) dx - \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-|x|} \varphi(x) dx - \int_0^{\infty} e^{-|x|} \varphi(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|} \varphi(x) dx = (-\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}, \varphi) \\ \Rightarrow (e^{-|x|})' &= -\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}. \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} ((e^{-|x|})'', \varphi) &\stackrel{(i.)}{=} ((-\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|})', \varphi) = (\operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}, \varphi') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|} \varphi'(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^0 e^x \varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi'(x) dx \\ &\stackrel{(i.)}{=} -2\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \varphi(x) dx = (-2\delta + e^{-|x|}, \varphi) \\ \Rightarrow (e^{-|x|})'' &= -2\delta + e^{-|x|}. \end{aligned}$$

Uwaga: widać że skok pochodnej dystrybucyjnej  $(e^{-|x|})'$  w punkcie  $x = 0$  o 2 jednostki w dół prowadzi do pojawienia się w drugiej pochodnej dystrybucji  $-2\delta(x)$ . Jest to przejaw ogólniejszej zasady, że przy obliczaniu pochodnej dystrybucyjnej funkcji nieciągłej każdemu skokowi wartości funkcji o  $\Delta f$  w punkcie  $x_0$  odpowiada w pochodnej pojawienie się dystrybucji  $\delta(x - x_0)$ .

(b)

$$\Theta(\pi^2 - x^2) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -\pi) \cup (\pi, \infty) \\ 1 & \text{dla } x \in (-\pi, \pi) \end{cases}$$

i.

$$\begin{aligned}
((\Theta(\pi^2 - x^2) \sin x)', \varphi) &= -(\Theta(\pi^2 - x^2), \varphi' \sin x) \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x) \sin x dx \\
&= -\left[\varphi(x) \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos x dx\right] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos x dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \Theta(\pi^2 - x^2) \cos x dx \\
&= (\Theta(\pi^2 - x^2) \cos x, \varphi) \\
\Rightarrow (\Theta(\pi^2 - x^2) \sin x)' &= \Theta(\pi^2 - x^2) \cos x.
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
((\Theta(\pi^2 - x^2) \sin x)'', \varphi) &\stackrel{(i.)}{=} ((\Theta(\pi^2 - x^2) \cos x)', \varphi) \\
&= -(\Theta(\pi^2 - x^2) \cos x, \varphi') = -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x) \cos x dx \\
&= -\left[\varphi(x) \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin x dx\right] \\
&= \varphi(\pi) - \varphi(-\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin x dx \\
&= (\delta(x - \pi) - \delta(x + \pi) - \Theta(\pi^2 - x^2) \sin x, \varphi) \\
\Rightarrow (\Theta(\pi^2 - x^2) \sin x)'' &= \delta(x - \pi) - \delta(x + \pi) - \Theta(\pi^2 - x^2) \sin x.
\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
((\ln |x|)', \varphi) &= -(\ln |x|, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} (\ln |x|) \varphi'(x) dx \\
&= -\left[\int_{-\infty}^0 (\ln(-x)) \varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} (\ln x) \varphi'(x) dx\right] \\
&= -\left[(\ln(-x)) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} \varphi(x) dx + (\ln x) \varphi(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-(\ln(-x)) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx - (\ln x) \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx\right].
\end{aligned}$$

Ponieważ dla funkcji próbnych  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$  oraz po rozwinięciu  $\varphi(\varepsilon)$  na szereg Taylora i skorzystaniu z reguły de l'Hospitala'a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)] \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varphi(0) + \varphi'(0)\varepsilon - \varphi(0) - \varphi'(0)(-\varepsilon)] \ln \varepsilon = 2\varphi'(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon \stackrel{H}{=} 0,$$

$$\begin{aligned}
((\ln |x|)', \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\varphi(-\varepsilon) \ln \varepsilon + \varphi(\varepsilon) \ln \varepsilon + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} dx\right) \frac{\varphi(x)}{x}\right] \\
&= \left(P \frac{1}{x}, \varphi\right) \Rightarrow (\ln |x|)' = P \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

12.(a)

$$\begin{aligned}(x\delta'', \varphi) &= ((\delta')', x\varphi) = -(\delta', (x\varphi)') = -(\delta', \varphi + x\varphi') = (\delta, (\varphi + x\varphi')') \\ &= (\delta, 2\varphi' + x\varphi'') = 2\varphi'(0) = (2\delta, \varphi') = -(2\delta', \varphi) \Rightarrow x\delta'' = -2\delta'.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(x^2\delta'', \varphi) &= (x\delta'', x\varphi) \stackrel{(a)}{=} (-2\delta', x\varphi) = 2(\delta, (x\varphi)') = 2(\delta, \varphi + x\varphi') \\ &= 2\varphi(0) = (2\delta, \varphi) \Rightarrow x^2\delta'' = 2\delta.\end{aligned}$$

(c)

$$(x^3\delta'', \varphi) = (x^2\delta'', x\varphi) \stackrel{(b)}{=} (2\delta, x\varphi) = 0 \Rightarrow x^3\delta'' = 0.$$

13. Wykażemy, że funkcja

$$g(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-kr}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad k > 0 \quad (\spadesuit)$$

jako dystrybucja spełnia równanie Helmholtza

$$(-\nabla^2 + k^2)g = \delta(\vec{r}), \quad \vec{r} = (x, y, z). \quad (\clubsuit)$$

W szczególności dla  $k = 0$  z  $(\spadesuit, \clubsuit)$  mamy równanie Laplace'a dla potencjału Coulomba,

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\vec{r}).$$

- (1) Zauważmy, że  $g(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-kr}$  dla  $r \neq 0$  spełnia równanie Helmholtza. Ponieważ  $g = g(r)$ , do obliczenia laplasjanu w zmiennych sefrycznych wystarczy skorzystać tylko z jego części radialnej. Ponieważ dla  $r \neq 0$  funkcja  $g = g(r)$  jest nieosobliwa, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\nabla^2 g &= \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rg(r)) = \frac{1}{4\pi r} \frac{d^2}{dr^2}(e^{-kr}) \\ &= \frac{1}{4\pi r} k^2 e^{-kr} \Rightarrow (-\nabla^2 + k^2)g = 0 \text{ dla } r \neq 0.\end{aligned}$$

- (2) W sensie dystrybucyjnym, dla dowolnej funkcji próbnej  $\varphi(\vec{r}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , korzystając z definicji pochodnej dystrybucyjnej, mamy

$$\begin{aligned}(\nabla^2 g, \varphi) &= (-1)^2(g, \nabla^2 \varphi) = (g, \nabla^2 \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dr r^2 \sin \theta g(r) \nabla^2 \varphi(\vec{r}) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dr \frac{1}{4\pi} r e^{-kr} \nabla^2 \varphi(\vec{r}),\end{aligned}$$

przy czym ostatnią całkę potrójną należy oczywiście rozumieć jako zwykłą całkę funkcyjną.

- (3) Zauważmy że w ostatniej całce funkcja podcałkowa  $(4\pi)^{-1}re^{-kr}\nabla^2\varphi(\vec{r})$  nie ma osobliwości przy  $r \rightarrow 0$  (w szczególności  $\varphi(\vec{r}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ ), więc  $\nabla^2\varphi(\vec{r})$  nie ma osobliwości przy  $r \rightarrow 0$ . Stąd  $(4\pi)^{-1}re^{-kr}\nabla^2\varphi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ , można więc napisać

$$\begin{aligned} (g, \nabla^2\varphi) &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_\varepsilon^R dr \frac{1}{4\pi} re^{-kr} \nabla^2\varphi(\vec{r}) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_\varepsilon^R dr r^2 g(r) \nabla^2\varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Ponieważ całka objętościowa w p.(3) jest zwykłą całką funkcyjną po objętości ograniczonej dwiema sferami, o promieniach  $\varepsilon$  i  $R$ , w celu jej obliczenia możemy skorzystać z twierdzenia Greena: dla dowolnych funkcji  $\psi(\vec{r}), \eta(\vec{r})$  klasy  $C_2(\mathbb{R}^3)$  całkę objętościową po objętości  $V$  można zastąpić przez całkę powierzchniową po powierzchni  $S$  ograniczającej objętość  $V$  w następujący sposób,

$$\iiint_V \left( \psi(\vec{r}) \nabla^2 \eta(\vec{r}) - \nabla^2 \psi(\vec{r}) \eta(\vec{r}) \right) dV = \iint_S \left( \psi(\vec{r}) \frac{d\eta}{d\vec{n}} - \frac{d\psi}{d\vec{n}} \eta(\vec{r}) \right) dS, \quad (\heartsuit)$$

gdzie  $\frac{d}{d\vec{n}}$  oznacza pochodną wektorową (normalną) w kierunku prostopadłym do powierzchni  $S$ , wyznaczanym przez wektor jednostkowy  $\vec{n}$  skierowany na zewnątrz powierzchni zamkniętej.

- (4) Przyjmując w tw. Greena ( $\heartsuit$ )  $\psi = g, \eta = \varphi$  i całkując we współrzędnych sferycznych, możemy napisać

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_\varepsilon^R dr r^2 \left( g(r) \nabla^2 \varphi(\vec{r}) - \underbrace{\nabla^2 g(r)}_{\stackrel{!}{=} k^2 g} \varphi(\vec{r}) \right) &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left( g(r) \frac{d\varphi}{d\vec{n}} - \frac{dg}{d\vec{n}} \varphi(\vec{r}) \right) dS &+ \quad (\triangle) \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{S_R} \left( g(r) \frac{d\varphi}{d\vec{n}} - \frac{dg}{d\vec{n}} \varphi(\vec{r}) \right) dS, &\quad (\square) \end{aligned}$$

gdzie  $S_\varepsilon, S_R$  oznaczają sfery o środku w początku układu współrzędnych i promieniach  $\varepsilon, R$ , odpowiednio.

- (5) Całka ( $\square$ ) = 0, ponieważ  $\varphi$  jest funkcją próbną o nośniku ograniczonym, więc dla  $R \rightarrow \infty$  mamy  $\varphi(R) = 0, \frac{d\varphi}{d\vec{n}} \Big|_{r=R} = 0$ .
- (6) W całce ( $\triangle$ ) oszacujemy najpierw pierwszą całkę. Ponieważ  $\varphi$  jest funkcją próbną klasy  $C_\infty(\mathbb{R}^3)$ , wszelkie pochodne funkcji  $\varphi$  są ograniczone z góry i można oszacować  $\left| \frac{d\varphi}{d\vec{n}} \right| \Big|_{\vec{r} \in S_\varepsilon} =$

$$\left| \frac{d\varphi}{d\vec{n}} \right|_{r=\varepsilon} \leq \sup_{r=\varepsilon} \left| \frac{d\varphi}{d\vec{n}} \right| \equiv A$$

$$\begin{aligned} \left| \iint_{S_\varepsilon} g(r) \frac{d\varphi}{d\vec{n}} dS \right| &= \left| g(\varepsilon) \iint_{S_\varepsilon} \frac{d\varphi}{d\vec{n}} dS \right| \leq |g(\varepsilon)| \iint_{S_\varepsilon} \left| \frac{d\varphi}{d\vec{n}} \right| dS \\ &\leq \frac{e^{-k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} A 4\pi\varepsilon^2 \propto \varepsilon e^{-k\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

(7) Drugą całkę w ( $\Delta$ ) rozdzielimy na dwie,

$$\iint_{S_\varepsilon} \frac{dg}{d\vec{n}} \varphi(\vec{r}) dS = \iint_{S_\varepsilon} \frac{dg}{d\vec{n}} [\varphi(\vec{r}) - \varphi(0)] dS + \varphi(0) \iint_{S_\varepsilon} \frac{dg}{d\vec{n}} dS \quad (\circ)$$

(8) Obliczamy drugą całkę w ( $\circ$ ). Pochodna normalna w kierunku  $\vec{n}$  na powierzchni  $S_\varepsilon$  jest pochodną względem  $r$  z minusem (ponieważ objętość  $V$  w p.(3) to obszar  $\varepsilon < r < R$ , to kierunek na zewnątrz powierzchni  $S_\varepsilon$  jest ku środkowi układu współrzędnych, stąd minus), więc

$$\frac{dg}{d\vec{n}} = -\frac{dg}{dr} = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-kr}}{r} \right) = \frac{1}{4\pi r^2} e^{-kr} (kr + 1) \quad (\diamond)$$

$$\Rightarrow \iint_{S_\varepsilon} \frac{dg}{d\vec{n}} dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} e^{-k\varepsilon} (k\varepsilon + 1) 4\pi\varepsilon^2 = e^{-k\varepsilon} (k\varepsilon + 1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1.$$

(9) Aby oszacować pierwszą całkę w ( $\circ$ ) korzystamy ponownie z faktu, że  $\varphi$  jest funkcją próbną klasy  $C_\infty(\mathbb{R}^3)$  o wszystkich pochodnych ograniczonych, więc (jak zobaczymy, w rozwinięciu na szereg Taylora wystarczy zachować wyrazy liniowe względem  $\varepsilon$ ),

$$\begin{aligned} &|\varphi(\vec{r}) - \varphi(0)|_{\vec{r}=(x,y,z) \in S_\varepsilon} \\ &\approx \left| \varphi(0) + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=0} x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=0} y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{\vec{r}=0} z + \dots - \varphi(0) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=0} \right| |x| + \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=0} \right| |y| + \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{\vec{r}=0} \right| |z| + O(\varepsilon^2) \\ &\leq 3 \max \left\{ \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{\vec{r}=0} \right|, \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Big|_{\vec{r}=0} \right|, \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{\vec{r}=0} \right| \right\} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \equiv C\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (\star) \end{aligned}$$

Stąd pierwsza całka w ( $\circ$ )

$$\begin{aligned} \left| \iint_{S_\varepsilon} \frac{dg}{d\vec{n}} [\varphi(\vec{r}) - \varphi(0)] dS \right| &\leq \iint_{S_\varepsilon} \left| \frac{dg}{d\vec{n}} \right| |\varphi(\vec{r}) - \varphi(0)| dS \\ &\stackrel{(\diamond), (\star)}{\leq} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} e^{-k\varepsilon} (k\varepsilon + 1) [C\varepsilon + O(\varepsilon^2)] 4\pi\varepsilon^2 \\ &\propto \varepsilon e^{-k\varepsilon} (k\varepsilon + 1) + O(\varepsilon^2) e^{-k\varepsilon} (k\varepsilon + 1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

(widać że wyrazy rzędu  $\varepsilon^2$  są w powyższym oszacowaniu nieistotne).

- (10) Ostatecznie z p.(6-9) wynika, że wkład do całki ( $\Delta$ ) w p.(4) wnosi tylko druga całka w ( $\circ$ ) w p.(7), obliczona w p.(8),

$$(\Delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left( g(r) \frac{d\varphi}{d\vec{n}} - \frac{dg}{d\vec{n}} \varphi(\vec{r}) \right) dS = -\varphi(0) = -(\delta, \varphi).$$

- (11) Z (4), biorąc pod uwagę wyniki (5), (10) i korzystając z p.(3) i (2), otrzymujemy

$$\begin{aligned} -(\delta, \varphi) &= -\varphi(0) \\ &\stackrel{(5,10)}{=} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_\varepsilon^R dr r^2 \left( g(r) \nabla^2 \varphi(\vec{r}) - k^2 g(r) \varphi(\vec{r}) \right) \\ &\stackrel{(3)}{=} \underbrace{(g(r), \nabla^2 \varphi(\vec{r})) - (1, k^2 g(r) \varphi(\vec{r}))}_{\text{w sensie funkcyjnym}} \\ &\stackrel{(2)}{=} \underbrace{(\nabla^2 g(r), \varphi(\vec{r})) - (k^2 g(r), \varphi(\vec{r}))}_{\text{w sensie dystrybucyjnym}} = ((\nabla^2 - k^2)g(r), \varphi(r)). \end{aligned}$$

Ponieważ powyższa równość dystrybucyjna spełniona jest dla dowolnej funkcji próbnej  $\varphi$ , otrzymujemy szukany związek dystrybucyjny

$$(\nabla^2 - k^2)g(r) = -\delta(\vec{r}), \quad g(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-kr} \quad (\clubsuit) \text{ cbdo.}$$

Uwaga. Powyższe rozważania pozostają w mocy, jeśli w funkcji  $g(r)$  dokonamy zamiany  $k \rightarrow ik$ . Z p.(1) otrzymamy wówczas, że dla  $r \neq 0$  w sensie funkcyjnym  $g(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}$  spełnia równanie  $(-\nabla^2 - k^2)g(r) = 0$ . Z kolei powtarzając rozumowanie z p.(2-11) łatwo pokazać, że w sensie dystrybucyjnym tak zdefiniowana funkcja  $g(r)$  spełnia równanie  $(-\nabla^2 - k^2)g(r) = -\delta(\vec{r})$ .

## C12-C13: Transformacja Fouriera

C12-C13: Transformacja Fouriera: treść zadań.

1. Obliczyć transformaty Fouriera dla funkcji

(a)  $f(x) = e^{-|x|}$ ,

(b)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ,

(c)  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ,

(d)  $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$ .

2. Obliczyć dwuwymiarowe transformaty Fouriera dla funkcji

(a)  $f(x, y) = \Theta(R - r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{r}e^{-ar}$ .

3. Obliczyć trójwymiarowe transformaty Fouriera dla funkcji

(a)  $f(x, y) = \Theta(R - r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,

(b)  $f(x, y) = \frac{1}{r}e^{-ar}$ .

4. Obliczyć dystrybucyjne transformaty Fouriera dla funkcji lub dystrybucji

(a)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ ,

(b)  $f(x) = \cos^2 x$ ,

(c)  $f(x) = x \sin x$ ,

(d)  $f(x) = P\frac{1}{x}$ .

5. Znaleźć szczególne rozwiązania równania

(a)  $\varphi''(x) - 4\varphi(x) = \delta(x)$ ,

(b)  $\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi(x) = \delta(x)$ .

Przyjmujemy definicję transformaty dwuwymiarowej  $f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r})$ ,  $\vec{r} = (x, y)$ ,  $\vec{k} = (k_x, k_y)$

Przyjmujemy definicję transformaty trójwymiarowej  $f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r})$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

## C12-C13: Transformacja Fouriera: wskazówki.

1. Przyjmujemy definicję transformaty prostej  $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$ .

W zad. (b)-(d) należy skorzystać z lematu Jordana. Rozpatrujemy całkę zespoloną  $\oint_C e^{-ikz} f(z) dz = \int_{-R}^R e^{-ikx} f(x) dx + \int_{C_R} e^{-ikz} f(z) dz$  po konturze  $C$  złożonym z odcinka  $(-R, R)$  na osi rzeczywistej i domykającego półokręgu o promieniu  $R$  w górnej lub dolnej półpłaszczyźnie, w zależności od znaku  $k$ , i przechodzimy z  $R \rightarrow \infty$ . Funkcja  $f(z)$  na półokręgu  $C_R$  jest bezwzględnie zbieżna do zera przy  $R \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{R \rightarrow \infty} |f(Re^{i\varphi})| = 0$ ,  $\varphi \in (0, \pi)$  dla  $C_R$  w górnej półpłaszczyźnie lub  $\varphi \in (0, -\pi)$  dla  $C_R$  w dolnej półpłaszczyźnie; można to udowodnić jak w zad. 7(b) z serii C2: Funkcje zespolone, otrzymując oszacowania

$$\left| \frac{1}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1} < \frac{2}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

$$\left| \frac{z}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{R}{R^2 - 1} < \frac{2}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Można więc skorzystać z lematu Jordana, otrzymując  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-ikz} f(z) dz = 0$ , skąd  $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \oint_C e^{-ikz} f(z) dz$ . Biegunki funkcji podcałkowej  $z_1 = -i$ ,  $z_2 = i$ .

2. Wyznamy najpierw ogólną postać transformaty funkcji  $f = f(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Dla konkretnego wektora falowego  $\vec{k} = (k_x, k_y)$  przyjmujemy, że kartezjański układ współrzędnych ma oś  $Ox$  równoległą do wektora  $\vec{k}$ . Zapisując  $\vec{r} = (x, y)$  w biegunowym układzie współrzędnych, związanym z ww. układem kartezjańskim, mamy  $\vec{r} = r(\cos \phi, \sin \phi)$  oraz  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \phi$ . Całkując w biegunowym układzie współrzędnych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{f}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr r e^{-ikr \cos \phi} f(r) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dr r f(r) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi e^{-ikr \cos \phi}}_{=I_1}. \end{aligned}$$

Aby obliczyć całkę  $I_1$ , skorzystajmy z całkowego przedstawienia funkcji Bessela (wzór (6.20') w skrypcie),

$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi e^{ix \cos \phi} d\phi \Rightarrow$  (kreska oznacza sprzężenie zespolone)

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \cos \phi} = 2\pi \overline{J_0(kr)} = 2\pi J_0(kr).$$

Stąd ogólna postać transformaty funkcji  $f(r)$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r f(r) J_0(kr) dr.$$



3. Podobnie jak w zad. 2, wyznaczmy najpierw ogólną postać transformaty funkcji  $f = f(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Dla konkretnego wektora falowego  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  przyjmujemy, że kartezjański układ współrzędnych ma oś  $Oz$  równoległą do wektora  $\vec{k}$ . Zapisując  $\vec{r} = (x, y, z)$  w sferycznym układzie współrzędnych, związanym z ww. układem kartezjańskim, mamy  $\vec{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  oraz  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos \theta$ . Całkując w sferycznym układzie współrzędnych, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\hat{f}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-ikr \cos \theta} f(r) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dr r^2 f(r) \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin \theta e^{-ikr \cos \theta}}_{=I_1}\end{aligned}$$

Całkę  $I_1$  obliczamy przez podstawienie  $u = \cos \theta \Rightarrow \sin \theta d\theta = -du$ ,

$$\begin{aligned}I_1 &= - \int_1^{-1} du e^{-ikru} = \int_{-1}^1 du e^{-ikru} \\ &= \int_{-1}^1 \cos(kru) du - i \underbrace{\int_{-1}^1 \sin(kru) du}_{=0} \\ &= \frac{1}{kr} \sin(kru) \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \sin(kr)}{k r}.\end{aligned}$$

Stąd ogólna postać transformaty funkcji  $f(r)$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{2}{(2\pi)^2 k} \int_0^{\infty} r f(r) \sin(kr) dr.$$

- 4.(a) Można skorzystać ze wzoru  $(x^n)^\wedge = i^n \delta^{(n)}(k)$  (wzór (8.37) ze skryptu) i wyniku zad.1(c).

- (b) Można skorzystać ze wzoru na transformatę iloczynu dwóch funkcji  $(\varphi_1 \varphi_2)^\wedge(k) = \hat{\varphi}_1(k) \star \hat{\varphi}_2(k)$  (wzór (8.12) ze skryptu -uwaga na błąd, we wzorze w skrypcie nie powinno być czynnika  $\frac{1}{2\pi}$ ), transformatę funkcji  $\sin x$ ,  $(\sin x)^\wedge = \frac{1}{2i} [\delta(k-1) - \delta(k+1)]$ , transformatę funkcji przesuniętej  $(\varphi(x-a))^\wedge = e^{-ika} (\varphi(x))^\wedge(k)$ , skąd obliczamy transformatę funkcji  $\cos x$ ,

$$\begin{aligned}(\cos x)^\wedge(k) &= \left( -\sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right)^\wedge(k) = -e^{-ik\pi/2} (\sin x)^\wedge(k) \\ &= -e^{-ik\pi/2} \frac{1}{2i} [\delta(k-1) - \delta(k+1)] \\ &= -\frac{1}{2i} \left[ e^{-i\pi/2} \delta(k-1) - e^{i\pi/2} \delta(k+1) \right] \\ &= -\frac{1}{2i} [-i\delta(k-1) - i\delta(k+1)] = \frac{1}{2} [\delta(k-1) + \delta(k+1)],\end{aligned}$$

oraz ze wzoru na spłot z deltą przesuniętą o  $a$ ,  $T \star \delta(x - a) = T(x - a)$  (wzór (7.61') w skrypcie).

(c) Por. wskazówka do pkt.(a) i (b); ponadto  $T \star \delta' = T'$  (wzór (7.62) w skrypcie).

(d) Obliczenie jest dość złożone, zalecane jest zapoznanie się z rozwiązaniem.

5. Należy wykonać transformatę Fouriera obu stron równania, korzystając ze wzoru na transformatę pochodnej  $(\varphi^{(n)})^\wedge(k) = (ik)^n \hat{\varphi}(k)$  (wzór (8.1) ze skryptu) sprowadzając równanie różniczkowe do algebraicznego, wyznaczyć  $\hat{\varphi}(k)$ , a następnie obliczyć  $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk} \hat{\varphi}(k) dk$  jako transformatę odwrotną (wzór (8.8) ze skryptu). Obliczenie transformaty odwrotnej wykonuje się, przechodząc do całki zespolonej i korzystając z lematu Jordana.

C12-C13: Transformacja Fouriera: odpowiedzi.

$$1.(a) \hat{f}(k) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k^2+1},$$

$$(b) \hat{f}(k) = \frac{1}{2} e^{-|k|},$$

$$(c) \hat{f}(k) = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(k) e^{-|k|},$$

$$(d) \hat{f}(k) = \frac{1}{4} \left( e^{-|k-1|} + e^{-|k+1|} \right).$$

$$2.(a) \hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi k} R J_1(kR),$$

$$(b) \hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+k^2}}.$$

$$3.(a) \hat{f}(\vec{k}) = \frac{2R}{(2\pi k)^2} \left[ \frac{\sin(kR)}{kR} - \cos(kR) \right],$$

$$(b) \hat{f}(\vec{k}) = \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\alpha^2+k^2}.$$

$$4.(a) \hat{f}(k) = i\delta'(k) + \frac{i}{2} e^{-|k|} \operatorname{sgn}(k),$$

$$(b) \hat{f}(k) = \frac{1}{4} [\delta(k-2) + 2\delta(k) + \delta(k+2)],$$

$$(c) \hat{f}(k) = \frac{1}{2} [\delta'(k-1) - \delta'(k+1)],$$

$$(d) \left[ P \frac{1}{x} \right]^\wedge = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(k).$$

$$5.(a) \varphi(x) = -\frac{1}{4} e^{-2|x|},$$

$$(b) \varphi(x) = \Theta(x) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right).$$

C12-C13: Transformacja Fouriera: rozwiązanie.

1.(a) Rozważmy ogólniejszą transformatę  $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx$ ,  
 $a > 0$ .

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cos(kx) dx}_J - \frac{i}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \sin(kx) dx}_{=0}$$

Druga całka wynosi zero, ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta. Pierwszą całkę obliczamy przez części,

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(kx) dx &= \frac{1}{k} \int e^{ax} (\sin(kx))' dx \\ &= \frac{1}{k} e^{ax} \sin(kx) - \frac{a}{k} \int e^{ax} \sin(kx) dx \\ &= \frac{1}{k} e^{ax} \sin(kx) + \frac{a}{k^2} \int e^{ax} (\cos(kx))' dx \\ &= \frac{1}{k} e^{ax} \sin(kx) + \frac{a}{k^2} e^{ax} \cos(kx) - \frac{a^2}{k^2} \int e^{ax} \cos(kx) dx \\ \Rightarrow \int e^{ax} \cos(kx) dx &= \frac{e^{ax}}{k^2 + a^2} [k \sin(kx) + a \cos(kx)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= \int_{-\infty}^0 e^{ax} \cos(kx) dx + \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx \\ &= \frac{e^{ax}}{k^2 + a^2} [k \sin(kx) + a \cos(kx)] \Big|_{-\infty}^0 \\ &\quad + \frac{e^{-ax}}{k^2 + a^2} [k \sin(kx) - a \cos(kx)] \Big|_0^{\infty} = \frac{2a}{k^2 + a^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{a}{\pi k^2 + a^2}; \quad a = 1 \Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{1}{\pi k^2 + 1}.$$

(b)  $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + 1} dx$ ,

$$\text{res}_{z_1} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} = -\frac{e^{-k}}{2i},$$

$$\text{res}_{z_2} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^k}{2i}.$$

i. Dla  $k < 0$  domykamy kontur  $C$  w górnej półpłaszczyźnie, tylko  $z_2$  leży wewnątrz  $C$ ,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \text{res}_{z_2} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} e^k$$

ii. Dla  $k > 0$  domykamy kontur  $C$  w dolnej półpłaszczyźnie, tylko  $z_1$  leży wewnątrz  $C$ , a kierunek obiegu konturu jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, stąd znak minus,

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \text{res}_{z_1} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} e^{-k}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^k & \text{dla } k \leq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-k} & \text{dla } k > 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-|k|}$$

$$(c) \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ikx}}{x^2+1} dx,$$

$$\text{res}_{z_1} \frac{ze^{-ikz}}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \frac{ze^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-k}}{2},$$

$$\text{res}_{z_2} \frac{ze^{-ikz}}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{ze^{-ikz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^k}{2}.$$

i. Dla  $k < 0$  domykamy kontur  $C$  w górnej półpłaszczyźnie, tylko  $z_2$  leży wewnątrz  $C$ ,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} 2\pi i \text{res}_{z_2} \frac{ze^{-ikz}}{z^2+1} = \frac{i}{2} e^k$$

ii. Dla  $k > 0$  domykamy kontur  $C$  w dolnej półpłaszczyźnie, tylko  $z_1$  leży wewnątrz  $C$ , a kierunek obiegu konturu jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, stąd znak minus,

$$\hat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi} 2\pi i \text{res}_{z_1} \frac{ze^{-ikz}}{z^2+1} = -\frac{i}{2} e^{-k}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \begin{cases} \frac{i}{2}e^k & \text{dla } k \leq 0 \\ -\frac{i}{2}e^{-k} & \text{dla } k > 0 \end{cases} = -\frac{i}{2} \text{sgn}(k) e^{-|k|}$$

$$(d) \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} \cos x}{x^2+1} dx = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(k-1)x}}{x^2+1} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(k+1)x}}{x^2+1} dx \right],$$

Korzystamy z wyniku zad. (b), w którym trzeba dokonać zamiany  $k \rightarrow k \pm 1$ , odpowiednio, skąd

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(k-1)x}}{x^2+1} dx &= \frac{1}{4} e^{-|k-1|} \\ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(k+1)x}}{x^2+1} dx &= \frac{1}{4} e^{-|k+1|} \\ \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{4} (e^{-|k-1|} + e^{-|k+1|}). \end{aligned}$$

$$2.(a) f(r) = \Theta(R-r) \Rightarrow$$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r \Theta(R-r) J_0(kr) dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^R r J_0(kr) dr.$$

$$kr J_0(kr) = \frac{d}{dr} [r J_1(kr)] \Rightarrow r J_0(kr) = \frac{1}{k} \frac{d}{dr} [r J_1(kr)]$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi k} \int_0^R \frac{d}{dr} [r J_1(kr)] dr = \frac{1}{2\pi k} R J_1(kR).$$

$$(b) f(r) = \frac{1}{r} e^{-\alpha r} \Rightarrow$$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha r} J_0(kr) dr = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}.$$

Korzystamy ze związku rekurencyjnego dla funkcji Bessela (wzór (6.27) w skrypcie)  $\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$   
 $\Rightarrow \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(\lambda x)] = \lambda x^\nu J_{\nu-1}(\lambda x)$ ,  
 $\lambda = \text{const}$

Transformata Fouriera sprowadza się do transformaty Laplace'a funkcji  $J_0(kr)$  od argumentu  $\alpha$  (por. zad. 7(a) z funkcji Bessela)

$$3.(a) f(r) = \Theta(R-r) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\vec{k}) &= \frac{2}{(2\pi)^2 k} \int_0^\infty r \Theta(R-r) \sin(kr) dr = \frac{2}{(2\pi)^2 k} \int_0^R r \sin(kr) dr \\ &= \frac{2R}{(2\pi k)^2} \left[ \frac{\sin(kR)}{kR} - \cos(kR) \right]. \end{aligned}$$

$$(b) f(r) = \frac{1}{r} e^{-\alpha r} \Rightarrow$$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{2}{(2\pi)^2 k} \int_0^\infty e^{-\alpha r} \sin(kr) dr = \frac{2}{(2\pi)^2 k} \frac{k}{\alpha^2 + k^2} = \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\alpha^2 + k^2}.$$

Transformata Fouriera sprowadza się do transformaty Laplace'a funkcji  $\sin(kr)$  od argumentu  $\alpha$

$$4.(a)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} \\ &\Rightarrow \hat{f}(k) = i\delta'(k) + \frac{i}{2} e^{-|k|} \operatorname{sgn}(k). \end{aligned}$$

$$(b)$$

$$\begin{aligned} (\cos^2 x)^\wedge(k) &= (\cos x \cos x)^\wedge(k) = (\cos x)^\wedge(k) \star (\cos x)^\wedge(k) \\ &= \frac{1}{2} [\delta(k-1) + \delta(k+1)] \star \frac{1}{2} [\delta(k-1) + \delta(k+1)] \\ &= \frac{1}{4} [\delta(k-1) \star \delta(k-1) + 2\delta(k-1) \star \delta(k+1) + \delta(k+1) \star \delta(k+1)] \\ &= \frac{1}{4} [\delta(k-2) + 2\delta(k) + \delta(k+2)]. \end{aligned}$$

$$(c)$$

$$\begin{aligned} (x \sin x)^\wedge(k) &= \hat{x}(k) \star (\sin x)^\wedge(k) \\ &= i\delta'(k) \star \frac{1}{2i} [\delta(k-1) - \delta(k+1)] \\ &= \frac{1}{2} [\delta'(k-1) - \delta'(k+1)]. \end{aligned}$$

$$(d)$$

$$\begin{aligned} \left( \left[ P \frac{1}{x} \right]^\wedge, \varphi(k) \right) &= \left( P \frac{1}{x}, \hat{\varphi}(x) \right) \\ &= \underbrace{\int_{|x|>1} \frac{\hat{\varphi}(x)}{x} dx}_{I_1} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(0)}{x} dx}_{I_2} + \hat{\varphi}(0) \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1} \frac{dx}{x}}_{=0} \end{aligned}$$

Ponieważ  $\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ixk} \varphi(k) dk$ , to  $\hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(x=0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(k) dk$ , stąd

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\varepsilon < |x| < 1} dx \frac{1}{x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{-ixk} - 1) \varphi(k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \varphi(k) \left\{ \underbrace{\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 dx \frac{\cos(kx) - 1}{x}}_{I_1=0} - i \left[ \underbrace{\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 dx \frac{\sin(kx)}{x}}_{I_2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Ostatnia całka wynosi zero, ponieważ całkujemy funkcję nieparzystą na przedziale symetrycznym  $(-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$  w którym funkcja podcałkowa  $1/x$  nie ma osobliwości.

Funkcja  $\sin(kx)/x$  jest parzysta i nieosobliwa w  $x = 0$ , wobec tego można przejść do granicy w  $J_2$  i całka będzie skończona

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_2 = \int_{-1}^1 dx \frac{\sin(kx)}{x}.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|x|>1} dx \frac{1}{x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ixk} \varphi(k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k) \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} dx \frac{\cos(kx)}{x}}_{K_1=0} - i \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x} \right]}_{K_2} \right\}. \end{aligned}$$

$J_1 = 0$ , ponieważ  $\cos(kx) - 1$  jest funkcją parzystą zmiennej  $x$ ,  $1/x$  jest funkcją nieparzystą, więc funkcja podcałkowa  $(\cos(kx) - 1)/x$  jest nieparzysta, a przedział całkowania  $(-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$  jest symetryczny i funkcja podcałkowa nie ma w nim osobliwości.

$K_1 = 0$  (jako całka niewłaściwa obliczana w sensie wartości głównej) ponieważ funkcja podcałkowa  $\cos(kx)/x$  jest nieparzysta, a przedział całkowania  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  jest symetryczny i funkcja podcałkowa nie ma w nim osobliwości.

Ostatecznie

$$\begin{aligned} \left( \left[ P \frac{1}{x} \right]^\wedge, \varphi(k) \right) &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k) \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x} \right] + \int_{-1}^1 dx \frac{\sin(kx)}{x} \right\} \\ &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x}. \quad (\spadesuit) \end{aligned}$$

$$k < 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{kx} k dx = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\pi,$$

$$k > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{kx} k dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

Ostatnią całkę obliczamy, korzystając ze znanej całki  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ . Uwaga. Dokonując zamiany zmiennych  $t = kx \Rightarrow dt = k dx$  należy pamiętać, że dla  $k < 0$  zmieniają się również granice całkowania.

Podstawiając ten wynik do  $(\spadesuit)$  otrzymujemy

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \left( \left[ P \frac{1}{x} \right]^\wedge, \varphi(k) \right) = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(k) \varphi(k) dk \Rightarrow \left[ P \frac{1}{x} \right]^\wedge = -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(k).$$

5.(a) Transformując obustronnie równanie różniczkowe, otrzymujemy

$$-k^2 \hat{\varphi}(k) - 4\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\hat{\varphi}(k) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{k^2 + 4}$$

Odwracając transformate, otrzymujemy

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 + 4} dk.$$

Podobną całkę obliczyliśmy już w zad.1(b). Dokonując podstawienia  $k = 2\kappa$  i korzystając z faktu, że funkcja  $1/(\kappa^2 + 1)$  jest rzeczywista, uzyskujemy (kreska oznacza sprzężenie zespolone)

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(2x)\kappa}}{\kappa^2 + 1} d\kappa \stackrel{\text{zad.1(b)}}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{-|2x|} = -\frac{1}{4} e^{-2|x|}.$$

- (b) Transformując obustronnie równanie różniczkowe, otrzymujemy

$$-k^2 \hat{\varphi}(k) + ik \hat{\varphi}(k) + \hat{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi},$$

$$\hat{\varphi}(k) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{k^2 - ik - 1}.$$

Rozpatrujemy funkcję zespoloną  $f(z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ixz}}{z^2 - iz - 1}$ . Bieguny rzędu pierwszego:

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$\text{res}_{z=z_1} f(z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ixz_1}}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} e^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x}$$

$$\text{res}_{z=z_2} f(z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{ixz_2}}{z_2 - z_1} = -\frac{1}{2\sqrt{3}\pi} e^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x}$$

- (i.) Dla  $x > 0$  rozpatrujemy całkę zespoloną  $\oint_C f(z) dz$  po krzywej zamkniętej, składającej się z odcinka  $(-R, R)$ ,  $R \rightarrow \infty$ , i domykającego półokręgu  $C_R$  w górnej półpłaszczyźnie. Oba bieguny  $z_1, z_2$  zawarte są wewnątrz krzywej  $C$ , na mocy lematu Jordana  $\int_{C_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ , więc dla  $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixk}}{k^2 - ik - 1} dk = -\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{e^{ixz}}{z^2 - iz - 1} dz \\ &= 2\pi i (\text{res}_{z=z_1} f(z) + \text{res}_{z=z_2} f(z)) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} 2i \frac{e^{i\sqrt{3}x/2} - e^{-i\sqrt{3}x/2}}{2i} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \end{aligned}$$

- (ii.) Dla  $x < 0$  domykamy kontur w dolnej półpłaszczyźnie. Ponieważ wewnątrz konturu  $f(z)$  nie ma biegunów,  $\varphi(x) = \oint_C f(z) dz = 0$ .

Ostatecznie

$$\varphi(x) = \Theta(x) \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$



*C14: Szeregi Fouriera**C14: Szeregi Fouriera: treść zadań.*

1. Napisać wykładniczy i trygonometryczny szereg Fouriera dla funkcji okresowych
  - (a)  $f(x) = \sin^3 x$ ,
  - (b)  $f(x) = 1$  dla  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $f(x) = 0$  dla  $x \in \langle 1, 2 \rangle$ ,
  - (c)  $f(x) = x^2$  dla  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ .
2. Rozwinąć w (wykładniczy i trygonometryczny) szereg Fouriera dystrybucje
  - (a)  $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2m - 1)$ ,
  - (b)  $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(x - 4m - 1) - \delta(x - 4m - 2)]$ ,
  - (c)  $f(x) = \delta(\sin x)$ .
3. Napisać skończony szereg Fouriera  $A_\nu$  dla ciągu  $A_n = \delta_{1,n} + \delta_{2,n}$ ,  
 $n, \nu = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

C14: Szeregi Fouriera: wskazówki.

- 1.(a)  $f(x) = \sin^3 x$ , okres periodyczności  $L = 2\pi$ ; przyjmujemy przedział całkowania  $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$  i korzystamy z faktu, że  $f(x)$  jest funkcją nieparzystą oraz że  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = 2\pi\delta_{n,0}$  (całka funkcji okresowej po okresie, z wyjątkiem przypadku  $n = 0$  gdzie mamy całkę z funkcji stałej).

(b)

(c) Korzystamy z faktu, że  $f(x)$  jest parzysta.

- 2.(a) Okres  $L = 2$ , przyjmujemy przedział całkowania  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ .

(b) Okres  $L = 4$ . Zauważmy, że  $f(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x-1)$ , gdzie  $\tilde{f}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 4m - 1)$ . Dla funkcji lub dystrybucji przesuniętej  $T_a \equiv T(x-a)$  o okresie  $L$  współczynniki Fouriera spełniają relację

$$\begin{aligned} c_n^{(T_a)} &= \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+L} T(x-a) e^{-i2\pi n(x/L)} dx = \| y = x-a, dy = dx \| = \\ &= e^{-i2\pi n(a/L)} \frac{1}{L} \int_{\alpha-a}^{\alpha+L-a} T(y) e^{-i2\pi n(y/L)} dy = e^{-i2\pi n(a/L)} c_n^{(T)}, \end{aligned}$$

ponieważ wartość ostatniej całki dla funkcji lub dystrybucji okresowej o okresie  $L$  jest taka sama dla dowolnego przedziału o długości  $L$ .

(c) Korzystamy ze wzoru na złożenie delty Diraca z funkcją  $f(x)$  (wzór (7.69) w skrypcie),  $f(x) = \delta(\sin x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\cos(m\pi)|} \delta(x - m\pi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\pi)$ . Okres  $L = \pi$ , wybieramy przedział całkowania  $x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ .

3. Dla skończonego szeregu Fouriera  $A_n, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  o długości  $N$  współczynnik Fouriera definiujemy jako  $A_\nu = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{-2\pi i \nu n / N}$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots, N-1$  (wzór (9.24) w skrypcie). Stąd  $A_n = \sum_{\nu=0}^{N-1} A_\nu e^{2\pi i \nu n / N}$  (wzór (9.25) w skrypcie).

C14: Szeregi Fouriera: odpowiedzi.

$$1.(a) = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x),$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l+1} e^{i(2l+1)\pi x} = \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sin[(2l+1)\pi x],$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x).$$

$$2.(a) f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\pi x),$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(-i)^n - (-1)^n] e^{in\pi x/2} = \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \cos \left[ (2m+1) \frac{\pi}{2} x \right] + \frac{(-1)^m}{2} \sin \left[ (2m+1) \frac{\pi}{2} x \right] - \cos[(2m+1)\pi x] \right\},$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2nx).$$

$$3. A_n = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} \left[ e^{2\pi i(n-1)v/N} + e^{2\pi i(n-2)v/N} \right].$$

## C14: Szeregi Fouriera: rozwiązania.

## 1.(a) Współczynniki Fouriera

$$\begin{aligned}
c_n^{(f)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \sin^3 x dx = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \sin nx dx \\
&= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} dx \\
&= -\frac{i}{32\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ e^{i(n+3)x} - 3e^{i(n+1)x} + 3e^{i(n-1)x} - e^{i(n-3)x} \right. \\
&\quad \left. - e^{-i(n-3)x} + 3e^{-i(n-1)x} - 3e^{-i(n+1)x} + e^{-i(n+3)x} \right] dx \\
&= -\frac{i}{16} [\delta_{n,-3} - 3\delta_{n,-1} + 3\delta_{n,1} - \delta_{n,3} - \delta_{n,3} + 3\delta_{n,1} - 3\delta_{n,-1} + \delta_{n,-3}] \\
&= -\frac{i}{8} [\delta_{n,-3} - 3\delta_{n,-1} + 3\delta_{n,1} - \delta_{n,3}].
\end{aligned}$$

Szereg Fouriera

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(f)} e^{2\pi i n(x/2\pi)} = -\frac{i}{8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta_{n,-3} - 3\delta_{n,-1} + 3\delta_{n,1} - \delta_{n,3}] e^{inx} \\
&= -\frac{i}{8} (e^{-i3x} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} - e^{i3x}) \\
&= -2i \frac{i}{8} \left( 3 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} - \frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right) = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x).
\end{aligned}$$

## (b) Współczynniki Fouriera

$$\begin{aligned}
n \neq 0 &\Rightarrow c_n^{(f)} = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i\pi n x} dx = \frac{i}{2n\pi} e^{-i\pi n x} \Big|_0^1 = \frac{i}{2n\pi} (e^{-i\pi n} - 1) = \frac{i}{2n\pi} [(-1)^n - 1], \\
n = 0 &\Rightarrow c_0^{(f)} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Widać, że oprócz  $c_0$  współczynniki z  $n$  parzystym są równe zero, więc wykładniczy szereg Fouriera

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l+1} e^{i(2l+1)\pi x}$$

Trygonometryczny szereg Fouriera uzyskujemy albo bezpośrednio obliczając współczynniki Fouriera ze wzorów (9.23a-9.23c) w skrypcie, albo przekształcając powyższy wynik,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \left[ \sum_{l=-1}^{-\infty} \frac{1}{2l+1} e^{i(2l+1)\pi x} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} e^{i(2l+1)\pi x} \right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \left[ -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} e^{-i(2l+1)\pi x} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} e^{i(2l+1)\pi x} \right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sin[(2l+1)\pi x].
\end{aligned}$$

(c) Współczynniki Fouriera

$$\begin{aligned}
 n \neq 0 \Rightarrow c_n^{(f)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 \cos(n\pi x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2x}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) + \left( \frac{x^2}{n\pi} - \frac{2}{n^3 \pi^3} \right) \sin(n\pi x) \right] \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) = \frac{2}{n^2 \pi^2} (-1)^n, \\
 n = 0 \Rightarrow c_0^{(f)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Szereg Fouriera w postaci wykładniczej i trygonometrycznej,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{in\pi x} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{e^{in\pi x} + e^{-in\pi x}}{2} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x).
 \end{aligned}$$

2.(a) Współczynniki Fouriera

$$c_n^{(f)} = \frac{1}{2} \int_0^2 \delta(x-1) e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} e^{-in\pi} = \frac{1}{2} (-1)^n.$$

Szereg Fouriera wykładniczy i trygonometryczny

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{in\pi x} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{in\pi x} + e^{-in\pi x}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\pi x).
 \end{aligned}$$

(b) Korzystając ze wskazówki, dla dystrybucji  $\tilde{f}(x)$ , wybierając przedział całkowania  $x \in \langle 0, 4 \rangle$  mamy

$$c_n^{(\tilde{f})} = \frac{1}{4} \int_0^4 \delta(x-1) e^{-in\pi x/2} dx = \frac{1}{4} e^{-in\pi/2} = \frac{(-i)^n}{4},$$

a dla dystrybucji  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}(x-1)$

$$c_n^{(\tilde{f}_1)} = e^{-in\pi/2} c_n^{(\tilde{f})} = \frac{1}{4} e^{-in\pi} = \frac{(-1)^n}{4}.$$

Wykładniczy szereg Fouriera

$$f(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(-i)^n - (-1)^n] e^{in\pi x/2}$$

Ponieważ  $(-1)^{-n} = (-1)^n$ ,  $(-i)^n = (-1)^n i^n$ ,  $(-i)^{-n} = (-1)^{-n} \frac{1}{i^n} = \frac{(-i)^n}{(-i)^n}$ , trygonometryczny szereg Fouriera przyjmuje

dość skomplikowaną postać  $= (-1)^{-n}(-1)^ni^n = i^n$ ,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [(-1)^ni^n - (-1)^n]e^{in\pi x/2} + [i^n - (-1)^n]e^{-in\pi x/2} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} i^n [(-1)^ne^{in\pi x/2} + e^{-in\pi x/2}] - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{in\pi x/2} + e^{-in\pi x/2}) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{\infty} i^{2l} [(-1)^{2l}e^{i2l\pi x/2} + e^{-i2l\pi x/2}] \\
 &\quad + \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} i^{2l+1} [(-1)^{2l+1}e^{i(2l+1)\pi x/2} + e^{-i(2l+1)\pi x/2}] \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{2l} (e^{i2l\pi x/2} + e^{-i2l\pi x/2}) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{2l+1} [e^{i(2l+1)\pi x/2} + e^{-i(2l+1)\pi x/2}] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \cos(l\pi x) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \sin \left[ (2l+1) \frac{\pi}{2} x \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(l\pi x) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \cos \left[ (2l+1) \frac{\pi}{2} x \right] \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \cos \left[ (2m+1) \frac{\pi}{2} x \right] + \frac{(-1)^m}{2} \sin \left[ (2m+1) \frac{\pi}{2} x \right] - \cos[(2m+1)\pi x] \right\}.
 \end{aligned}$$

(c) Współczynniki Fouriera

$$c_n^{(f)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta(x) e^{-2inx} dx = \frac{1}{\pi}.$$

Szereg Fouriera wykładniczy i trygonometryczny

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2inx} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2inx} + e^{-2inx}}{2} \\
 &= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2nx).
 \end{aligned}$$

3.

$$A_v = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} (\delta_{1,n} + \delta_{2,n}) e^{-2\pi i v n / N} = N^{-1} (e^{-2\pi i v / N} + e^{-4\pi i v / N}),$$

stąd i ze wskazówki wynik.

## Notacje i oznaczenia

### Zbiory i liczby

- ◆ Zbiór liczb naturalnych oznaczamy przez  $\mathbb{N}$ .
- ◆ Zbiór liczb całkowitych oznaczamy przez  $\mathbb{Z}$ .
- ◆ Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy przez  $\mathbb{R}$ .
- ◆ Zbiór dodatnich liczb rzeczywistych oznaczamy przez  $\mathbb{R}_+$ .
- ◆ Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez  $\mathbb{C}$ , przy czym

$$z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = (x, y) = x + iy, \text{ gdzie } x, y \in \mathbb{R}.$$

- ◆ Wzór Eulera umożliwia przejście od trygonometrycznej do wykładniczej reprezentacji liczb zespolonych

$$e^{x+iy} = e^x [\cos(y) + i \sin(y)].$$

Przyjmujemy, że  $0 \in \mathbb{N}$ .

Analogicznie dla ujemnych  $\mathbb{R}_-$ .

Mówimy, że  $x$  jest częścią rzeczywistą  $z$ , a  $y$  jej częścią zespoloną i zapisujemy  $x = \Re(z)$  oraz  $y = \Im(z)$ .

Uważany za najpiękniejszy wzór Matematyki:  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ .

### Funkcje specjalne

- ◆ Funkcja gamma Eulera  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ .
- ◆ Funkcja beta Eulera  $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ .

### Transformaty

- ◆ Transformata Laplace'a  $\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ .
- ◆ Odwrotna transformata Laplace'a ???

[Wysokość tabeli do poprawy](#)

Oryginał	Transformata Laplace'a
$h(t) = f(t - a)$	$\tilde{h}(s) = e^{-as} \tilde{f}(s)$
$h(t) = f'(t)$	$\tilde{h}(s) = s \tilde{f}(s) - f(0)$
$h(t) = f''(t)$	$\tilde{h}(s) = s^2 \tilde{f}(s) - s f(0) - f'(0)$

## Wprowadzenie do środowiska Wolfram Mathematica

Poniżej zamieszczamy krótkie wprowadzenie do środowiska Wolfram Mathematica, które często może być pomocnym narzędziem podczas zmagania z zadaniami z metod matematycznych fizyki.

Podstawową jednostką składni w środowisku Mathematica jest komórka. Komórki mogą przyjmować kilka typów, ale dwa najważniejsze z nich to `In[]`, czyli wprowadzany przez użytkownika skrypt oraz `Out[]`, czyli wynik działania `In[]`. Aby wykonać komórkę, w której aktualnie znajduje się kursor należy wcisnąć `[Shift]+[Enter]` lub prawy `[Enter]`.

Nazwy wbudowanych funkcji w języku Wolfram zawsze zaczynają się wielką literą według wzoru

$$\text{NazwaFunkcji}[\text{arg1}, \text{arg2}, \dots]$$

gdzie argumenty funkcji przekazywane są w kwadratowych nawiasach `[]`. Najważniejszym sposobem poznawania funkcjonalności Mathematici jest jej bogata pomoc. Jest to także podstawowe narzędzie pracy w tym środowisku. Pomoc wywołuje się klawiszem `[F1]` wewnątrz aktywnego notatnika, lub, nawet bez aktywnej aplikacji, można sprawdzić jej internetową wersję.

Jako ćwiczenie wprowadzające do środowiska Wolfram Mathematica proponujemy sprawdzić w dokumentacji do czego mogą służyć następujące funkcje

- |                               |                              |                             |
|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| ◆ <code>Plot[]</code>         | ◆ <code>Integrate[]</code> , | ◆ <code>Solve[]</code> ,    |
| ◆ <code>Manipulate[]</code> , | ◆ <code>Table[]</code> ,     | ◆ <code>Graphics[]</code> , |
| ◆ <code>D[]</code> ,          | ◆ <code>ListPlot[]</code> ,  | ◆ <code>Simplify[]</code> . |

Zwracamy uwagę, że każda pojawiająca się w tekście nazwa matematycznej funkcji (np. `D[]`) jest hiperłączem, po kliknięciu w które można przeczytać dokumentację tej funkcji na stronie [reference.wolfram.com/language/](http://reference.wolfram.com/language/). Komórki wyróżnione są wewnątrz notatnika ramką po prawej stronie.

Zauważmy, że te nazwy dość dokładnie precyzują co dana funkcja robi, np. `Series[]` rozwija w szereg, a `Solve[]` rozwiązuje równania. Podstawowa znajomość języka angielskiego pozwala zatem na dość dokładne przewidywanie nazwy funkcji, której funkcjonalność chcielibyśmy uzyskać.

Zauważmy, że te nazwy dość dokładnie precyzują co dana funkcja robi, np. `Series[]` rozwija w szereg, a `Solve[]` rozwiązuje równania. Podstawowa znajomość języka angielskiego pozwala zatem na dość dokładne przewidywanie nazwy funkcji, której funkcjonalność chcielibyśmy uzyskać.

Dostępna, przypomnijmy, pod adresem [reference.wolfram.com/language/](http://reference.wolfram.com/language/)

Zwracamy uwagę na bogactwo przykładów dostępnych w plikach pomocy.



### *Przybornik matematyczny*

Poniżej prezentujemy najważniejsze komendy środowiska Wolfram Mathematica, które mogą być pomocne przy realizacji zadań. Każdą z funkcji krótko komentujemy i ilustrujemy przykładem

◆ fun

### *Literatura*

[1] Alfred Zagórski. *Metody matematyczne fizyki*. Oficyna Wydawnicza PW, 2014.