Zadania *na dłużej* z metod kombinatorycznych w fizyce

Grzegorz Siudem

12 czerwca 2017

Uwaga! Plik jest na bieżąco aktualizowany. Zadania podane poniżej można oddawać do przedostatnich zajęć, tj. do 06.06. Pod zadaniami podaję *zajęte* rozwiązania, punkty otrzymuje tylko pierwszy autor/ pierwsza autorka każdej metody rozwiązania. Zadania mogą, ale nie muszą mieć związek z dotychczasowymi zajęciami (a więc nie zawsze właściwym będzie stosowanie poznanych dotychczas metod, czasami warto zaczekać). Wszystkie zamieszczone tutaj zadania są bardziej wymagające niż te z prac domowych (stąd też brak tygodniowej presji), przy czym $\star$ oznaczam problemy najtrudniejsze, często otwarte. W ich przypadku komplet punktów może przynieść także numerycznie motywowana hipoteza lub wynik częściowy.

1.$\star$ Znajdź wszystkie rekurencje postaci

$$X_n = \frac{1 + a_1 X_{n-1} + \cdots + a_k X_{n-k}}{b_1 X_{n-1} + \ldots b_k X_{n-k}},$$

których rozwiązania są okresowe niezależnie od wyboru początkowych wartości ciągu $X_0, \ldots, X_{k-1}$. [1]

Dotychczasowe rozwiązania:

2. Przeanalizuj problem wież z Hanoi w przypadku gdy mamy 2 pomocnicze pręty. [1]

Dotychczasowe rozwiązania:

3.$\star$ Rozwiąż problem wież z Hanoi w ogólnym przypadku gdy mamy k pomocniczych prętów. [1]

Dotychczasowe rozwiązania:

4. Załóżmy, że Flawiusz spostrzegł, że znajduje się na pozycji j, ale ma możliwość wybrania parametru eliminacji q, tak, że eliminowana jest co q-ta osoba. Czy zawsze może się uratować? [1]

Dotychczasowe rozwiązania:

5.$\star$ Czy wszystkie prostokąty $1/k$ na $1/(k+1)$ dla $k \geqslant 1$ mogą pokryć kwadrat o boku 1? Najpierw wykaż, że suma ich pól równa jest 1. [1]

Dotychczasowe rozwiązania:

6. Samoopisujący się ciąg S. Golomba $\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ jest jedynym niemalejącym ciągiem liczb naturalnych (bez zera) spełniającym warunek, że ciąg ten zawiera dokładnie f_k wystąpień liczb k dla każdego k. Dla przykładu $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 3$, $f_6 = 4$, itd. Wykaż, że

a) $g(n) = \sum_{k=1}^{n} f_k$,

b) $g(g(n)) = \sum_{k=1}^{n} k f_k$,

c) $g(g(g(n))) = \frac{1}{2} n g(n) \left(g(n) + 1\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} g(k) \left(g(k) + 1\right)$.

gdzie $g(n)$ jest największą liczbą całkowitą m taką, że $f_m = n$.[1]

Dotychczasowe rozwiązania:

7.⋆ Proces Yule'a [2] opisany jest przez następujące równania rekurencyjne

$$
\begin{aligned}
(t+1)P_{t+1}(1) &= tP_t(1) + 1 - \frac{m}{m+1} P_t(1), \quad k = 1, \\
(t+1)P_{t+1}(k) &= tP_t(k) + \frac{m}{m+1}(k-1)P_t(k-1) - \frac{m}{m+1} k P_t(k), \quad k > 1,
\end{aligned}
$$

gdzie $m \in \mathbb{N}$ jest parametrem. Rozwiąż ten układ. Jak rozwiązania zależą od parametru m? Jaka jest ich asymptotyka?

Dotychczasowe rozwiązania:

8. Oblicz wartość poniżej całki

$$
S_n(K) = \int\limits_{[0,2\pi]^K} \left(\sum_{k=1}^{K} \cos\theta_k \right)^n d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_K,
$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, a $K = 1, 2, 3, \ldots$.

Dotychczasowe rozwiązania:

9.⋆ Znajdź ogólne wyrażenie na $n \mod k$, podobne do tego z zadania 3.10 z pracy domowej.

Dotychczasowe rozwiązania:

10. Oblicz sumy $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor n/2^k + \frac{1}{2} \rfloor$ oraz $T_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \lfloor n/2^k + \frac{1}{2} \rfloor^2$

Dotychczasowe rozwiązania:

11.⋆ Niech x będzie liczbą rzeczywistą nie mniejszą niż $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Uzasadnij, że rozwiązanie rekurencji

$$
\begin{aligned}
Z_0(x) =& x, \\
Z_n(x) =& Z_{n-1}(x)^2 - 1, \quad n > 0,
\end{aligned}
$$

można zapisać jako $Z_n(x) = \lceil [f(x)]^{2^n} \rceil$, jeśli x jest liczbą całkowitą i $f(x) = \lim_{n\to\infty} [Z_n(x)]^{1/2^n}$, ponieważ w tym przypadku $Z_n(x) - 1 < [f(x)]^{2^n} < Z_n(x)$. Jakie inne ciekawe własności ma funkcja f? [1]

Dotychczasowe rozwiązania:

12. Oblicz sumę $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k k}{4k^2 - 1}$. [1]

Dotychczasowe rozwiązania: PG: rozbicie na ułamki proste
ŁG: dowód indukcyjny.
PB: metoda repertuaru.

13.$\star$ Na zajęciach obliczyliśmy na wiele sposobów sumę $\sum_{k=1}^{n} k^m$ dla $m = 2$. Czy istnieje ogólny wzór dla $m \in \mathbb{N}$? Jak zależy on od m? Co z przypadkiem rzeczywistych m?

Dotychczasowe rozwiązania:

14. Wykaż, że dla $m > 2$ rozwiązaniem rekurencji

$$X_0 = m,$$
$$X_n = X_{n-1}^2 - 2, \quad n > 0,$$

jest $X_n = \lceil \alpha^{2^n} \rceil$, gdzie $\alpha + \alpha^{-1} = m$ i $\alpha > 1$. Ile wynosi α dla $m = 1, 2, 3, \ldots$?[1]
Dotychczasowe rozwiązania:

15.$\star$ W zadaniach domowych pomyliłem się, wpisując w 2.3 następującą treść: *Znajdź zwartą postać* $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^k$ *za pomocą metody repertuaru*, gdzie powinno być oczywiście k^2 zamiast 2^k. Czy można skonstruować repertuar, umożliwiający policzenie tej *pomylonej* sumy?

Dotychczasowe rozwiązania:
PB: metoda repertuaru.

16. Udowodnij prawdziwość wzoru $a(p) = 2^{p-1}$ dla liczb pierwszych p dla ciągu `A005179`.
Dotychczasowe rozwiązania:

17.$\star$ Czy istnieje (i jaką ma postać) uogólnienie wzoru z zadania 16 dla dowolnej liczby p?

Dotychczasowe rozwiązania:

18. Znajdź zwartą postać dla

$$\sum_{k=0}^{n} (-4)^k \binom{n+k}{2k}.$$

Dotychczasowe rozwiązania:

`CDN...`

Literatura

[1] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*,PWN, Warszawa (1998).

[2] A. Fronczak, P. Fronczak, *Świat sieci złożonych*, PWN, Warszawa (2009).