Prace domowe z z metod kombinatorycznych w fizyce

Grzegorz Siudem

12 czerwca 2017

Uwaga! Plik jest na bieżąco aktualizowany. Po każdych zajęciach należy rozwiązać i oddać w terminie dowolne, wybrane przez siebie zadania, przy czym, nie można za każdy taki zestaw otrzymać więcej niż 10 punktów. Zadania, w zależności od stopnia trudności, warte są 1, 2 lub 4 punkty[1].

1 Zajęcia wprowadzające 21.02 `[termin oddania: ostatnie zajęcia]`

1.1 **(2p.)** Niech L_n oznacza maksymalną liczbę kawałków pizzy[2], możliwych do uzyskania w n prostolinijnych cięciach. Uzasadnij, że L_n spełnia poniższe równanie rekurencyjne

$$\begin{aligned} L_0 &= 1; \\ L_n &= L_{n-1} + n, \quad n > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

`[zadanie inspirowane rozdziałem 1.2 w [6]]`

1.2 **(2p.)** Rozwiąż pizzowe równanie (1).

`[zadanie inspirowane rozdziałem 1.2 w [6]]`

1.3 **(2p.)** Problem Józefa Flawiusza[3]: niech n, ponumerowanych od 1 do n osób ustawi się w kółko. W każdym ruchu eliminujemy z kółka co drugą osobę, zaczynając od 2, wygrywa ostatnia osoba pozostająca w grze, której numer oznaczamy przez J_n. Na przykład dla $n = 10$ porządek eliminowania to 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9. Grę wygrywa numer $J_n = 5$. Udowodnij, że J_n spełnia poniższą rekurencję

$$\begin{aligned} J_1 &= 1; \\ J_{2n} &= 2J_n - 1, \quad n > 0, \\ J_{2n+1} &= 2J_n + 1, \quad n > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

`[zadanie inspirowane rozdziałem 1.3 w [6]]`

1.4 **(2p.)** Napisz skrypt, który na podstawie (2) wygeneruje pierwszych 100 liczb J_n .

`[zadanie inspirowane rozdziałem 1.3 w [6]]`

[1] Zadania z pierwszej serii, na dobry początek, punktowane są podwójnie.

[2] Zakładamy, że nasza pizza pokrywa całą płaszczyznę $\mathbb{R}^2$.

[3] Po drastyczne historyczne tło tego problemu odsyłam do rozdziału 1.3 w [6] i cytowanej tam literatury.

1.5 **(2p.)** Modyfikacja problemu wież z Hanoi: zachowując zasadę przekładania krążków, znajdź najkrótszą sekwencję ruchów przekładających wieżę o n krążkach z pręta `A` na pręt `B`, jeśli bezpośrednie ruchy między prętami `A` i `B` są zabronione, a zatem każdy ruch musi zaczynać się lub kończyć na pręcie `C`.

`[zadanie 1.2 w [6]]`

1.6 **(4p.)** Niech $H_n = J_{n+1} - J_n$, gdzie J_n dane są rekurencją (2). Zauważmy, że $H_{2n} = 2$, a $H_{2n+1} = 2H_n - 2$ (to drugie uzasadnij). A zatem, na mocy indukcji matematycznej $H_n = 2$ dla wszystkich n, co, jak łatwo sprawdzić, nie jest prawdą. Gdzie tkwi błąd tego rozumowania?

`[zadanie 1.7 w [6]]`

1.7 **(4p.)** Podwójna wieża z Hanoi składa się z $2n$ krążków, n różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. Reguły przesuwania nie zmieniają się, ale nie rozróżniamy krążków o tym samym rozmiarze. Ile ruchów trzeba wykonać aby przenieść wieżę z jednego pręta na drugi?

`[zadanie 1.11 w [6]]`

1.8 **(4p.)** Uogólnijmy zadanie 1.7 zakładając, że mamy n różnych rozmiarów krążków, przy czym m_k krążków o rozmiarze k. Oblicz minimalną liczbę ruchów $A(m_1, \ldots, m_n)$ potrzebną do przeniesienia wieży przy zachowaniu reguł przenoszenia z zadania 1.7.

`[zadanie 1.12 w [6]]`

1.9 **(4p.)** Wyznacz równanie rekurencyjne dla problemu Józefa Flawiusza (por. zadanie 1.3), gdy interesuje nas numer I_n, przedostatniej osoby usuwanej z gry.

`[zadanie 1.15 w [6]]`

1.10 **(8p.)** Rozwiąż rekurencję Józefa Flawiusza (2).

`[zadanie inspirowane rozdziałem 1.3 w [6]]`

1.11 **(8p.)** Modyfikacja problemu Józefa Flawiusza (por. zadanie 1.3): Załóżmy, że w kręgu stoi $2n$ osób. Pierwsze n stanowią *dobrzy*, a drugie n *źli*. Pokaż, że dla każdego n można dobrać takie m (zależne od n), że przy eliminowaniu co m-tej osoby wszystkie złe osoby wyeliminujemy jako pierwsze. Na przykład gdy $n = 3$ wówczas $m = 5$, gdy $n = 5$, $m = 30$.

`[zadanie 1.21 w [6]]`

1.12 **(8p.)** Źli dworzanie planowali zamach na dobrego sułtana, zatruwając jedną z 1001 stągwi z winem, jakie posiadał. Trucizna jest tak dobrana, że nie ma na nią lekarstwa, a osoba, która ją wypije umiera, niczego się wcześniej nie spodziewając, dopiero po 100 dniach. Spisek wyszedł na jaw, a dworzanie odpowiedzialni za jego przygotowanie pojmani. Sułtan nie chce wylewać 1000 niezatrutych stągwi, ani też czekać dłużej niż 100 dni, na to, żeby napić się swojego ulubionego trunku. Zdecydował więc dać do picia wino ze stągwi pojmanym spiskowcom, tak, żeby po 100 dniach, patrząc którzy z nich przeżyli wywnioskować z pewnością, która stągiew jest zatruta. Rozwiązanie naiwne wymaga 1001 dworzan, ale nadworny mag podpowiedział sułtanowi, że do jednoznacznej identyfikacji wystarczy w zupełności 10 dworzan czekających w lochu. Udowodnij, że mag ma rację. Problem jest czysto kombinatoryczny, rozwiązania sugerujące wyciągnięcie informacji od więźniów nie będą uznawane.

`[zasłyszane]`

2 Sumy I 28.02 `[termin oddania: 07.03]`

2.1 **(1p.)** Uprość wyrażenie $x\left([x>0]-[x<0]\right)$.

`[zadanie 2.2 w [6]]`

2.2 **(1p.)** Wyznacz wartość sumy $\sum_k [1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n]$, w zależności od j i n.

`[zadanie 2.5 w [6]]`

2.3 **(1p.)** Znajdź zwartą postać $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$ za pomocą metody repertuaru.

`[zadanie 2.13 w [6]]`

2.4 **(1p.)** Zastosuj metodę zaburzeń do sumy $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

`[zadanie inspirowane rozdziałem 2.3 w [6]]`

2.5 **(1p.)** Wyraź przez liczby harmoniczne H_n sumę $\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j}$.

`[zadanie inspirowane rozdziałem 2.4 w [6]]`

2.6 **(2p.)** Stosując metodę czynnika sumacyjnego rozwiąż rekurencję

$$\begin{aligned} T_0 &= 5; \\ 2T_n &= nT_{n-1} + 3n! \quad n > 0. \end{aligned}$$

`[zadanie 2.19 w [6]]`

2.7 **(2p.)** Oblicz za pomocą metody zaburzeń sumy $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$ i $T_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k$.

`[część zadania 2.21 w [6]]`

2.8 **(2p.)** Stosując metodę zaburzeń do sumy $\sum_{k=0}^{n} kH_k$ wyprowadź wzór na $\sum_{k=0}^{n} H_k$.

`[zadanie 2.20 w [6]]`

2.9 **(2p.)** Wyprowadź tożsamość Lagrange'a (bez użycia indukcji)

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2,$$

wyprowadzając ogólniejszy wzór dla sumy podwójnej

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)\left(A_j B_k - A_k B_j\right).$$

`[zadanie 2.22 w [6]]`

2.10 **(4p.)** Funkcja zeta Riemanna, zdefiniowana jest jako $\zeta(k) = \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^k$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1.$$

`[zadanie 2.31 w [6]]`

2.11 **(4p.)** Niech $a \dot{-} b = \max(0, a - b)$. Wykaż, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min(k, x \dot{-} k) = \sum_{k=0}^{\infty} (x \dot{-} (2k+1)),$$

dla dowolnej rzeczywistej liczby $x \geqslant 0$. Wyraź tę sumę w postaci zwartej.

`[zadanie 2.32 w [6]]`

2.12 **(4p.)** Udowodnij twierdzenie Goldbacha.

$$\sum_{k \in P} \frac{1}{k-2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \cdots = 1,$$

gdzie P jest zbiorem *potęg doskonałych* zdefiniowanych rekurencyjnie

$$P = \{m^n | m \geqslant 2, \;\; n \geqslant 2, \;\; m \notin P\}.$$

`[zadanie 2.35 w [6]]`

3 Sumy II, podłoga i sufit I 07.03 `[termin oddania: 14.03]`

3.1 **(1p.)** Oblicz wyrażenie $\lfloor \lfloor m\alpha \rfloor n/\alpha \rfloor$, gdy m i n są liczbami naturalnymi, a $\alpha > n$ liczbą niewymierną.

`[zadanie 3.3 w [6]]`

3.2 **(1p.)** Udowodnij, że $x^{\underline{m}}/(x-n)^{\underline{m}} = x^{\underline{n}}/(x-m)^{\underline{n}}$, o ile żaden z mianowników nie jest zerem.

`[zadanie 2.16 w [6]]`

3.3 **(1p.)**Udowodnij zasadę szufladkową Dirichleta: jeśli wkładamy do m pudełek n przedmiotów to wtedy pewne pudełko zawiera co najmniej $\lceil n/m \rceil$ przedmiotów i pewne zawiera ich co najwyżej $\lfloor n/m \rfloor$.

`[zadanie 3.8 w [6]]`

3.4 **(1p.)**Znajdź warunek konieczny i dostateczny, by dla dodatnich liczb całkowitych n zachodziła równość $\lceil nx \rceil = n\lceil x \rceil$. Warunki powinny zawierać $\{x\}$.

`[zadanie 3.5 w [6]]`

3.5 **(1p.)** Wykaż, że wyrażenie $\left\lceil \frac{2x+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{2x+1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2x+1}{2} \right\rfloor$ jest zawsze równe albo $\lfloor x \rfloor$ albo $\lceil x \rceil$.

`[zadanie 3.10 w [6]]`

3.6 **(2p.)** Rozwiąż rekurencję

$$\begin{aligned} X_n &= n, & 0 \leqslant n < m, \\ X_n &= X_{n-m} + 1, & n \geqslant m. \end{aligned}$$

`[zadanie 3.7 w [6]]`

3.7 **(2p.)**Udowodnij, że równość $\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor$ zachodzi dla wszystkich liczb całkowitych n i dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych m.

`[zadanie 3.12 w [6]]`

3.8 **(2p.)**Niech α i β będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że zbiory z powtórzeniami $\mathrm{Spec}(\alpha)$ i $\mathrm{Spec}(\beta)$ tworzą podział zbioru liczb całkowitych dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy α i β obie są niewymierne i spełniają relację $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

`[zadanie 3.13 w [6]]`

3.9 **(2p.)**Czy prawdą jest, że $(x \mod ny) \mod y = x \mod y$, gdzie n jest liczbą całkowitą?

`[zadanie 3.14 w [6]]`

3.10 **(4p.)**Udowodnij, że $n \mod 2 = (1 - (-1)^n)/2$. Znajdź i udowodnij podobne wyrażenie dla $n \mod 3$, gdzie prawda strona jest postaci $a + b\omega^n + c\omega^{2n}$, a ω jest liczbą zespoloną $(-1 + i\sqrt{3})/2$. *Wskazówka:* $\omega^3 = 1$ i $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

`[zadanie 3.16 w [6]]`

3.11 **(4p.)** Wylicz sumę $\sum_{k=0}^{m} \lfloor x + k/m \rfloor$, gdzie $x \geqslant 0$, przez wstawienie sumy $\sum_j [1 \leqslant j \leqslant x + k/m]$ zamiast $\lfloor x + k/m \rfloor$ i wysumowanie względem k.

`[zadanie 3.17 w [6]]`

3.12 **(4p.)**Znajdź warunek konieczny i dostateczny na to, żeby liczba rzeczywista $b > 1$ spełniała równość $\lfloor \log_b x \rfloor = \lfloor \log_b \lfloor x \rfloor \rfloor$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \geqslant 1$.

`[zadanie 3.19 w [6]]`

4 Podłoga i sufit II 14.03 `[termin oddania: 21.03]`

Uwaga! Ze względu na opóźnione wrzucenie zadań dodałem do każdego 1 punkt gratis.

4.1 **(2p.)** Znajdź wzory funkcji, które dodatniej liczbie rzeczywistej przyporządkowują najbliższą jej liczbę całkowitą, a ponadto spełniają relacje $f(n + 1/2) = n$ albo $f(n + 1/2) = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

`[zadanie 3.1 w [6]]`

4.2 **(2p.)**Udowodnij *zasadę szufladkową Dirichleta*: jeśli n cząstek może przyjąć *pewne* wartości energii spośród m dopuszczalnych stanów to istnieje stan energetyczny, do którego należy co najmniej $\lfloor n/m \rfloor$ oraz taki do którego należy co najwyżej $\lceil n/m \rceil$.

`[ufizycznione zadanie 3.8 w [6]]`

4.3 **(2p.)**Wyznacz (i udowodnij) wzór na liczbę liczb całkowitych zawartych w przedziale $[A, B)$.

`[rozdział 3 w w [6]]`

4.4 **(2p.)**(inne kasyno, dlaczego?) Jak wiele liczb postaci 2^m dla $1 \geqslant m \geqslant \mathcal{M}$ zaczyna się w zapisie dziesiętnym od cyfry 1?

`[zadanie 3.21 w [6]]`

4.5 **(2p.)**Pokaż, że n-ty wyraz ciągu $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$, w którym liczba m występuje dokładnie m razy jest równy $\lfloor\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\rfloor$.

`[zadanie 3.23 w [6]]`

4.6 **(3p.)**W zadaniu 3.8 dowodziliśmy interesującej własności dwóch zbiorów z powtórzeniami $\mathrm{Spec}(\alpha)$ i $\mathrm{Spec}\,(\alpha/(\alpha-1))$, gdzie α było dowolną liczbą niewymierną większą niż 1. Znajdź i udowodnij jaką ciekawą własność spełniają zbiory z powtórzeniami $\mathrm{Spec}(\alpha)$ i $\mathrm{Spec}\,(\alpha/(\alpha{+}1))$.

`[zadanie 3.24 w [6]]`

4.7 **(3p.)**Rozstrzygnij czy prawdą jest, że tzw. liczby Knutha, czyli rozwiązania rekurencji

$$\begin{aligned} K_0 &= 1, \\ K_{n+1} &= 1 + \min\left(2K_{\lfloor n/2\rfloor}, 3K_{\lfloor n/3\rfloor}\right), \end{aligned}$$

spełniają relację $K_n \geqslant n$. `[zadanie 3.25 w [6]]`

4.8 **(3p.)**Rozwiąż rekurencję

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + \lfloor\sqrt{a_{n-1}}\rfloor. \end{aligned}$$

`[zadanie 3.28 w [6]]`

4.9 **(3p.)** Czy jest prawdą, że $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + \lfloor x+y\rfloor \geqslant \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 2y\rfloor$?

`[zadanie 3.31 w [6]]`

4.10 **(5p.)** Uprość wyrażenie $\lfloor (n+1)^2 n! e\rfloor \mod n$.

`[zadanie 3.35 w [6]]`

4.11 **(5p.)** Niech $f(n) = \sum_{k=1}^{n}\lceil \lg k\rceil$, gdzie $\lg = \log_2$. Znajdź zwartą postać $f(n)$ dla $n \geqslant 1$, udowodnij poniższe równanie funkcyjne

$$f(n) = n - 1 + f(\lceil n/2\rceil) + f(\lfloor n/2\rfloor).$$

`[zadanie 3.34 w [6]]`

4.12 **(5p.)**Zakładając, że $n \in \mathbf{N}$ znajdź zwartą postać sumy

$$\sum_{k=1}^{2^{2^n}} \frac{1}{2^{\lfloor \lg k \rfloor} 4^{\lfloor \lg \lg k \rfloor}},$$

gdzie $\lg = \log_2$.

`[zadanie 3.36 w [6]]`

5 Teoria liczb I 21.03 `[termin oddania: 28.03]`

5.1 **(1p.)** Wyznacz pierwszych 100 wyrazów ciągu, którego n-ty element jest najmniejszą liczbą naturalną mającą dokładnie n dzielników (program mile widziany).

`[zadanie 4.1 w [6]]`

5.2 **(1p.)** Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(m, n) \cdot \mathrm{NWW}(m, n) = m \cdot n$.

`[zadanie 4.2 w [6]]`

5.3 **(1p.)**Niech $\pi(x)$ oznacza liczbę liczb pierwszych nieprzekraczających x. Czy to prawda, że $\pi(x) - \pi(x-1) = [\text{x jest pierwsza}]$?

`[zadanie 4.3 w [6]]`

5.4 **(1p.)**Znajdź proste wzory na L^n i P^n.

`[zadanie 4.5 w [6]]`

5.5 **(1p.)** Co by się zmieniło, gdybyśmy konstrukcję Sterna-Brocota rozpoczęli od pięciu ułamków $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{0}{-1}, \frac{-1}{0}, \frac{0}{1}\right)$ zamiast $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right)$.

`[zadanie 4.4 w [6]]`

5.6 **(2p.)** Jak można poprawić wzór z zadania 4.3?

`[zadanie 4.3 w [6]]`

5.7 **(2p.)**Ile wynosi suma odwrotności pierwszych n liczb Euklidesa?

`[zadanie 4.16 w [6]]`

5.8 **(2p.)**Naturalna liczba n nazywa się liczbą bezkwadratową jeśli nie jest podzielna przez m^2 dla jakiegokolwiek $m > 0$. Używając reprezentacji wykładniczej znajdź warunek konieczny i dostateczny na to, żeby n było bezwkadratowe.

`[zadanie 4.13 w [6]]`

5.9 **(2p.)**Rozstrzygnij prawdziwość poniższych relacji

- $\mathrm{NWD}(km, kn) = k\mathrm{NWD}(m, n)$,
- $\mathrm{NWW}(km, kn) = k\mathrm{NWW}(m, n)$,

`[zadanie 4.14 w [6]]`

5.10 **(4p.)** Narysuj (na komputerze) konstrukcję Sterna-Brocota z zadania 5.5.

5.11 **(4p.)** Niech f_n będzie n-tą liczbą Fermata $2^{2^n}+1$. Udowodnij, że $f_m \perp f_n$ dla $m \neq n$.

`[zadanie 4.17 w [6]]`

5.12 **(4p.)**Wykaż, że jeśli 2^n+1 jest liczbą pierwszą to n musi być potęgą 2.

`[zadanie 4.18 w [6]]`

6 Teoria liczb II 28.03 `[termin oddania: 04.04]`

6.1 **(1p.)** Pokaż, że liczba $(3^{77}-1)/2$ jest nieparzysta i złożona.

`[zadanie 4.10 w [6]]`

6.2 **(1p.)**Wyznacz macierzową reprezentację przesunięcia L

`[dyskusja w rozdziale 4.5 w [6]]`

6.3 **(1p.)**Wyznacz macierzową reprezentację przesunięcia P

`[dyskusja w rozdziale 4.5 w [6]]`

6.4 **(1p.)**Liczba naturalna jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3. Udowodnij tę własność.

`[zadanie 4.13 w [6]]`

6.5 **(1p.)**Całkowita liczba dodatnia n nazywa się *bezkwadratową*gdy nie jest podzielna przez m^2 dla dowolnego $m > 1$. Narysuj wykres $b(n)/n$, gdzie $b(n)$ to liczba liczb bezkwadratowych mniejszych niż n.

6.6 **(2p.)** Liczba 1111111111111111111 jest pierwsza. Udowodnij, że dla każdej podstawy systemu liczbowego b liczba $(11\ldots1)_b$ może być pierwsza tylko wtedy gdy liczba jedynek jest pierwsza.

`[zadanie 4.22 w [6]]`

6.7 **(2p.)**Początek reprezentacji Sterna-Brocota liczby π wygląda następująco:

$$\pi = P^3L^7P^{15}LP^{292}LPLP^2LP^3LP^{14}L^2P\cdots,$$

Wykorzystaj to wyrażenie do znalezienia możliwe prostych wymiernych przybliżeń π, których mianowniki są mniejsze niż 50.

`[zadanie 4.28 w [6]]`

6.8 **(2p.)**Udowodnij, że jeśli $a \perp b$ i $a > b$ to $NWD(a^m-b^m, a^n-b^n) = a^{NWD(m,n)} - b^{NWD(m,n)}$

`[zadanie 4.13 w [6]]`

6.9 **(2p.)** Oblicz, z wykorzystaniem komputera (sugeruję Mathematikę), $1000! \mod 10^{250}$.

`[zadanie inspirowane 4.54 w [6]]`

6.10 **(4p.)** Pokaż, że jeśli średnia liczba orłów uzyskanych w rzutach pewną niewyważoną monetą wynosi 0.316 to musiano wykonać co najmniej 19 rzutów. Załóżmy, że jeśli wyrzucono m orłów w n rzutach to $m/n \in [0.3155, 0.3165]$.

`[zadanie 4.44 w [6]]`

6.11 **(4p.)** Liczba 9376 ma ciekawą własność reprodukcji przy podnoszeniu do kwadratu

$$9376^2 = 87909376.$$

Ile spośród 4-cyfrowych liczb x spełnia równanie $x^2 \mod 10000 = x$? Ile spośród n-cyfrowych liczb x spełnia $x^2 \mod 10^n = x$?

`[zadanie 4.45 w [6]]`

6.12 **(4p.)** Pokaż, że

$$\left(\prod_{k=1}^{2n-1} k^{\min(k,2n-k)}\right) / \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)^{2n-2k-1}\right),$$

jest potęgą dwójki.

`[zadanie 4.56 w [6]]`

7 Dynamika symboliczna & symbol dwumianowy 04.04 `[termin oddania: 11.04]`

7.1 **(1p.)** Oblicz wartość $\frac{d}{dr}\binom{r}{k}$

7.2 **(1p.)** Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Dla jakich wartości k (i dlaczego?) liczba $\binom{n}{k}$ przyjmuje największą wartość?

`[zadanie 5.2 w [6]]`

7.3 **(1p.)** Oblicz

$$\sum_k \binom{n}{k} (-1)^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n.$$

`[dyskusja w rozdziale 4.5 w [6]]`

7.4 **(1p.)** Udowodnij przedstawioną na zajęciach ciągową (dla rozwinięcia binarnego) reprezentację przekształcenia piekarza.

`[dyskusja w rozdziale 7 w [3]]`

7.5 **(1p.)** Całkowita liczba dodatnia n nazywa się *bezkwadratową* gdy nie jest podzielna przez m^2 dla dowolnego $m > 1$. Narysuj wykres $b(n)/n$, gdzie $b(n)$ to liczba liczb bezkwadratowych mniejszych niż n.

7.6 **(2p.)** Pokaż, że $\binom{r}{k}$ to wielomian w zmiennej r. Wyznacz współczynniki tego wielomianu.

7.7 **(2p.)** Znajdź zwartą postać dla

$$\sum_{k \geqslant 1} \binom{n}{\lfloor \log_m k \rfloor}.$$

`[zadanie 5.59 w [6]]`

7.8 **(2p.)**Używając przybliżenia Stirlinga oszacuj dla dużych m i n współczynnik dwumianowy $\binom{m+n}{n}$. Co otrzymamy gdy $m = n$?

`[zadanie 5.60 w [6]]`

7.9 **(2p.)** Znajdź wartości własne dla macierzy kota Arnolda. Jakie jest ich znaczenie w kontekście wyżymania kota?

`[rozdział 8.4 w [3]]`

7.10 **(4p.)** Wykonaj animację kota Arnolda.

7.11 **(4p.)** Udowodnij (to co pomachaliśmy rękami na zajęciach), że przesunięcie dla pełnego odwzorowania trójkątnego albo dla rodziny kwadratowej z $\mu = 4$ jest chaotyczne. [2]

7.12 **(4p.)**Pokaż, że dla wszystkich liczb całkowitych $k, n \geqslant 0$ zachodzi $\binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{en}{k}\right)^k$.

`[zadanie 5.80 w [6]]`

8 Model Isinga I & symbol dwumianowy II 11.04 `[termin oddania: 25.04]`

8.1 **(1p.)** Wyprowadź wzór $e^{\pm x} = \cosh(x)\,[1 \pm \tanh(x)]$.

8.2 **(1p.)** Jaka jest przybliżona wartość sumy z zadania 7.3 dla dużych wartości n?

`[zadanie 5.8 w [6]]`

8.3 **(1p.)** Czy może istnieć siatka, dla której nieparzyste współczynniki w rozwinięciu wysokotemperaturowym będą niezerowe? Dlaczego?

8.4 **(1p.)** Znajdź prostą relację wiążącą $\binom{2n-1/2}{n}$ z $\binom{2n-1/2}{2n}$.

`[zadanie 5.17 w [6]]`

8.5 **(1p.)**Narysuj wszystkie zwierzątka o obwodach mniejszych bądź równych 6 dla siatek kwadratowej i kubicznej.

8.6 **(2p.)** Notacja $\sum_{k \leqslant n} \binom{n}{k} 2^{k-n}$ jest niejasna bez znajomości kontekstu. Oblicz tę sumę jako sumę względem k.

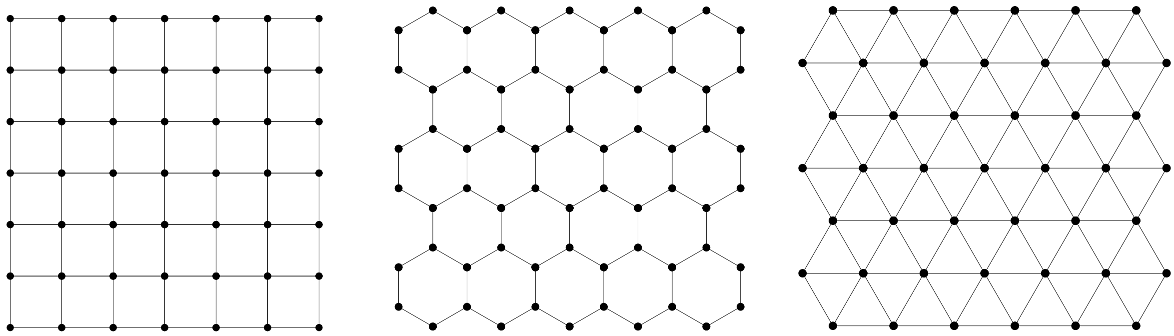
`[zadanie 5.35 w [6]]`

8.7 **(2p.)**Notacja $\sum_{k \leqslant n} \binom{n}{k} 2^{k-n}$ jest niejasna bez znajomości kontekstu. Oblicz tę sumę jako sumę względem n.

`[zadanie 5.35 w [6]]`

8.8 **(2p.)** Pokaż, że podstawienie $J' = 0$ we wzorze Onsagera prowadzi do wyniku dla jednowymiarowego łańcucha.

`[zadanie 13.13 w [8]`



Rysunek 1: Ilustracje rozważanych sieci. Patrząc od lewej – siatka kwadratowa , siatka sześciokątna i siatka trójkątna. W każdym przypadku przedstawione grafy to fragmenty wnętrza rozważanych nieskończonych grafów (z brzegami łączonymi periodycznie).

8.9 **(2p.)** Udowodnij, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych m i n zachodzi

$$\binom{n}{m} = \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor}\binom{n \mod p}{m \mod p} \pmod p$$

`[rozdział 8.4 w [3]]`

8.10 **(4p.)** Narysuj wszystkie zwierzątka o obwodzie mniejszym bądź równym 10 dla siaki kwadratowej.

8.11 **(4p.)** Wyznacz 50 pierwszych wyrażeń rozwinięcia niskotemperaturowego dla energii swobodnej na siatce kwadratowej $(0, 1, 2, 5, 14, \dots)$.

`wskazówka: szukaj na OEIS`

8.12 **(4p.)**Znajdź zwartą postać dla

$$\sum_{k=0}^{n} (-4)^k \binom{n+k}{2k}.$$

`[zadanie 5.63 w [6]]`

9 Model Isinga II 25.04 `[termin oddania: 09.05]`

9.1 **(1p.)** Wykaż, że

$$\operatorname{arcsinh}(1) = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

9.2 **(1p.)** Wykaż, że

$$\operatorname{arcsinh}(3^{-1/2}) = \ln(3).$$

9.3 **(1p.)** Wykaż, że

$$\operatorname{arcsinh}(\sqrt{3}) = \ln(\sqrt{3} + 2).$$

9.4 **(1p.)** Wyraź zmienną niskotemperaturową przez zmienną wysokotemperaturową.

9.5 **(1p.)** Wyraź zmienną wysokotemperaturową przez zmienną niskotemperaturową.

9.6 **(2p.)** Narysuj wszystkie zwierzątka (niskotemperaturowe) o obwodzie mniejszym bądź równym 9 dla siaki trójkątnej.

9.7 **(2p.)** Narysuj wszystkie zwierzątka (niskotemperaturowe) o obwodzie mniejszym bądź równym 9 dla siaki sześciokątnej.

9.8 **(2p.)** Wyznacz pierwsze 5 niezerowych współczynników w niskotemperaturowym rozwinięciu gęstości sumy statystycznej dla modelu Isinga na siatce kwadratowej (ang. *bulk partition function*), czyli

$$\lim_{k\to\infty} (Z_k)^{1/k^2},$$

gdzie Z_k to suma statystyczna na siatce o k^2 węzłach.

9.9 **(2p.)** Wyznacz pierwsze 5 niezerowych współczynników w wysokotemperaturowym rozwinięciu gęstości sumy statystycznej dla modelu Isinga na siatce kwadratowej (ang. *bulk partition function*), czyli

$$\lim_{k\to\infty} (Z_k)^{1/k^2},$$

gdzie Z_k to suma statystyczna na siatce o k^2 węzłach.

9.10 **(4p.)** Napisz skrypt generujący siatki przedstawione na rysunku 1 (i wydrukuj na papierze formatu A4).

9.11 **(4p.)** Rozwiń sumę statystyczną modelu Isinga dla łańcucha w szereg niskotemperaturowy.

9.12 **(4p.)**Rozwiń sumę statystyczną modelu Isinga dla łańcucha w szereg wysokotemperaturowy.

10 Model Isinga III & funkcje tworzące 09.05 `[termin oddania: 16.05]`

10.1 **(1p.)** Przeczytaj ze zrozumieniem rozdział 7 w [6][4].

10.2 **(1p.)** Zastosuj twierdzenia z rozdziału 7.3 w [6] aby znaleźć zwartą postać ciągów z zajęć.

10.3 **(1p.)** Podaj w postaci zwartej funkcję tworzącą dla ciągu $2^n + 3^n$.

`[zadanie 7.2 w [6]]`

10.4 **(1p.)** Ile wynosi $\sum_{n\geqslant 0} \mathcal{H}_n/10^n$

`[zadanie 7.3 w [6]]`

[4] Ocenę otrzymuje się na podstawie deklaracji.

10.5 **(1p.)** Znajdź funkcję tworzącą $S(z)$ taką, że

$$[z^n]S(z) = \sum_k \binom{r}{k}\binom{r}{n-2k}.$$

`[zadanie 7.5 w [6]]`

10.6 **(2p.)** Pokaż, że „prawie losowa“ rekurencja z zajęć może być rozwiązana także przy pomocy metody repertuaru

`[zadanie 7.6 w [6]]`

10.7 **(2p.)** Rozwiąż równanie rekurencyjne

$$g_0 = 1, \quad g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \cdots + ng_0$$

`[zadanie 7.7 w [6]]`

10.8 **(2p.)** Ile wynosi $[z^n]\left(\ln(1-z)\right)^2/(1-z)^{m+1}$?

`[zadanie 7.8 w [6]]`

10.9 **(2p.)** Oblicz sumę $\sum_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k \mathcal{H}_{n-k}$. Wykorzystaj wyniki poprzedniego zadania.

`[zadanie 7.9 w [6]]`

10.10 **(4p.)** Liczby Fibonacciego drugiego rodzaju $\langle \mathfrak{F}_n \rangle$ są zdefiniowane za pomocą równań

$$\mathfrak{F}_0 = 0, \quad \mathfrak{F}_1 = 1, \quad \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_{n-1} + \mathfrak{F}_{n-2} + F_n.$$

Wyraź je przez klasyczne liczby Fibonacciego F_n.

`[zadanie 7.26 w [6]]`

10.11 **(4p.)** Ile wynosi $[w^m z^n]\left(\ln(1+z)\right)/(1-wz)$? `[zadanie 7.33 w [6]]`

10.12 **(4p.)** Znajdź zwartą postać funkcji tworzącej $\sum_{n\geqslant 0} G_n(z)w^n$, jeśli

$$G_n(z) = \sum_{k\geqslant n/m} \binom{n-mk}{k} z^{mk},$$

gdzie $m \in \mathbb{N}$ jest ustalone.

`[zadanie 7.34 w [6]]`

11 Funkcje tworzące II i ich zastosowania 16.05 `[termin oddania: ostatnie zajęcia]`

11.1 **(2p.)** Napisz i uzasadnij graficznie równanie funkcyjne dla ścieżek Motzkina i Schrödera [5].

11.2 **(2p.)** Znajdź zwarty wzór na liczbę ścieżek Dycka.

11.3 **(2p.)** Ekscentryczny fan problemu dimerów $2 \times n$ płaci 4 dolary za każdy pionowy kamień domina i 1 dolara za każdy kamień poziomy. Ile jest konfiguracji wartych dokładnie m dolarów? `[zadanie 7.2 w [6]]`

11.4 **(2p.)** Ile jest możliwych konfiguracji dimerów na grafie pełnym?

11.5 **(2p.)** Rozwiąż równanie funkcyjne dla ścieżek Dycka poprzez ułamek łańcuchowy.

11.6 **(4p.)** Udowodnij twierdzenia z rozdziału 7.3 w [6].

11.7 **(4p.)** Szereg potęgowy $G(z)$ nazywany jest skończenie różniczkowalnym jeśli istnieje skończenie wiele wielomianów $P_0(z), \ldots, P_m(z)$ nie wszystkich zerowych takich, że

$$P_0(z)G(z) + P_1(z)G'(z) + \cdots + P_m(z)G^{(m)}(z) = 0.$$

Ciąg liczb $\langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$ jest wielomianowo rekurencyjny jeśli istnieje skończenie wiele wielomianów $p_0(z), \ldots, p_m(z)$ nie wszystkich zerowych, takich, że

$$p_0(n)g_n + p_1 g_{n+1} + \cdots + p_m(n)g_{m+n},$$

dla wszystkich cłkowitych $n \geqslant 0$. Udowodnij, że funkcja tworząca jest skończenie różniczkowalna wtedy i tylko wtedy gdy jej odpowiadający ciąg współczynników jest wielomianowo rekurencyjny

`[zadanie 7.20 [6]]`

11.8 **(4p.)** Jeśli funkcja tworząca $G(z) = 1/[(1-\alpha z)(1-\beta z)]$ ma rozkład na ułamki częściowe $a/(1-\alpha z) + b/(1-\beta z)$, to jaki rozkład na ułamki częściowe ma $G(z)^n$?

`[zadanie 7.30 [6]]`

11.9 **(4p.)** Wyznacz funkcję generującą dla problemu dimerów na pasku $3 \times n$.

11.10 **(8p.)** Udowodnij, że jeśli szeregi potęgowe $F(z)$ i $G(z)$ są skonczenie różniczkowalne (por. 11.7) to również $F(z) + G(z)$ i $F(z)G(z)$ również są skonczenie różniczkowalne. `[zadanie 7.55 w [6]]`

11.11 **(8p.)** Na ile sposobów można zbudować kolumnę rozmiaru $2 \times 2 \times 2 \times n$ z cegieł rozmiaru $2 \times 1 \times 1$ `[zadanie 7.55 w [6]]`

11.12 **(8p.)** Znajdź zwartą postać ciągu z zadania 11.9.

12 Funkcje tworzące III oraz wielomiany Bella i wzór Faá di Bruno 23.05 `[termin oddania: ostatnie zajęcia]`

Wspomniany na zajęciach wzór Faá di Bruno dla funkcji analitycznych

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{x^k}{k!}, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{x^k}{k!},$$

można wyrazić (por. 3.4 w [1]) jako

$$f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{x^n}{n!}, \quad h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k B_{nk}(g_1, g_2, g_3, \ldots). \tag{3}$$

12.1 **(1p.)** Udowodnij, że

$$B_{nk}(ax_1,\, ax_2,\, ax_3,\, \dots) = a^k B_{nk}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \dots).$$

12.2 **(1p.)** Udowodnij, że

$$B_{nk}(bx_1,\, b^2x_2,\, b^3x_3,\, \dots) = b^n B_{nk}(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \dots).$$

12.3 **(1p.)** Wyznacz w możliwie zwartej postaci tzw. logarytmiczne wielomiany Bella $L_n(g_1,\, g_2,\, \dots)$, czyli współczynniki w rozwinięciu funkcji $\ln\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{x^k}{k!}\right]$.

`[rozdział 3.5 w [1]]`

12.4 **(1p.)** Wyznacz w możliwie zwartej postaci tzw. potęgowe wielomiany Bella $P_n^{(r)}(g_1,\, g_2,\, \dots)$, czyli współczynniki w rozwinięciu funkcji $\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{x^k}{k!}\right]^r$.

`[rozdział 3.5 w [1]]`

12.5 **(1p.)** Udowodnij, że

$$B_{nk}(0,\, 0,\, \dots,\, x_j,\, 0,\, \dots) = [j = n/k \in \mathbb{N}] \frac{(jk)!x_j^k}{k!(j!)^k}.$$

`[równanie [3n'] w [1]]`

12.6 **(2p.)** Wyznacz zwartą postać $\frac{\partial}{\partial x_l} B_{nk}(x_1,\, x_2,\, \dots)$.

12.7 **(2p.)** Udowodnij, że

$$kB_{nk} = \sum_{l=k-1}^{n-1} \binom{n}{l} B_{l,k-1}.$$

`[równanie [3k] w [1]]`

12.8 **(2p.)** Jak postać mają trygonometryczne (dla funkcji sinus i kosinus) analogi wielomianów z zadań 12.3 i 12.4?

12.9 **(2p.)** Wyznacz zwartą postać $B_{nk}(0,\, x_1,\, 0,\, x_2,\, \dots)$.

12.10 **(4p.)** Czemu jest równa suma iloczynów liczb Fibonacciego

$$\sum_{m>0} \sum_{\sum_{i=1}^{m} k_i = n,\, k_i > 0} F_{k_1} F_{k_2} \dots F_{k_m}.$$

`[zadanie 7.29 w [6]]`

12.11 **(4p.)** Znajdź miejsca zerowe pierwszych 5 wielomianów $Y_n(x,\, x,\, x,\, x,\, \dots)$.

12.12 **(4p.)** Udowodnij

$$Y_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} Y_{n-i}(x_1, \dots, x_{n-i}) x_{i+1}.$$

13 Liczby szczególne 30.05 [termin oddania: ostatnie zajęcia]

13.1 **(1p.)** Zidentyfikuj jakie znane liczby można wyrazić przez $B_{n,k}(1, 1, 1, \ldots)$.

13.2 **(1p.)** Zidentyfikuj jakie znane liczby można wyrazić przez $Y_n(1, 1, 1, \ldots)$.

13.3 **(1p.)** Zidentyfikuj jakie znane liczby można wyrazić przez $B_{n,k}(1!, 2!, 3!, \ldots)$.

13.4 **(1p.)** Zidentyfikuj jakie znane liczby można wyrazić przez $B_{n,k}(0!, 1!, 2!, \ldots)$.

13.5 **(1p.)** Zidentyfikuj jakie znane liczby można wyrazić przez $B_{n,k}(1, 2, 3, \ldots)$.

13.6 **(2p.)** Uzasadnij kombinatorycznie równanie rekurencyjne dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju. `[rozdział 6.1 w [6]]`

13.7 **(2p.)** Ile wynosi $\sum_k (-1)^k \left[{n \atop k}\right]$?

`[zadanie 6.11 w [6]]`

13.8 **(2p.)** Wyprowadź i kombinatorycznie uzasadnij wzór rekurencyjny dla liczb Eulera pierwszego rodzaju

`[rozdział 6.2 w [6]]`

13.9 **(2p.)** Wyprowadź i kombinatorycznie uzasadnij wzór rekurencyjny dla liczb Eulera drugiego rodzaju

`[zadanie 6.2 w [6]]`

13.10 **(4p.)** Wykonaj (fizycznie!) eksperyment z kartami (książkami, płytami, kasetami, etc.) Udokumentowany wynik z maksymalnym wychyleniem z co najmniej 10 kart zalicza to zadanie. **Uwaga!** Osoba, której uda się uzyskać najdłuższy maksymalny *nawis* długości x_1 (w długościach cegieł) otrzyma dodatkowe $\lceil 10x_1 \rceil$ punktów. Drugi najlepszy wynik premiowany jest przez $\lceil 5x_2 \rceil$, a trzeci przez $\lceil x_3 \rceil$. Warunkiem koniecznym uzyskania punktów jest obliczenie ich trzech możliwych wartości i dołączenie tych liczb do fotografii dokumentującej eksperyment.

13.11 **(4p.)** Oblicz sumując przez części $S_n = \sum_{k=1}^{n} H_k/k$.

`[zadanie 6.26 w [6]]`

13.12 **(4p.)** Jakie są zwarte postaci dla liczb $\left\{{n \atop 3}\right\}$ $\left[{n \atop 3}\right]$

`[zadanie 6.33 w [6]]`

14 Asymptotyka $ prawdopodobieństwo 6.06 [termin oddania: ostatnie zajęcia]

14.1 **(1p.)** Znajdź funkcję tworzącą dla rozkładu normalnego.

14.2 **(1p.)** Znajdź funkcję tworzącą dla rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$.

14.3 **(1p.)** Znajdź funkcję tworzącą dla rozkładu Poissona.

14.4 **(1p.)** Udowodnij, że $n! = \int_0^\infty e^{-s} s^n ds$.

14.5 **(1p.)** Wyprowadź wersję wzoru Stirlinga dla $\Gamma(z)$.

14.6 **(2p.)** Wyprowadź analog wzoru Stirlinga dla $\binom{an}{n}$, gdzie $a > 0$ to stała

14.7 **(2p.)** Niech $X_1 \sim \text{Poisson}(\mu_1)$ i $X_1 \perp X_2 \sim \text{Poisson}(\mu_2)$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że $aX_1 + X_b 2 = n$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$ są ustalone?
`[zadanie 8.19 w [6]]`

14.8 **(2p.)** Wyznacz asymptotyczne zachowanie liczb Laha $L(aK, K)$, dla $K \gg 1$.

`[zadanie 7.8 w [6]]`

14.9 **(2p.)** Zapisz symbol Newtona $\binom{n}{k}$ w postaci całki zespolonej.

14.10 **(4p.)** Wyprowadź na co najmniej trzy sposoby wzór Stirlinga.
Uwaga! Trzy osoba, które przedstawią najwięcej metod dostaną dodatkowe bonusy w rówpunktowe równe liczbie metod.

14.11 **(4p.)** Posługując się metodą Egoryszewa znajdź zwartą postać sumy

$$S_{n,m} = \sum_{k=n}^{m} (-4)^k \binom{k}{m} \frac{n}{n+k} \binom{n+k}{2k}.$$

`[przykład 1, str. 11 w [4]]`

14.12 **(4p.)** Znajdź zwartą postać dla funkcji tworzącej zmiennej losowej opisującej prawdopodobieństwo, że losowa permutacja n (ustalone) obiektów ma k cykli. Jakie są wartości oczekiwana i wariancja dla liczby cykli.
`[zadanie 8.43 w [6]]`

Literatura

[1] L. Comtet, *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*, Reidel, Dordecht (1974).

[2] R.L. Devaney, *Chaotic Dynamical Systems*, Westview Press, Boulder, Colorado (2003).

[3] J. R. Dorfman *Wprowadzenie do teorii chaosu w nierównowagowej fizyce statystycznej*, PWN, Warszawa (2001).

[4] G.P. Egoryszew, *Integral representation and the Computation of Combinatorial sums* (tłumaczenie z rosyjskiego), American Mathematical Society, Providence (1984).

[5] N. Haug, T. Prellberg, G. Siudem, *Area-width scaling in generalised Motzkin paths*, Physica A, **482**, 611 (2017).

[6] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*,PWN, Warszawa (1998).

[7] B.P. Kitchens, *Symbolic Dynamics*, Springer, Berlin (1998).

[8] R. K. Pathria, P. D. Beale, *Statistical Mechanics*, Elsevier, Amsterdam (2011).