Mathematica jako narzędzie badawcze
Część trzecia.
Wahadło matematyczne w pięciu smakach

I wahadło idzie z czasem.
Stanisław Jerzy Lec

Tematem przewodnim zajęć będzie wahadło matematyczne. Na przykładzie tego modelu mechaniki teoretycznej zajmiemy się rozwiązywaniem równań różniczkowych (ścisłym, numerycznym i przybliżonym), kreśleniem ich portretów fazowych, a także wykonywaniem animacji. Większość zadań z tej części pochodzi z podręcznika [2] lub była tamtejszymi zadaniami inspirowana.

Sugerowane jest, aby przed zajęciami przypomnieć/przyswoić sobie następujące zagadnienia:

- Formalizm Hamiltona i Lagrange'a w mechanice klasycznej([1, 2])
- Schemat Eulera rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych [3].

Przez wahadło matematyczne rozumiemy punktową (bez objętości, momentu bezwładności) cząstkę zawieszoną na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l. Poglądowo przedstawione zostało to na rysunku 1. Równanie różniczkowe, które opisuje wahadło matematyczne ma, we współrzędnych biegunowych postać

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$$

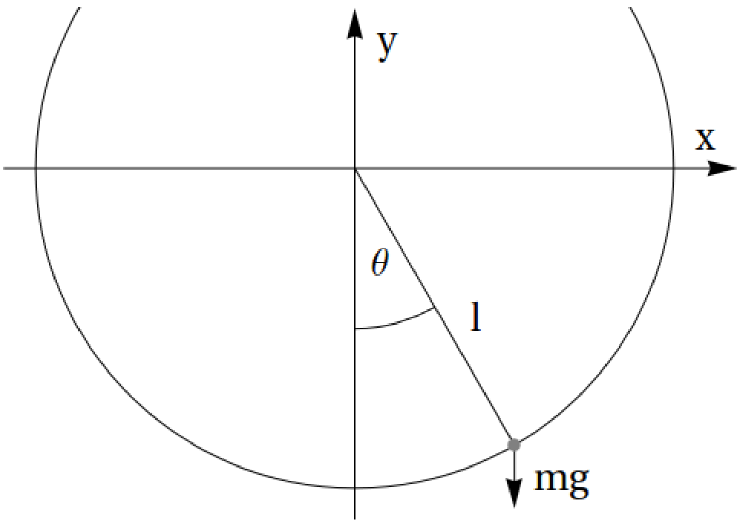
Dodajmy do tego warunki początkowe

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0, \\ \dot{\theta}(0) = \phi_0. \end{cases}$$

W dalszej części, jeśli nie zostanie to zapisane inaczej, będziemy przyjmować $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ oraz $\phi_0 = 0$.

Równanie wahadła można zlinearyzować - zakładając, że dla małych kątów $\theta \ll 1$ spełniona jest zależność $\sin(\theta) \approx \theta$ co prowadzi do równania

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta.$$



Rysunek 1: Wahadło matematyczne.

W obliczeniach proszę przyjąć, że $g = 10\frac{N}{kg}$, a długość nici dowolną z przedziału $l \in (0.1m, 5m)$

Zadanie 1. (rozwiązania numeryczne)

Stosując metodę Eulera (zaimplementowaną z użyciem funkcji `NestList[]`) należy rozwiązać równanie wahadła, wraz z zadanymi warunkami początkowymi. Porównać otrzymany wynik z efektami działania funkcji `NDSolve[]` oraz ścisłym wynikiem (`DSolve[]` albo metoda przewidywań) dla równania zlinearyzowanego. Najlepiej na jednym wykresie. (zadanie dla chętnych: znaleźć w literaturze albo w internecie ścisłe rozwiązanie i sprawdzić jak pasuje do uzyskanych numerycznych wyników)

Uwaga: Metoda Eulera umożliwia rozwiązanie równania pierwszego rzędu. Równanie wahadła jest równaniem rzędu drugiego. Aby wykorzystać sugerowaną metodę należy sprowadzić wyjściowe równanie do równania pierwszego rzędu, rozważając dwie zmienne $\{\theta, \phi\}$, gdzie $\phi = \dot{\theta}$. Proszę pamiętać o odpowiednim dobraniu kroku czasowego i długości wahadła.

Zadanie 2. (dlaczego „krok“ jest tak ważny?)

Sprawdzić jak zmiany kroku czasowego wpływają na wynik otrzymany w zadaniu 1..

Zadanie 3. (portret fazowy)

Należy wygenerować portret fazowy dla wahadła matematycznego. W tym celu sugeruję przemnożyć wyjściowe równanie przez $2\dot{\theta}$ i przekształcić by zależało tylko od zmiennych θ i $\phi = \dot{\theta}$. W rysowaniu portretu fazowego najlepiej wykorzystać funkcję `ContourPlot[]` z opcjami `AspectRatio` $\rightarrow$ `Automatic`, `ContourShading` $\rightarrow$ `False`. Sprawdzić jak zachowuje się portret fazowy dla różnych wartości l. Porównać otrzymany wynik z portretem fazowym dla równania zlinearyzowanego (analogiczna sztuczka), najlepiej z wykorzystaniem funkcji `GraphicsGrid[]`.

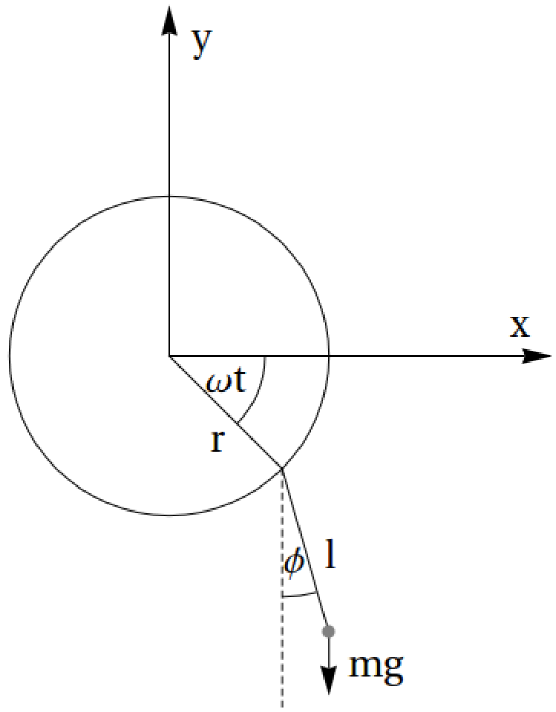
Zadanie 4. (wahadło z ruchomym punktem zaczepienia)

Punkt zaczepienia wahadła matematycznego o długości l i masie m obraca się po okręgu o promieniu r z prędkością kątową ω, tak jak schematycznie przedstawiono to na rysunku 2.
Za uogólnioną współrzędną przyjmujemy ϕ. Wówczas hamiltonian dla takiego wahadła wyraża się wzorem (zadanie dla chętnych: pokazać, że to prawda)

$$H(\phi, p, t) = \frac{1}{2}ml^2\left[\frac{p}{ml^2} + \frac{r\omega}{l}\sin(\omega t + \phi)\right]^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - mg(r\sin\omega t + l\cos\phi).$$

Dla zaoszczędzenia czasu przepisałem już tę funkcję Hamiltona do notatnika, dostępnego pod adresem http://if.pw.edu.pl/ siudem/MJNB/hamiltonian.nb.

Należy wyznaczyć prawe strony w równaniach Hamiltona, następnie stosując podstawienia $\tau = \omega t$, $\frac{d}{dt} = \omega\frac{d}{d\tau}$ (czas bezwymiarowy), $\alpha = \frac{r}{l}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $\beta = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ oraz $P = \frac{p}{ml^2\omega}$ (pęd bezwymiarowy) uzyskać układ równań na zmienne $\{P, \phi\}$ zależny od dwóch parametrów α, β. Polecam przy przekształceniach

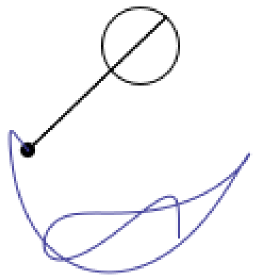


Rysunek 2: Wahadło matematyczne, którego koniec porusza się po okręgu ze stałą prędkością kątową.

wykorzystać funkcje `Simplify[]`, `FullSimplify[]`, `Replace[]`. Ostateczny wynik, jaki należy otrzymać jest następujący

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\tau} = -\beta \sin(\phi) - \alpha \cos(\tau + \phi) \left[P + \alpha \sin(\tau + \phi) \right], \\ \frac{d\phi}{d\tau} = P + \alpha \sin(\tau + \phi). \end{cases}$$

Dysponując równaniami należy je rozwiązać numerycznie, stosując funkcję `NDSolve[]` (należy w tym celu ustalić wartość stałych α i β, na początek sugeruję $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.7$). Narysować portret fazowy, a także wykonać animację jak porusza się takie wahadło (rysunek 3), jeśli warunkami początkowymi będzie $\phi(0) = 0$, $P(0) = 0$. Przy wykonywaniu animacji należy wykorzystać funkcję `Animate[]`. Na początek (dla uproszczenia) warto wykonać animację wahadła z nieruchomym punktem zaczepienia. Pomocny może okazać się notatnik http://if.pw.edu.pl/ siudem/MJNB/animacja.nb.



Rysunek 3: Pojedyncza klatka z animacji wahadła.

Zadanie 5.

Wykonaj sprawozdanie w formie demonstracji, w formie pliku *.cdf w Mathematice. Dokumentacji i odtwarzacza plików *.cdf należy szukać pod adresem http://www.wolfram.com/cdf/.

Literatura

[1] W. I. Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, Wydawnictwo PWN, (1981).

[2] M. Wierzbicki,*Mechanika klasyczna w zadaniach* , Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, (2010).

[3] A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, (2004).