Modelowanie i analiza sieci złożonych

IX. Błądzenia losowe.

Grzegorz Siudem

Politechnika Warszawska

Zadanie 10 pn.
„Przygotowanie i uruchomienie nowego kierunku studiów na studiach II stopnia - Inżynieria i Analiza Danych (IAD)”

realizowane jest w ramach projektu
„NERW PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przed zajęciami

Przypomnienie

Przed zajęciami proszę o przypomnienie wiadomości teorii łancuchów Markowa

Najlepiej poprzez lekturę:

- A. Iwanik, J.K. Misiewicz, *Wykłady z procesów stochastycznych z zadaniami: Część pierwsza – Procesy Markowa*, Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, (2009).
- J.R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, (1997).
- kolejnych slajdów...

Procesy Markowa – przypomnienie

Źródło

Definicje i twierdzenia związane z teorią procesów stochastycznych przytaczamy za podręcznikiem Iwanika i Misiewicz, ale przy zmienionej notacji, o czym dalej.

Procesy Markowa – przypomnienie

Źródło

Definicje i twierdzenia związane z teorią procesów stochastycznych przytaczamy za podręcznikiem Iwanika i Misiewicz, ale przy zmienionej notacji, o czym dalej.

Definicja 1.

Procesem stochastycznym $\{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ nazywamy taką funkcję $(t, \omega) \to X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{T}$, że $X_t(\omega)$ jest zmienną losową dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{T}$.

Źródło

Definicje i twierdzenia związane z teorią procesów stochastycznych przytaczamy za podręcznikiem Iwanika i Misiewicz, ale przy zmienionej notacji, o czym dalej.

Definicja 1.

Procesem stochastycznym $\{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ nazywamy taką funkcję $(t, \omega) \to X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{T}$, że $X_t(\omega)$ jest zmienną losową dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{T}$.

Definicja 2.

Zbiór wszystkich możliwych wartości procesu stochastycznego $\{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ $\mathcal{S} = \{X_t(\omega) : t \in \mathbb{T},\ \omega \in \Omega\}$ nazywamy **przestrzenią stanów** procesu lub jego **przestrzenią fazową**.

Procesy Markowa – przypomnienie

Źródło

Definicje i twierdzenia związane z teorią procesów stochastycznych przytaczamy za podręcznikiem Iwanika i Misiewicz, ale przy zmienionej notacji, o czym dalej.

Definicja 1.

Procesem stochastycznym $\{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ nazywamy taką funkcję $(t, \omega) \to X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{T}$, że $X_t(\omega)$ jest zmienną losową dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{T}$.

Definicja 2.

Zbiór wszystkich możliwych wartości procesu stochastycznego $\{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ $\mathcal{S} = \{X_t(\omega) : t \in \mathbb{T},\ \omega \in \Omega\}$ nazywamy **przestrzenią stanów** procesu lub jego **przestrzenią fazową**.

Będziemy rozważali co najwyżej przeliczalne przestrzenie stanów.

Procesy Markowa – przypomnienie

Warunek Markowa

Proces stochastyczny $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ o wartościach w $\mathcal{S}_m = \{1, ..., m\}$, $m \in \mathbb{N}$ nazywamy **łańcuchem Markowa** lub **procesem Markowa**, jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego wyboru stanów $k_0, k_1, ..., k_n \in \mathcal{S}_m$ zachodzi poniższa własność

$$\mathbb{P}\left(X_n = k_n | X_{n-1} = k_{n-1}, ..., X_0 = k_0\right) = \mathbb{P}\left(X_n = k_n | X_{n-1} = k_{n-1}\right).$$

Warunek Markowa

Proces stochastyczny $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ o wartościach w $\mathcal{S}_m = \{1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$ nazywamy **łańcuchem Markowa** lub **procesem Markowa**, jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego wyboru stanów $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathcal{S}_m$ zachodzi poniższa własność

$$\mathbb{P}\left(X_n = k_n | X_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, X_0 = k_0\right) = \mathbb{P}\left(X_n = k_n | X_{n-1} = k_{n-1}\right).$$

Definicja 3.

Łańcuch Markowa $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ jest **jednorodny** lub równoważnie **ma stacjonarne prawdopodobieństwa przejścia**, jeśli dla dowolnych stanów $i, j \in \mathcal{S}_m$, $m \in \mathbb{N}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\mathbb{P}\left(X_n = j | X_{n-1} = i\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right).$$

Procesy Markowa – przypomnienie

Operator Markowa

Prawdopodobieństwa $p_{ji} := \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$, dla $i, j \in \mathcal{S}_m$, $m \in \mathbb{N}$, nazywamy **prawdopodobieństwami przejścia w jednym kroku**, a utworzoną z nich macierz

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & p_{m3} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix},$$

macierzą przejścia w jednym kroku.

Procesy Markowa – przypomnienie

Uwaga

Przyjęto tutaj notację inną od zawartej w cytowanych podręcznikach do procesów stochastycznych, gdzie autorzy zapisywali prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku jako $\tilde{p}_{ij} := \mathbb{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right)$, co powodowało, że w ich ujęciu macierz przejścia w jednym kroku była transpozycją macierzy, według naszej definicji $\tilde{P}^T = P$.

Procesy Markowa – przypomnienie

Uwaga

Przyjęto tutaj notację inną od zawartej w cytowanych podręcznikach do procesów stochastycznych, gdzie autorzy zapisywali prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku jako $\tilde{p}_{ij} := \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$, co powodowało, że w ich ujęciu macierz przejścia w jednym kroku była transpozycją macierzy, według naszej definicji $\tilde{P}^T = P$.

Z aplikacyjnego punktu widzenia bardzo ważne jest pytanie, jak działa proces Markowa, gdy iterowany jest wielokrotnie. Odpowiedzi na pytanie to udziela poniższe twierdzenie.

Procesy Markowa – przypomnienie

Twierdzenie 1.
Jeżeli proces Markowa P jest iterowany n-krotnie to odpowiada mu wtedy proces Markowa o macierzy przejścia w jednym kroku równej $Q = P^n$, przy czym $q_{ij}(n) = [P^n]_{ij}$, jest prawdopodobieństwem przejścia w jednym kroku dla procesu będącego n-krotną iteracją procesu wyjściowego.

Procesy Markowa – przypomnienie

Definicja 4.

Macierz $P \in \mathbb{M}^{m \times m}([0,1])$, $m \in \mathbb{N}$, $P = [p_{ij}]_{i,j=1,\dots,m}$ spełniającą poniższe założenia

- $p_{ij} \geqslant 0$ dla dowolnych $i, j \in \mathcal{S}_m$,
- $\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij} = 1$,

nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Procesy Markowa – przypomnienie

Definicja 4.

Macierz $P \in \mathbb{M}^{m \times m}([0,1])$, $m \in \mathbb{N}$, $P = [p_{ij}]_{i,\,j=1,\,\dots,\,m}$ spełniającą poniższe założenia

- $p_{ij} \geqslant 0$ dla dowolnych i, $j \in \mathcal{S}_m$,
- $\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij} = 1$,

nazywamy **macierzą stochastyczną**.

Uwaga

Widać, że przyjęta definicja macierzy P powoduje, że macierzą stochastyczną nazywamy macierz stochastyczną kolumnowo (tzn. w kolumnach sumującą się do 1). Macierze stochastyczne wierszowo są właściwe przy transponowanej definicji P. Macierz będącą jednocześnie stochastyczną kolumnowo i wierszowo nazywamy **macierzą podwójnie stochastyczną**.

Procesy Markowa – przypomnienie

Drugą, po macierzy przejścia w jednym kroku, wygodną metodą reprezentacji procesu Markowa są diagramy przejścia w jednym kroku.

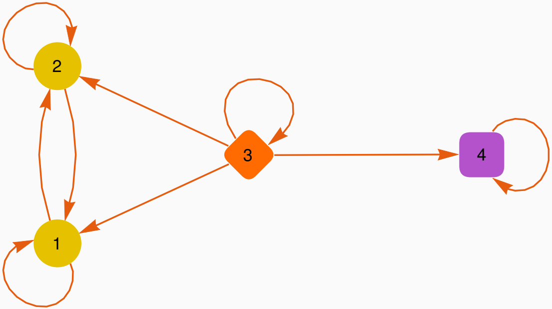
Drugą, po macierzy przejścia w jednym kroku, wygodną metodą reprezentacji procesu Markowa są diagramy przejścia w jednym kroku.

Definicja 5.

Diagramem przejścia w jednym kroku procesu Markowa $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ nazywamy graf skierowany, w którym wierzchołkami są elementy przestrzeni fazowej, a łuki łączą dwa stany, o ile prawdopodobieństwo przejścia między nimi w jednym kroku jest niezerowe.

Procesy Markowa – przypomnienie

Graf przejścia w jednym kroku



Procesy Markowa – przypomnienie

Każdy ze stanów należący do przestrzeni fazowej $\mathcal{S}_m$ dla procesu Markowa może zostać scharakteryzowany ze względu na możliwości przejścia między nim a innymi stanami:

Procesy Markowa – przypomnienie

Każdy ze stanów należący do przestrzeni fazowej $\mathcal{S}_m$ dla procesu Markowa może zostać scharakteryzowany ze względu na możliwości przejścia między nim a innymi stanami:

- Stan $i \in \mathcal{S}_m$ jest **pochłaniający** jeśli $p_{ii} = 1$. Intuicyjnie stan pochłaniający to taki stan, z którego nie można wyjść.

Procesy Markowa – przypomnienie

Każdy ze stanów należący do przestrzeni fazowej $\mathcal{S}_m$ dla procesu Markowa może zostać scharakteryzowany ze względu na możliwości przejścia między nim a innymi stanami:

- Stan $i \in \mathcal{S}_m$ jest **pochłaniający** jeśli $p_{ii} = 1$. Intuicyjnie stan pochłaniający to taki stan, z którego nie można wyjść.
- Stan $i \in \mathcal{S}_m$ jest **osiągalny** ze stanu $j \in \mathcal{S}_m$ jeśli istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $p_{ij}(n) > 0$. Będzie to oznaczane przez $j \to i$. Jeden stan jest dla drugiego osiągalny, o ile można w toku iteracji przejść z jednego do drugiego.

Procesy Markowa – przypomnienie

Każdy ze stanów należący do przestrzeni fazowej $\mathcal{S}_m$ dla procesu Markowa może zostać scharakteryzowany ze względu na możliwości przejścia między nim a innymi stanami:

- Stan $i \in \mathcal{S}_m$ jest **pochłaniający** jeśli $p_{ii} = 1$. Intuicyjnie stan pochłaniający to taki stan, z którego nie można wyjść.
- Stan $i \in \mathcal{S}_m$ jest **osiągalny** ze stanu $j \in \mathcal{S}_m$ jeśli istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $p_{ij}(n) > 0$. Będzie to oznaczane przez $j \to i$. Jeden stan jest dla drugiego osiągalny, o ile można w toku iteracji przejść z jednego do drugiego.
- Stany $i, j \in \mathcal{S}_m$ **wzajemnie się komunikują** jeśli $j \to i$ oraz $i \to j$.

Procesy Markowa – przypomnienie

Każdy ze stanów należący do przestrzeni fazowej $\mathcal{S}_m$ dla procesu Markowa może zostać scharakteryzowany ze względu na możliwości przejścia między nim a innymi stanami:

- Stan $i \in \mathcal{S}_m$ jest **pochłaniający** jeśli $p_{ii} = 1$. Intuicyjnie stan pochłaniający to taki stan, z którego nie można wyjść.
- Stan $i \in \mathcal{S}_m$ jest **osiągalny** ze stanu $j \in \mathcal{S}_m$ jeśli istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $p_{ij}(n) > 0$. Będzie to oznaczane przez $j \to i$. Jeden stan jest dla drugiego osiągalny, o ile można w toku iteracji przejść z jednego do drugiego.
- Stany $i, j \in \mathcal{S}_m$ **wzajemnie się komunikują** jeśli $j \to i$ oraz $i \to j$.

Obserwacja – uzasadnij

Komunikowanie się jest relacją równoważności (symetryczną, zwrotną i przechodnią), dzieli więc wszystkie stany procesu Markowa na klasy abstrakcji - klasy stanów komunikujące się między sobą.

Procesy Markowa – przypomnienie

Definicja 6.

Łańcuch Markowa nazywamy **nieprzywiedlnym**, gdy wszystkie jego stany wzajemnie się komunikują. Nieprzywiedlność oznacza, że wszystkie stany należą do tej samej klasy abstrakcji względem relacji komunikowania się.

Definicja 6.

Łańcuch Markowa nazywamy **nieprzywiedlnym**, gdy wszystkie jego stany wzajemnie się komunikują. Nieprzywiedlność oznacza, że wszystkie stany należą do tej samej klasy abstrakcji względem relacji komunikowania się.

Definicja 7.

Okresem stanu $i \in \mathcal{S}_m$ nazywamy liczbę

$$o(i) = NWD(n \in \mathbb{N} : p_{ii}(n) > 0),$$

Stan i jest **okresowy** jeśli $o(i) > 1$ i **nieokresowy** gdy $o(i) = 1$.

Definicja 6.

Łańcuch Markowa nazywamy **nieprzywiedlnym**, gdy wszystkie jego stany wzajemnie się komunikują. Nieprzywiedlność oznacza, że wszystkie stany należą do tej samej klasy abstrakcji względem relacji komunikowania się.

Definicja 7.

Okresem stanu $i \in \mathcal{S}_m$ nazywamy liczbę

$$o(i) = NWD(n \in \mathbb{N} : p_{ii}(n) > 0),$$

Stan i jest **okresowy** jeśli $o(i) > 1$ i **nieokresowy** gdy $o(i) = 1$.

Definicja 8.

Nieprzywiedlny łańcuch Markowa jest **okresowy** jeśli wszystkie jego stany są okresowe o tym samym okresie $d > 1$. W przeciwnym przypadku mówimy, że łańcuch jest **nieokresowy**.

Procesy Markowa – przypomnienie

Twierdzenie 2. (uzasadnienie Definicji 8.)

W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa każdy stan ma ten sam okres.

Twierdzenie 2. (uzasadnienie Definicji 8.)

W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa każdy stan ma ten sam okres.

Definicja 9.

Rozkład początkowy $\pi_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$, $i \in \mathcal{S}_m$ łańcucha Markowa $\{X_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ jest **stacjonarny** lub **niezmienniczy** jeśli zachodzi

$$\pi = P\pi.$$

Rozkład stacjonarny jest więc punktem stałym operatora P.

Twierdzenie 2. (uzasadnienie Definicji 8.)
W nieprzywiedlnym łańcuchu Markowa każdy stan ma ten sam okres.

Definicja 9.
Rozkład początkowy $\pi_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$, $i \in \mathcal{S}_m$ łańcucha Markowa $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ jest **stacjonarny** lub **niezmienniczy** jeśli zachodzi

$$\pi = P\pi.$$

Rozkład stacjonarny jest więc punktem stałym operatora P.

Definicja 10.
Jednorodny łańcuch Markowa jest $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ **ergodyczny**, jeśli dla każdego $i \in \mathcal{S}_m$ istnieją i nie zależą od j następujące granice

$$q_i = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) > 0, \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{m} q_i = 1.$$

Otrzymany rozkład $\mathbf{q} = (q_i)_{i=1,\ldots,m}$ nazywamy **ergodycznym**.

Procesy Markowa – przypomnienie

Twierdzonko

Każdy rozkład ergodyczny dla pewnego łańcucha Markowa jest też rozkładem stacjonarnym tego łańcucha. Udowodnij to!

Procesy Markowa – przypomnienie

Twierdzonko

Każdy rozkład ergodyczny dla pewnego łańcucha Markowa jest też rozkładem stacjonarnym tego łańcucha. Udowodnij to!

Uwaga

Implikacja z twierdzonka w ogólności nie daje się odwrócić. Twierdzenie odwrotne nie musi być prawdziwe. Łańcuch Markowa może posiadać więcej niż jeden rozkład stacjonarny (kiedy?), a, zgodnie z definicją 10, rozkład ergodyczny wyznaczony jest jednoznacznie. Na podstawie twierdzenia 1 każdy łańcuch Markowa posiada co najmniej jeden rozkład stacjonarny, ale co do istnienia rozkładu ergodycznego dla dowolnego procesu nie ma gwarancji.

Procesy Markowa – przypomnienie

Twierdzenie 3

Dla każdego procesu Markowa o skończonej liczbie stanów istnieje co najmniej jeden rozkład stacjonarny[1]. Wszystkie rozkłady stacjonarne (jako wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^m$) należą do podprzestrzeni rozpiętej przez wektory własne macierzy P odpowiadające wartości własnej 1.

[1] Jest to tak naprawdę cecha każdej macierzy stochastycznej, dla której 1 jest na pewno wartością własną.

[2] Jeśli stanów byłoby przeliczalnie wiele wówczas należy jeszcze założyć, że każdy stan jest dodatnio powracający, czyli, że prawdopodobieństwo powrotu do każdego stanu w skończonym czasie jest większe niż 0.

Procesy Markowa – przypomnienie

Twierdzenie 3

Dla każdego procesu Markowa o skończonej liczbie stanów istnieje co najmniej jeden rozkład stacjonarny[1]. Wszystkie rozkłady stacjonarne (jako wektory z przestrzeni $\mathbb{R}^m$) należą do podprzestrzeni rozpiętej przez wektory własne macierzy P odpowiadające wartości własnej 1.

Twierdzenie 4.

Rozważmy nieokresowy i nieprzywiedlny proces Markowa o skończonej liczbie stanów[2]. Wówczas łańcuch ten posiada dokładnie jeden rozkład stacjonarny π. Co więcej rozkład π jest też rozkładem ergodycznym tego procesu.

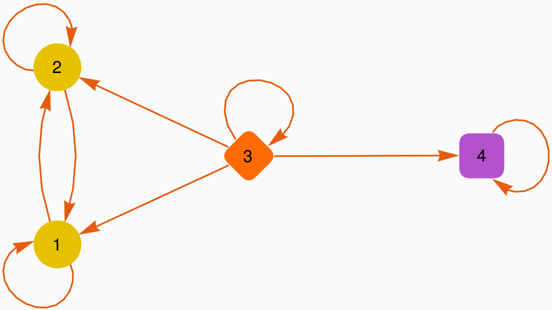
---

[1] Jest to tak naprawdę cecha każdej macierzy stochastycznej, dla której 1 jest na pewno wartością własną.

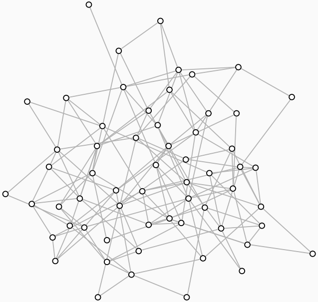
[2] Jeśli stanów byłoby przeliczalnie wiele wówczas należy jeszcze założyć, że każdy stan jest dodatnio powracający, czyli, że prawdopodobieństwo powrotu do każdego stanu w skończonym czasie jest większe niż 0.

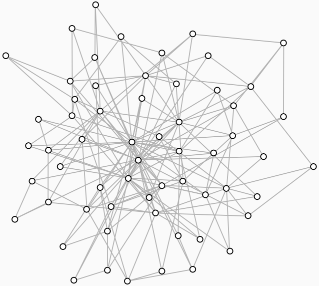
Wykład

Błądzenie losowe po grafie

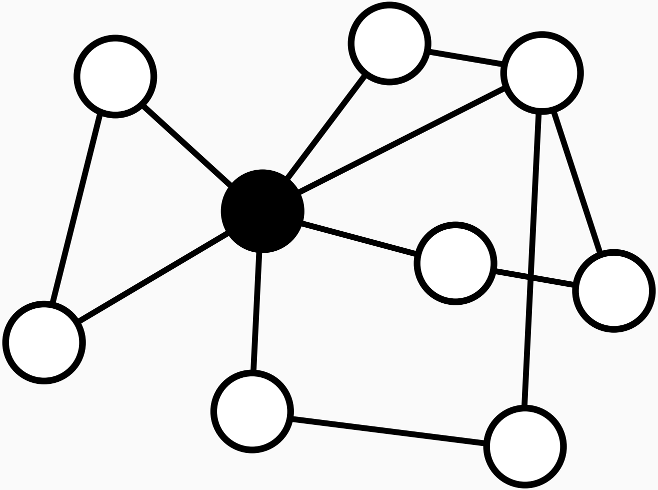


Błądzenie losowe po sieci

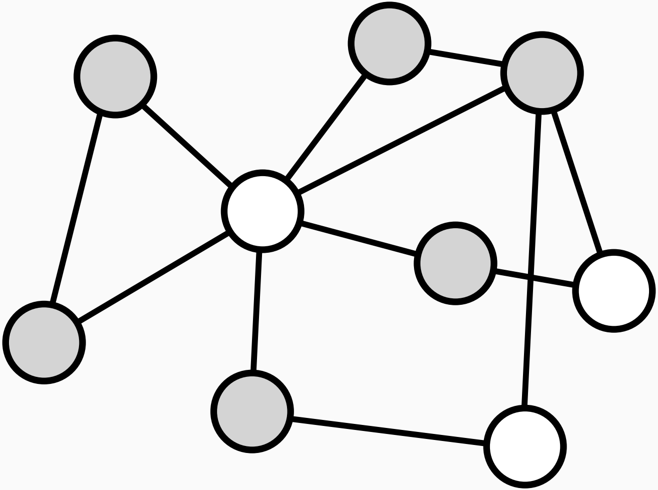




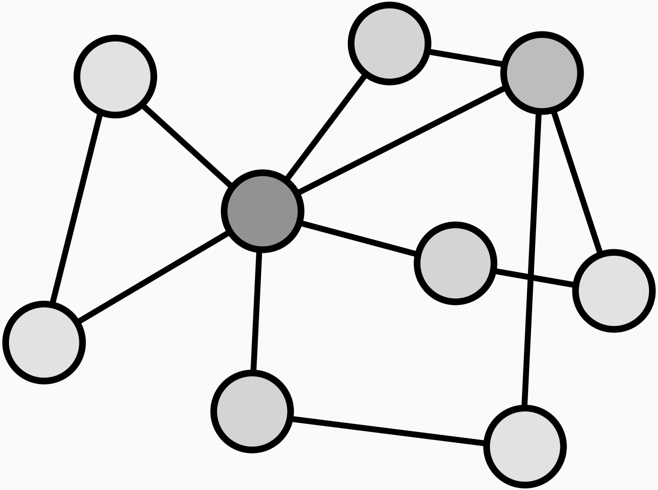
Błądzenie losowe po sieci



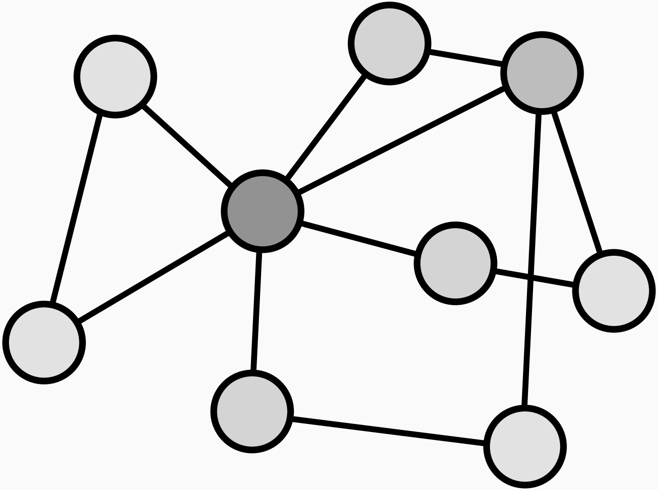
Błądzenie losowe po sieci



Błądzenie losowe po sieci



Błądzenie losowe po sieci



W części projektowej połączymy intuicje z formalizmem procesów Markowa!

Podsumowanie

Praca domowa

Przeczytaj pracę Fortunato, D. Hric, Phys. Rep., 659 , 1, (2016).

Dziękuję za uwagę!

Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Politechnika Warszawska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Zadanie 10 pn.
„Przygotowanie i uruchomienie nowego kierunku studiów na studiach II stopnia
- Inżynieria i Analiza Danych (IAD)”

realizowane jest w ramach projektu
„NERW PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego