# Modelowanie i analiza sieci złożonych

## VII. Probabilistyczne aspekty sieci złożonych.

Grzegorz Siudem

Politechnika Warszawska

Zadanie 10 pn.
„Przygotowanie i uruchomienie nowego kierunku studiów na studiach II stopnia - Inżynieria i Analiza Danych (IAD)”

realizowane jest w ramach projektu
„NERW PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

# Przed zajęciami

# Do przypomnienia przed zajęciami

Z innych zajęć:

- rozwiązywanie problemów kombinatorycznych metodą funkcji generujących.

Z MASZ_5:

- Własności grafów ER.

Z MASZ_6:

- Podejście średniopolowe do modelu BA.

Do przemyślenia:

- Który z grafów: Erdősa-Rényi czy Barábasiego-Alberty jest bardziej odporny na awarie? Dlaczego?

# Wykład

# Wrażenia po wyprowadzeniach modelu BA?

# Wrażenia po wyprowadzeniach modelu BA?

## Zalety

- TO DZIAŁA!

# Wrażenia po wyprowadzeniach modelu BA?

## Zalety

- TO DZIAŁA!
- względnie proste (prawda?),

# Wrażenia po wyprowadzeniach modelu BA?

## Zalety

- TO DZIAŁA!
- względnie proste (prawda?),
- krótkie i niewymagające skomplikowanych narzędzi.

# Wrażenia po wyprowadzeniach modelu BA?

## Zalety

- TO DZIAŁA!
- względnie proste (prawda?),
- krótkie i niewymagające skomplikowanych narzędzi.

## Wady

- nierzeczywiste założenia,

# Wrażenia po wyprowadzeniach modelu BA?

## Zalety

- TO DZIAŁA!
- względnie proste (prawda?),
- krótkie i niewymagające skomplikowanych narzędzi.

## Wady

- nierzeczywiste założenia,
- nieweryfikowalne przybliżenia,

# Wrażenia po wyprowadzeniach modelu BA?

## Zalety

- TO DZIAŁA!
- względnie proste (prawda?),
- krótkie i niewymagające skomplikowanych narzędzi.

## Wady

- nierzeczywiste założenia,
- nieweryfikowalne przybliżenia,
- brak matematycznej precyzji.

# Wrażenia po wyprowadzeniach modelu BA?

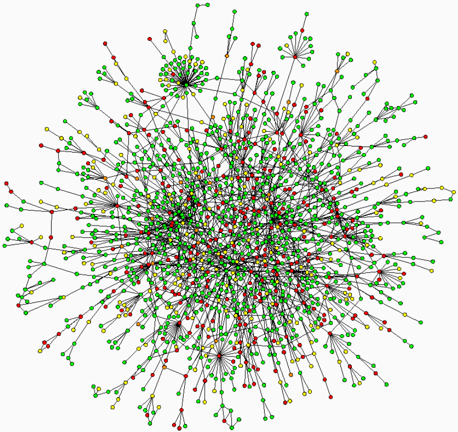
Zalety

- TO DZIAŁA!
- względnie proste (prawda?),
- krótkie i niewymagające skomplikowanych narzędzi.

Wady

- nierzeczywiste założenia,
- nieweryfikowalne przybliżenia,
- brak matematycznej precyzji.

Wniosek:
Niezadowolonym polecam czytanie Durreta!



https://services.math.duke.edu/~rtd/RGD/RGD.html

Poważne matematycznie podejście, spójrzmy do rozdziału 4.1.

# Równanie master

Równanie opisujące zmiany rozkładu prawdopodobieństwa w czasie

$$\frac{d\mathcal{P}_i}{dt} = \sum_j \mathcal{P}_j T_{j\to i} - \sum_j \mathcal{P}_j T_{i\to j},$$

co w wersji dyskretnej przyjmuje postać

$$\mathcal{P}_i(t+1) - \mathcal{P}_i(t) = \sum_j \mathcal{P}_j(t) T_{j\to i} - \sum_j \mathcal{P}_j(t) T_{i\to j},$$

i to na tej wersji się skupimy.

# Równanie master dla sieci BA

Opieramy się na

- rozdziale 4.1 u Durreta,
- S.N. Dorogovstev, J.F.F. Mendes i A.N Samukhin, *Structure of growing networks with preferential linking*, Phys. Rev. Letters. **85**, 4633–4636 (2000).

# Równanie master dla sieci BA

Opieramy się na

- rozdziale 4.1 u Durreta,
- S.N. Dorogovstev, J.F.F. Mendes i A.N Samukhin, *Structure of growing networks with preferential linking*, Phys. Rev. Letters. **85**, 4633–4636 (2000).

Równanie M przyjmuje postać:

$$
\begin{aligned}
N_k(t+1) - N_k(t) &= \frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t) - \frac{mk}{2mt} N_k(t) + \delta_{km} \\
N_{m-1}(t) &= 0.
\end{aligned}
$$

# Równanie master dla sieci BA

Opieramy się na

- rozdziale 4.1 u Durreta,
- S.N. Dorogovstev, J.F.F. Mendes i A.N Samukhin, *Structure of growing networks with preferential linking*, Phys. Rev. Letters. **85**, 4633–4636 (2000).

Równanie M przyjmuje postać:

$$
\begin{aligned}
N_k(t+1) - N_k(t) &= \frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t) - \frac{mk}{2mt} N_k(t) + \delta_{km} \\
N_{m-1}(t) &= 0.
\end{aligned}
$$

Pytanie:

Czy umieją Państwo uzasadnić składowe tego równania?

# Równanie master dla sieci BA

$$N_k(t+1) - N_k(t) = \frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t) - \frac{mk}{2mt} N_k(t) + \delta_{km}$$

$$N_{m-1}(t) = 0.$$

Interpretacja:

# Równanie master dla sieci BA

$$N_k(t+1) - N_k(t) = \frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t) - \frac{mk}{2mt} N_k(t) + \delta_{km}$$
$$N_{m-1}(t) = 0.$$

Interpretacja:

- $\frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t)$ liczba wierzchołków, która właśnie awansowała na poziom $k$-ty.

# Równanie master dla sieci BA

$$N_k(t+1) - N_k(t) = \frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t) - \frac{mk}{2mt} N_k(t) + \delta_{km}$$

$$N_{m-1}(t) = 0.$$

Interpretacja:

- $\frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t)$ liczba wierzchołków, która właśnie awansowała na poziom $k$-ty.
- $\frac{mk}{2mt} N_k(t)$ liczba wierzchołków, które awansowały na poziom $k+1$-szy.

# Równanie master dla sieci BA

$$N_k(t+1) - N_k(t) = \frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t) - \frac{mk}{2mt} N_k(t) + \delta_{km}$$
$$N_{m-1}(t) = 0.$$

Interpretacja:

- $\frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t)$ liczba wierzchołków, która właśnie awansowała na poziom $k$-ty.
- $\frac{mk}{2mt} N_k(t)$ liczba wierzchołków, które awansowały na poziom $k+1$-szy.
- $\delta_{km}$ nowo dodany wierzchołek.

# Równanie master dla sieci BA

$$N_k(t+1) - N_k(t) = \frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t) - \frac{mk}{2mt} N_k(t) + \delta_{km}$$
$$N_{m-1}(t) = 0.$$

Interpretacja:

- $\frac{m(k-1)}{2mt} N_{k-1}(t)$ liczba wierzchołków, która właśnie awansowała na poziom $k$-ty.
- $\frac{mk}{2mt} N_k(t)$ liczba wierzchołków, które awansowały na poziom $k+1$-szy.
- $\delta_{km}$ nowo dodany wierzchołek.

Pytanie:

Czy to rozwiązanie jest już matematycznie ścisłe?

# Równanie master dla sieci BA

Nieścisłości w podejściu równania master:

- dodanie krawędzi nie zmienia preferencji układu (dynamika synchroniczna, wspomnienie po średnim polu),

# Równanie master dla sieci BA

Nieścisłości w podejściu równania master:

- dodanie krawędzi nie zmienia preferencji układu (dynamika synchroniczna, wspomnienie po średnim polu),
- dopuszczamy wielokrotne połączenia.

# Równanie master dla sieci BA

Nieścisłości w podejściu równania master:

- dodanie krawędzi nie zmienia preferencji układu (dynamika synchroniczna, wspomnienie po średnim polu),
- dopuszczamy wielokrotne połączenia.

A jednak, to przybliżenie działa doskonale!
Dlaczego?

# Równanie master dla sieci BA

Nieścisłości w podejściu równania master:

- dodanie krawędzi nie zmienia preferencji układu (dynamika synchroniczna, wspomnienie po średnim polu),
- dopuszczamy wielokrotne połączenia.

A jednak, to przybliżenie działa doskonale!
Dlaczego?

Precyzja czy prostota metody?
czyli matematycy vs. fizycy...

# Równanie master dla sieci BA

$$N_k(t+1) - N_k(t) = \frac{k-1}{2t} N_{k-1}(t) - \frac{k}{2t} N_k(t) + \delta_{km}$$
$$N_{m-1}(t) = 0.$$

**Jak je rozwiązać?**

Tym zajmiemy się w części projektowej.

# Równanie master dla sieci BA - rozwiązanie

$$N_k(t+1) - N_k(t) = \frac{k-1}{2t} N_{k-1}(t) - \frac{k}{2t} N_k(t) + \delta_{km}.$$

$$N_{m-1}(t) = 0.$$

Rozwiązanie:

$$\mathcal{P}(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

# Równanie master dla sieci BA - rozwiązanie

$$N_k(t+1) - N_k(t) = \frac{k-1}{2t} N_{k-1}(t) - \frac{k}{2t} N_k(t) + \delta_{km}.$$
$$N_{m-1}(t) = 0.$$

Rozwiązanie:

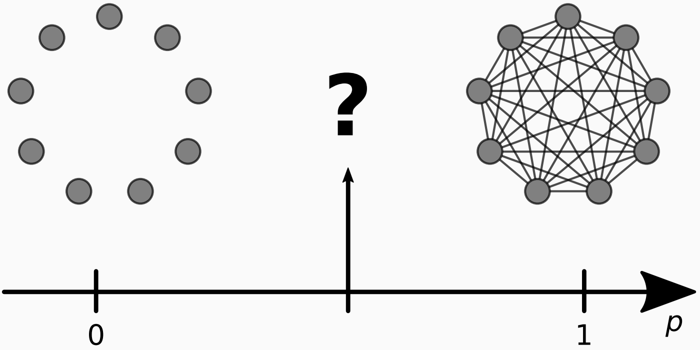
$$\mathcal{P}(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

Pytanie:

Dlaczego dla $k \gg 1$ wynik średniopolowy jest zgodny z rozwiązaniem równania master?

# Perkolacja w grafach ER

Wróćmy teraz do grafów ER




Co dzieje się w środku? – prześledzimy zgodnie z rozdziałem 4.3.2 z książki Fronczaków

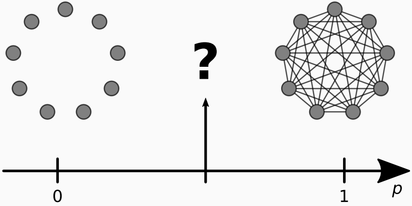
## Co to jest perkolacja?


wikipedia

Matematyczny model przeciekania cieczy przez porowaty materiał.

# Perkolacja w grafach ER

A jaki to ma związek z grafami?

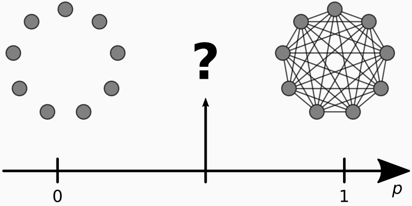



**Pytamy kiedy graf będzie sperkolowany**

czyli kiedy klaster perkolacyjny ma rozmiar $N^* \propto N$.

# Perkolacja w grafach ER

A jaki to ma związek z grafami?




**Pytamy kiedy graf będzie sperkolowany**

czyli kiedy klaster perkolacyjny ma rozmiar $N^* \propto N$.

**Uwaga!**

Postępujemy tutaj *fizycznie*, po ścisłe podejścia (sic!) zapraszam do rozdziału 2. u Durreta.

# Perkolacja w grafach ER

Wprowadźmy rozkład $\mathcal{Q}(k)$

$\mathcal{Q}(k)$ to rozklad stopni na końcach losowo wybranej krawędzi.

# Perkolacja w grafach ER

**Wprowadźmy rozkład $\mathcal{Q}(k)$**

$\mathcal{Q}(k)$ to rozklad stopni na końcach losowo wybranej krawędzi.

W części projektowej uzasadnimy, że $\mathcal{Q}(k) \propto k\mathcal{P}(k)$, a zatem

$$\mathcal{Q}(k) = \frac{k}{\langle k \rangle}\mathcal{P}(k).$$

# Perkolacja w grafach ER

Wprowadźmy rozkład $\mathcal{Q}(k)$

$\mathcal{Q}(k)$ to rozklad stopni na końcach losowo wybranej krawędzi.

W części projektowej uzasadnimy, że $\mathcal{Q}(k) \propto k\mathcal{P}(k)$, a zatem

$$\mathcal{Q}(k) = \frac{k}{\langle k \rangle}\mathcal{P}(k).$$

W części projektowej uzasadnimy, że próg perkolacji można zdefiniować jako

$$\sum_k k\mathcal{Q}(k) \geqslant 2,$$

co jest równoważne

$$\langle k \rangle_{nn} = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = 2.$$

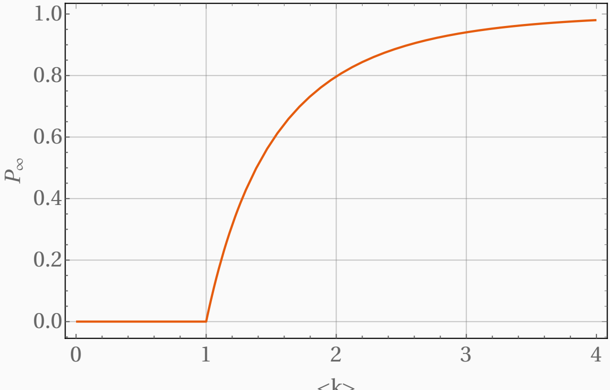
# Perkolacja w grafach ER

Dla grafów ER otrzymujemy warunek na perkolacje

$$\langle k \rangle = 1,$$

co prowadzi do

$$p_c = \frac{1}{N}.$$



Dziękuję za uwagę!

Zadanie 10 pn.
„Przygotowanie i uruchomienie nowego kierunku studiów na studiach II stopnia
- Inżynieria i Analiza Danych (IAD)”

realizowane jest w ramach projektu
„NERW PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego