

# Modelowanie i analiza sieci złożonych

I. Wprowadzenie i podstawy matematyczne.

---

Grzegorz Siudem

Politechnika Warszawska



**Politechnika  
Warszawska**

**Unia Europejska**  
Europejski Fundusz Społeczny



Zadanie 10 pn.

„Przygotowanie i uruchomienie nowego kierunku studiów na studiach II stopnia  
- Inżynieria i Analiza Danych (IAD)”

realizowane jest w ramach projektu  
„NERW PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”  
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przed zajęciami

---

# Przypomnienie z innych przedmiotów

## Z matematyki dyskretnej

(np. R.J.Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*, PWN, 2007)

- Co to są grafy? Z czego się składają?
- Jakie rodzaje grafów umiecie Państwo wymienić?
- Jak można reprezentować grafy w pamięci komputera?

Z probabilistyki (np. J.Jakubowski, R.Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, 2010)

- Czym różnią się rozkłady dwumianowy, Poissona, Cauchy'ego?
- Co oznacza, że rozkład ma *gruby ogon*?

## Z algorytmiki

- Jakie znasz algorytmy przeszukiwania grafów?

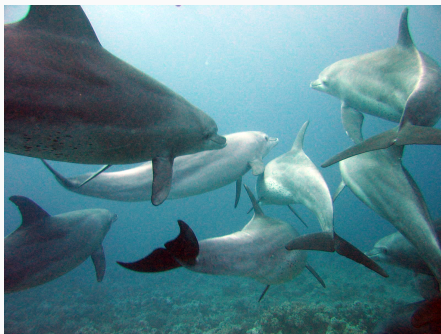
# Wykład

---

# Co to są sieci złożone?

Sieci złożone:

- Dane rzeczywiste,
- Teoria grafów,
- Modele matematyczne,
- Narzędzia informatyczne.

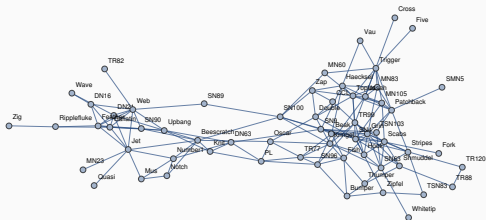


Indo-Pacific Bottlenose Dolphin, *Tursiops aduncus*. Red Sea. [Wiki]

# Co to są sieci złożone?

Sieci złożone:

- Dane rzeczywiste,
- Teoria grafów,
- Modele matematyczne,
- Narzędzia informatyczne.

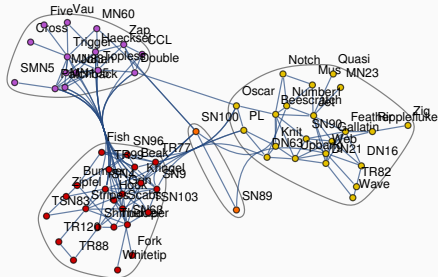


An undirected social network of frequent associations between 62 dolphins in a community living off Doubtful Sound, New Zealand. [WolframMathematica]

# Co to są sieci złożone?

Sieci złożone:

- Dane rzeczywiste,
- Teoria grafów,
- Modele matematyczne,
- Narzędzia informatyczne.



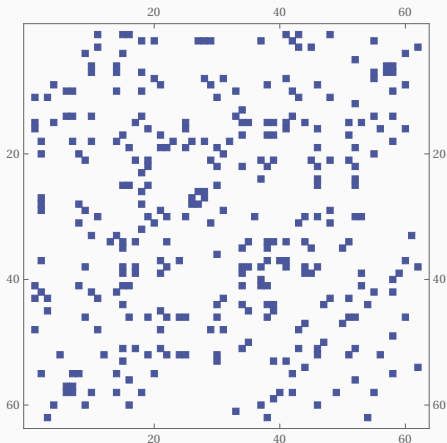
An undirected social network of frequent associations between 62 dolphins in a community living off Doubtful Sound, New Zealand. [WolframMathematica]



# Co to są sieci złożone?

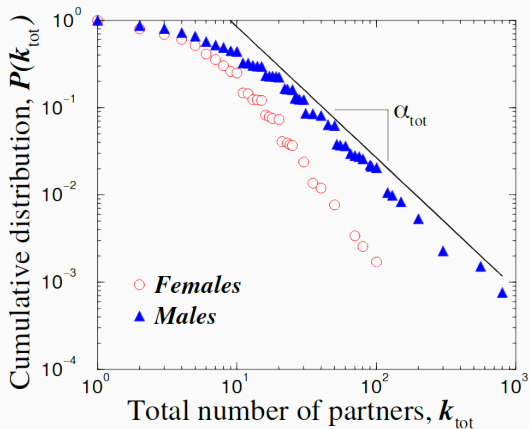
Sieci złożone:

- Dane rzeczywiste,
- Teoria grafów,
- Modele matematyczne,
- Narzędzia informatyczne.



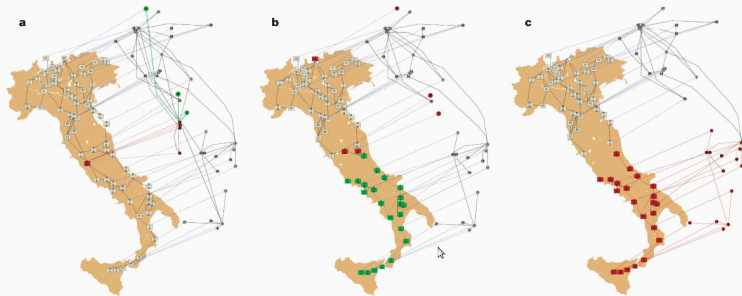
An undirected social network of frequent associations between 62 dolphins in a community living off Doubtful Sound, New Zealand. [WolframMathematica]

# Motywacja: sieci są sexy!

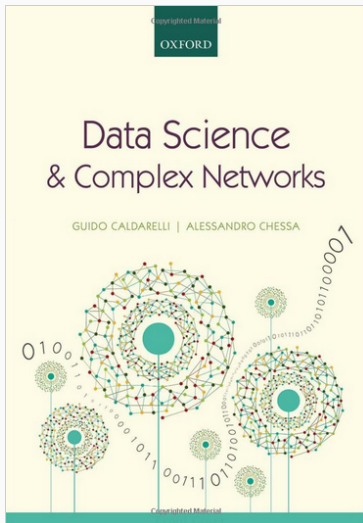


Histogram stopni wierzchołków sieci kontaktów seksualnych [F. Liljeros i in. Nature 411, 907–908 (2001)]

# Motywacja: zastosowania



Sprzężone sieci energetyczno-informatyczne [S.V Buldyrev i in. Nature **464**, 1025–1028, (2010)]



## Wprowadzenie

1. Podstawy matematyczne.
  2. Historia sieciologii.
  3. Cechy sieci rzeczywistych i wizualizacja grafów.
- Przypomnienie i rozszerzenie wiadomości z teorii grafów.
  - Problemy z rozkładami potegowymi – przypomnienie.
  - Metody reprezentacji grafów w pamięci.
  - Wprowadzenie do używanego oprogramowania.

## Wprowadzenie

1. Podstawy matematyczne.
2. **Historia sieciologii.**
3. Cechy sieci rzeczywistych i wizualizacja grafów.

- Czym jest *sieciologia*?
- Przegląd baz danych o sieciach.
- Wczytywanie i wstępne analizy sieci złożonych.

## Wprowadzenie

1. Podstawy matematyczne.
2. Historia sieciologii.
3. Cechy sieci rzeczywistych i wizualizacja grafów.

- Cechy sieci rzeczywistych.
- Prawa potęgowe w przyrodzie.
- Metody wizualizacji grafów.

## Modele i analiza sieci

4. **Metryki sieci.**
  5. Statyczne grafy przypadkowe.
  6. Sieci ewoluujące.
  7. Probabilistyczne aspekty sieci złożonych.
  8. Sieci hierarchiczne, warstwowe i czasowe.
- Wykrywanie i analiza rozkładów potęgowych w danych.
  - Miary korelacji węzłów – asortatywność vs. dysasortatywność sieci.
  - Współczynniki gronowania, centralność i jej odmiany.
  - Liczba Erdős, Bacona, indeks Hirscha i inne specyficzne sieciowe metryki.



## Modele i analiza sieci

4. Metryki sieci.
5. **Statyczne grafy przypadkowe.**
6. Sieci ewoluujące.
7. Probabilistyczne aspekty sieci złożonych.
8. Sieci hierarchiczne, warstwowe i czasowe.

- Klasyczne grafy przypadkowe Erdősa-Rényiego
- Model Wattsa-Strogatza.
- Model konfiguracyjny.
- Sieci o zadanym hamiltonianie.

## Modele i analiza sieci

4. Metryki sieci.
5. Statyczne grafy przypadkowe.
6. Sieci ewoluujące.
7. Probabilistyczne aspekty sieci złożonych.
8. Sieci hierarchiczne, warstwowe i czasowe.

- Reguła św. Mateusza.
- Model Barabásiego-Alberty.
- Metoda średniego pola.

## Modele i analiza sieci

4. Metryki sieci.
5. Statyczne grafy przypadkowe.
6. Sieci ewoluujące.
7. **Probabilistyczne aspekty sieci złożonych.**
8. Sieci hierarchiczne, warstwowe i czasowe.

- (Bardziej) ścisłe podejście do modelu BA.
- Perkolacje w grafie ER.
- Przepadkowe uszkodzenia i celowe ataki.

## Modele i analiza sieci

4. Metryki sieci.
5. Statyczne grafy przypadkowe.
6. Sieci ewoluujące.
7. Probabilistyczne aspekty sieci złożonych.
8. Sieci hierarchiczne, warstwowe i czasowe.

- Sieci hierachiczne.
- Sieci warstwowe.
- Multipleksy.
- Sieci czasowe.

## Dynamika na sieciach

9. Błądzenia losowe w sieciach.
10. Algorytmy wykrywania społeczności.
11. Modele agentowe.

- Przypomnienie wiadomości o procesach Markowa.
- Dyfuzja na sieciach.
- PageRank

## Dynamika na sieciach

9. Błądzenia losowe w sieciach.
  10. Algorytmy wykrywania społeczności.
  11. Modele agentowe.
- Czym są społeczności (skupienia) w sieciach?
  - Jak je wykrywać?

## Dynamika na sieciach

9. Błądzenia losowe w sieciach.
10. Algorytmy wykrywania społeczności.
11. Modele agentowe.

- Modele agentowe.
- Modele społeczne.
- Modele epidemii.
- Rozprzestrzenianie się plotek, memów, mód itd.

## Zastosowania

12. Sieci społecznościowe.
  13. Systemy rekomendacyjne.
  14. Projekt indywidualne.
  15. Projekt indywidualne.
- analiza sieci społecznościowych.
  - analiza dynamiki w sieci społecznościowych.



## Zastosowania

12. Sieci społecznościowe.
13. Systemy rekomendacyjne.
14. Projekt indywidualne.
15. Projekt indywidualne.

- Jak *optymalnie* wybrać film na wieczór?

## Zastosowania

12. Sieci społecznościowe.
13. Systemy rekomendacyjne.
14. Projekt indywidualne.
15. Projekt indywidualne.

- Tematy do wybrania z przygotowanej listy lub (zalecane!) do zaproponowania samej/samemu.

1.-13. Małe projekty - ilustracje do wykładu.

14.-15. Duży, dwutygodniowy indywidualny projekt.

- Pracujemy wspólnie, metodą projektową – dyskutujemy kolejne etapy rozwiązania.
- Elementy projektowe przeplatane są treściami wykładowymi.
- Każde zadanie ma sprecyzowane narzędzie (Mathematica/Python).

1.-13. Małe projekty - ilustracje do wykładu.

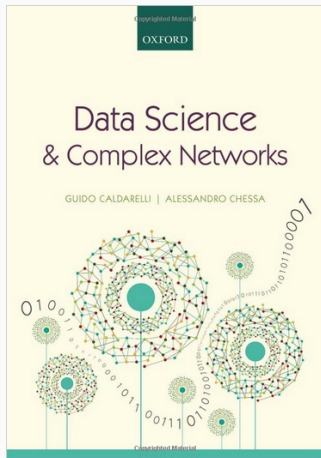
14.-15. **Duży, dwutygodniowy indywidualny projekt.**

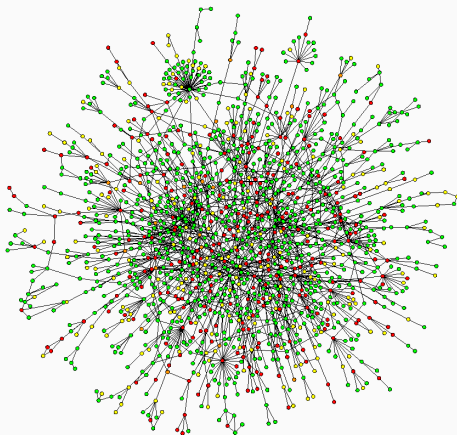
- Tematy do wybrania z przygotowanej listy lub (zalecane!) do zaproponowania samej/samemu.
- Brak wykładów – zajęcia konsultacyjne.
- Samemu należy dobrać odpowiednie narzędzia.

- Materiały na stronie przedmiotu (źródło podstawowe)
- Świat sieci złożonych. Od fizyki do Internetu, A. Fronczak i P. Fronczak (źródło bardzo zalecane)
- Data Science and Complex Networks, G. Caldarelli i A. Chessa (źródło bardzo zalecane)
- Random Graph Dynamics, R. Durrett (źródło bardzo zalecane)
- Network Science, A.-L. Barabási (źródło zalecane)
- Networks. An Introduction, M.E.J. Newman
- Foundation of data science
- ...



Książka bardzo przystępna, niemalże popularnonaukowa, ale jednocześnie bardzo dobry podręcznik. Pierwsza i chyba jedyna po polsku. Podstawowe źródło o tym czym jest *sieciologia*.

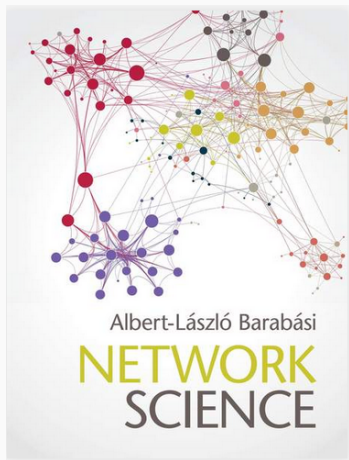




<https://services.math.duke.edu/~rtd/RGD/RGD.html>

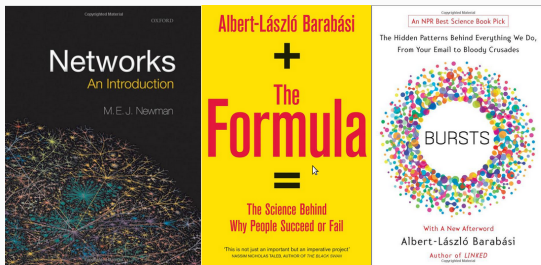
Poważnie matematycznie podejście do sieciologii.





<http://networksciencebook.com/>

Dostępna online, doskonale uzupełnienie *Świata sieci złożonych...*



# Powtórka z teorii grafów

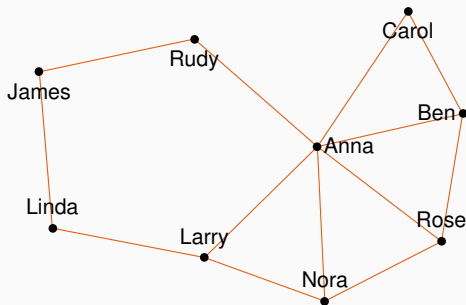
## Definicja

Grafem nazywamy parę  $(V, E)$ , gdzie  $V$  to niepusty zbiór wierzchołków, a  $E$  zbiór krawędzi między nimi.

## Typy grafów

- Grafy proste.
- Grafy skierowane.
- Multigrafy.
- Grafy ważone.
- Grafy warstwowe.
- (Hipergrafy)

Krawędzie to nieuporządkowane pary wierzchołków.



Przykład w oparciu o dane `ExampleData[]` Wolfram Mathematica:

*A social network of a school swimming team.*

# Powtórka z teorii grafów

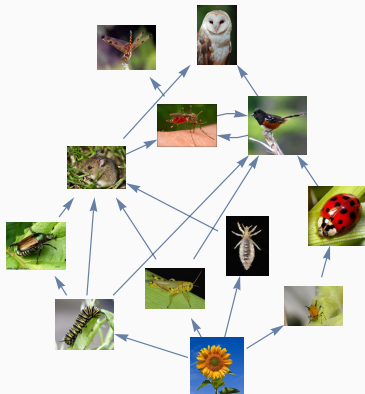
## Definicja

Grafem nazywamy parę  $(V, E)$ , gdzie  $V$  to niepusty zbiór wierzchołków, a  $E$  zbiór krawędzi między nimi.

## Typy grafów

- Grafy proste.
- **Grafy skierowane.**
- Multigrafy.
- Grafy ważone.
- Grafy warstwowe.
- (Hipergrafy)

Krawędzie to uporządkowane pary wierzchołków.



Przykład w oparciu o dane `ExampleData[]` Wolfram Mathematica:

*A simple food web.*

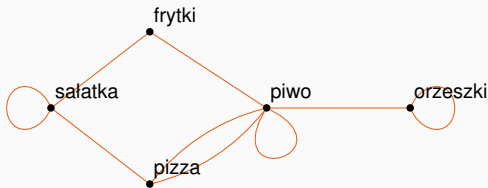
# Powtórka z teorii grafów

## Definicja

Grafem nazywamy parę  $(V, E)$ , gdzie  $V$  to niepusty zbiór wierzchołków, a  $E$  zbiór krawędzi między nimi.

## Typy grafów

- Grafy proste.
- Grafy skierowane.
- **Multigrafy.**
- Grafy ważone.
- Grafy warstwowe.
- (Hipergrafy)



Przykład własny.

Dopuszczamy krawędzie wielokrotne lub pętle.

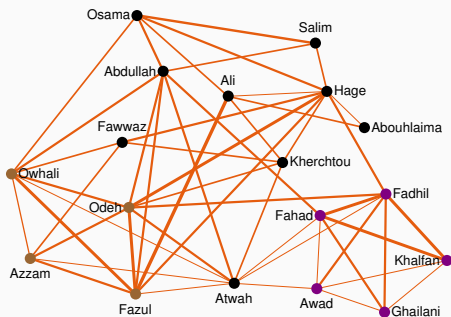
# Powtórka z teorii grafów

## Definicja

Grafem nazywamy parę  $(V, E)$ , gdzie  $V$  to niepusty zbiór wierzchołków, a  $E$  zbiór krawędzi między nimi.

## Typy grafów

- Grafy proste.
- Grafy skierowane.
- Multigrafy.
- **Grafy wagone.**
- Grafy warstwowe.
- (Hipergrafy)



Przykład w oparciu o dane `ExampleData[]` Wolfram Mathematica:

*Terrorist network linked to the 1998 bombings of the US embassies in Kenya and Tanzania.*

Każda z krawędzi posiada pewną wartość (wagę).

# Powtórka z teorii grafów

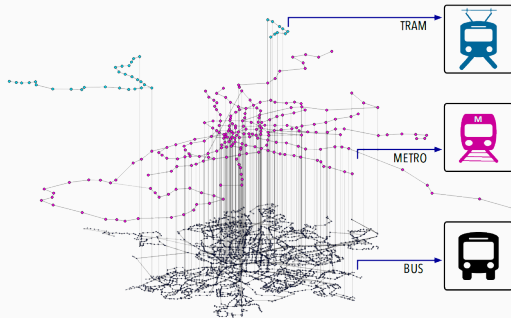
## Definicja

Grafem nazywamy parę  $(V, E)$ , gdzie  $V$  to niepusty zbiór wierzchołków, a  $E$  zbiór krawędzi między nimi.

## Typy grafów

- Grafy proste.
- Grafy skierowane.
- Multigrafy.
- Grafy ważone.
- **Grafy warstwowe.**
- (Hipergrafy)

Krawędzie należą do różnych warstw.



A. Aleta and Y. Moreno, Annual Review of Condensed Matter Physics 10:1, 45-62,

(2019)

# Powtórka z teorii grafów

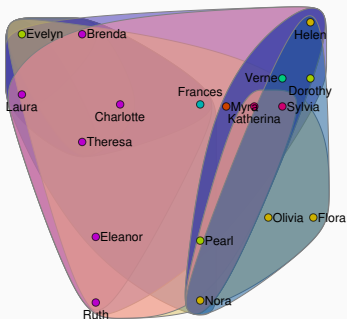
## Definicja

Grafem nazywamy parę  $(V, E)$ , gdzie  $V$  to niepusty zbiór wierzchołków, a  $E$  zbiór krawędzi między nimi.

## Typy grafów

- Grafy proste.
- Grafy skierowane.
- Multigrafy.
- Grafy ważone.
- Grafy warstwowe.
- (Hipergrafy)

Dopuszczamy niebinarne relacje.



Przykład w oparciu o dane `ExampleData[]` Wolfram Mathematica:

*The network of southern women social club.*



## Macierz sąsiedztwa

Macierz sąsiedztwa grafu  $G$  o  $N$  wierzchołkach to macierz  $A = [a_{ij}]$  o wymiarach  $N \times N$ , taka, że

$$a_{ij} = \text{siła krawędzi pomiędzy } i \text{ a } j.$$

## Lista sąsiedztwa

Listą sąsiedztwa grafu  $G$  nazywamy listę jego krawędzi.

## Stopień wierzchołka

Stopień wierzchołka  $k_i$  to liczba połączeń wężła  $i$ -tego z innymi wierzchołkami.

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji}.$$

## Stopnie wierzchołków – grafy skierowane

$$k_i^{in} \neq k_i^{out},$$

$$k_i^{in} = \sum_{j=1}^N a_{ij}, \quad k_i^{out} = \sum_{j=1}^N a_{ji}.$$

## Droga

**Drogą w grafie**  $G = (V, E)$  nazywamy ciąg krawędzi  $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_n, v_{n+1}\}\}$ , gdzie każde  $v_i \in V$ , a  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . **Długością drogi** nazywamy  $n$ .

## Odległość

**Odległością**  $d(i, j)$  wierzchołka  $i$  od wierzchołka  $j$  w grafie  $G$  nazywamy długość najkrótszej drogi łączącej  $i$  z  $j$ .

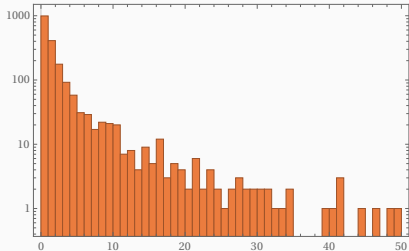
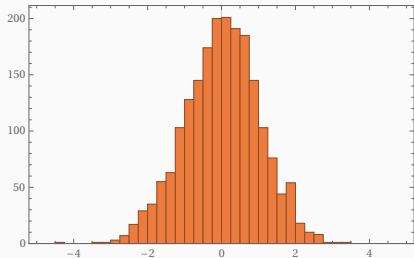
## Spójność grafu

Graf jest **spójny** gdy dla każdej jego pary wierzchołków istnieje łącząca je droga.

W grafach skierowanych rozróżniamy spójność słabą i silną.

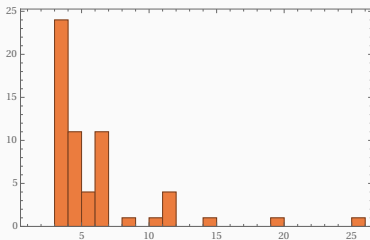
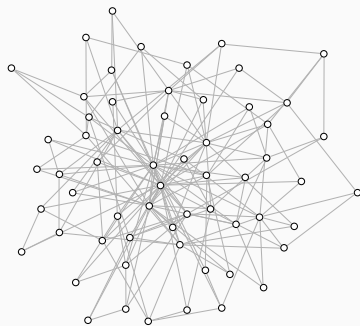
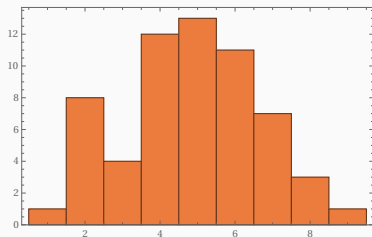
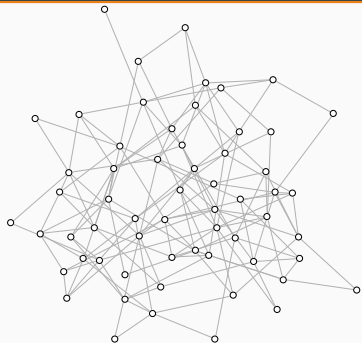
**Pytanie:** Która jest która?

# Grube ogony

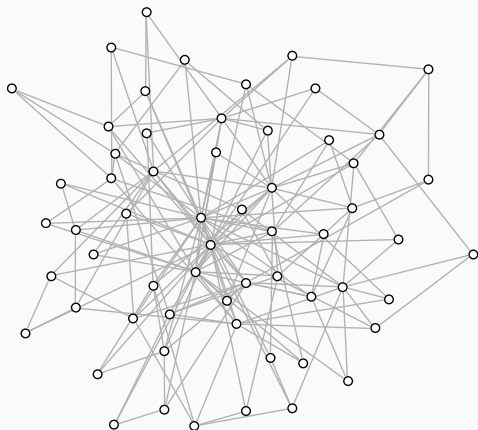


W przypadku rozkładów z grubymi ogonami zawodzą intuicje!

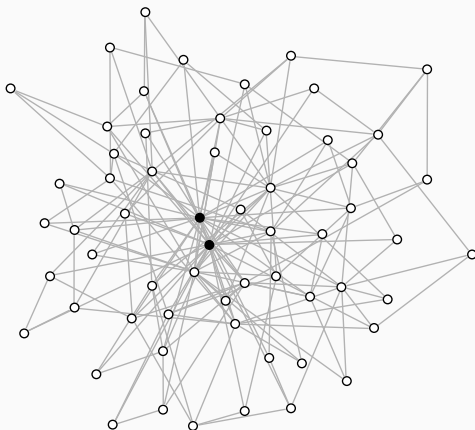
# Grube ogony w sieciach – próg epidemii



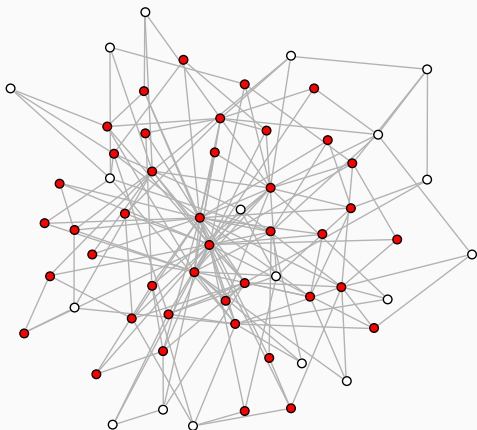
# Grube ogony w sieciach – próg epidemii



# Grube ogony w sieciach – próg epidemii

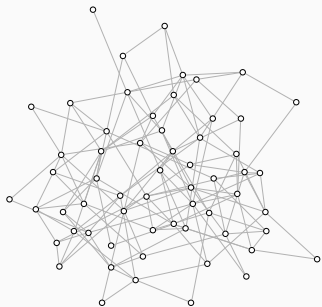


# Grube ogony w sieciach – próg epidemii

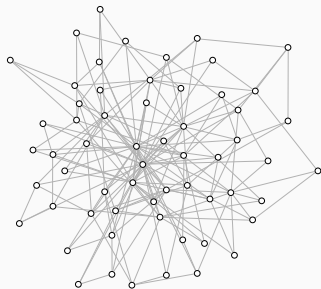




# Grube ogony w sieciach – próg epidemii



$$\lambda_c = \frac{1}{\langle k \rangle} > 0$$



$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \rightarrow 0$$

Więcej o modelach epidemii na sieciach na wykładzie 11.

## Modele sieci (5-7,9,10)

- Sieci deterministyczne vs. sieci przypadkowe,
- Sieci statyczne vs. ewoluujące,

## Dynamika na sieciach (11,12)

- dyfuzja (AKA błądzenia losowe),
- formowanie się opinii w społeczeństwie,
- przypadkowe uszkodzenia i celowe ataki,
- epidemie.

## Wolfram Mathematica

- obliczenia symboliczne,
- programowanie funkcyjne,
- wygodna obsługa (nie dużych) macierzy.

## Python/R

- według Państwa preferencji.

# Podsumowanie

---

Zaproponuj dane grafowe na najbliższe zajęcia.

Dziękuję za uwagę!



**Politechnika  
Warszawska**

**Unia Europejska**  
Europejski Fundusz Społeczny



Zadanie 10 pn.

„Przygotowanie i uruchomienie nowego kierunku studiów na studiach II stopnia  
- Inżynieria i Analiza Danych (IAD)”

realizowane jest w ramach projektu  
„NERW PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”  
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego