

Modelowanie i analiza sieci złożonych

V. Statyczne grafy przypadkowe

Grzegorz Siudem

Politechnika Warszawska



Politechnika
Warszawska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny



Zadanie 10 pn.

„Przygotowanie i uruchomienie nowego kierunku studiów na studiach II stopnia
- Inżynieria i Analiza Danych (IAD)”

realizowane jest w ramach projektu
„NERW PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Projekt

Sieci o zadanym hamiltonianie

Rozważmy przestrzeń wszystkich grafów o N wierzchołkach
czyli zbiór $M_N = \mathbb{M}^{N \times N}(\{0, 1\})$. Chcemy zdefiniować na nim rozkład
prawdopodobieństwa.

Maksymalizujemy entropię

$$- \sum_{G \in M_N} \mathcal{P}(G) \ln \mathcal{P}(G),$$

Pod pewnym warunkiem $f(\mathcal{P}(G)) = 0$,

Co prowadzi do metody mnożników Lagrange'a

$$\mathcal{L}[\mathcal{P}(G)] = - \sum_{G \in M_N} \mathcal{P}(G) \ln \mathcal{P}(G) + \lambda f(\mathcal{P}(G))$$

Pozostaje *tylko* rozwiązać

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{P}(G)} = 0.$$

Przykład - Ćwiczenie 1.

Ćwiczenie 2.

Zaimplementuj funkcję zwracającą macierz sąsiedztwa jednej realizacji grafu ER przy zadanych wartościach N i p . Uwaga na pułapkę!

Ćwiczenie 2.

Zaimplementuj funkcję zwracającą macierz sąsiedztwa jednej realizacji grafu ER przy zadanych wartościach N i p . Uwaga na pułapkę!

Ćwiczenie 3.

Narysuj uzyskany graf.

Ćwiczenie 2.

Zaimplementuj funkcję zwracającą macierz sąsiedztwa jednej realizacji grafu ER przy zadanych wartościach N i p . Uwaga na pułapkę!

Ćwiczenie 3.

Narysuj uzyskany graf.

Ćwiczenie 4.

Narysuj histogram stopni wierzchołków.

Ćwiczenie 2.

Zaimplementuj funkcję zwracającą macierz sąsiedztwa jednej realizacji grafu ER przy zadanych wartościach N i p . Uwaga na pułapkę!

Ćwiczenie 3.

Narysuj uzyskany graf.

Ćwiczenie 4.

Narysuj histogram stopni wierzchołków.

Ćwiczenie 5.

Jakiego rozkładu stopni wierzchołków się spodziewamy?

Ćwiczenie 6.

Podaj *matematyczne* uzasadnienie zastosowanego poissonowskiego przybliżenia.

Ćwiczenie 6.

Podaj *matematyczne* uzasadnienie zastosowanego poissonowskiego przybliżenia.

Ćwiczenie 7.

Zestaw na jednym wykresie wyniki symulacji i oba uzyskane analitycznie rozkłady. Przetestuj stosowne hipotezy.

Ćwiczenie 6.

Podaj *matematyczne* uzasadnienie zastosowanego poissonowskiego przybliżenia.

Ćwiczenie 7.

Zestaw na jednym wykresie wyniki symulacji i oba uzyskane analitycznie rozkłady. Przetestuj stosowne hipotezy.

Ćwiczenie 8.

Przedyskutuj wyniki poprzedniego zadania w zależności od wartości parametrów p i N .

Ćwiczenie 6.

Podaj *matematyczne* uzasadnienie zastosowanego poissonowskiego przybliżenia.

Ćwiczenie 7.

Zestaw na jednym wykresie wyniki symulacji i oba uzyskane analitycznie rozkłady. Przetestuj stosowne hipotezy.

Ćwiczenie 8.

Przedyskutuj wyniki poprzedniego zadania w zależności od wartości parametrów p i N .

Uwaga!

Ćwiczenia 1-8 warte są łącznie 20% punktów za projekt.

Przyjmując przybliżenie poissonowskie wyznaczmy wariancję

$$\mathbb{E}(K) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ke^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k}{k!} = \dots = \langle k \rangle,$$

$$\mathbb{E}(K^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k}{k!} = \dots = \langle k \rangle + \langle k \rangle^2.$$

$$\text{Var}(K) = \mathbb{E}(K^2) - [\mathbb{E}(K)]^2 = \langle k \rangle^2$$

P5.1 Uzupełnij brakujące rachunki.[10%]

Tak mała wariancja nie pojawia się w danych rzeczywistych...

Współczynnik gronowania

$$\langle C \rangle = p.$$

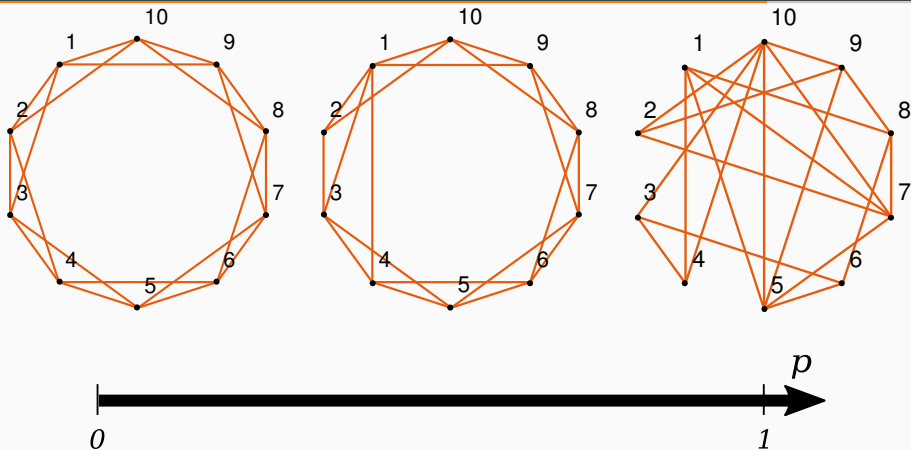
P5.2 Sprawdź symulacyjnie powyższy wynik analityczny. [20%]

Uogólnienie grafów ER

$$\begin{bmatrix} [p_{11}] & [p_{12}] & \dots & [p_{1N}] \\ [p_{21}] & [p_{22}] & \dots & [p_{2N}] \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ [p_{N1}] & [p_{N2}] & \dots & [p_{NN}] \end{bmatrix}$$

P5.3 Wygeneruj i narysuj graf składający się z 4 społeczności każda z $N = 20$ węzłami oraz prawdopodobieństwem połączenia wewnątrz społeczności większym niż pomiędzy nimi. Narysuj wynik. Jak zależy od wartości parametrów? [40%]

Model Watts-Strogatza



P5.4 Narysuj wykres zależności uśrednionego współczynnika gronowania sieci WS w funkcji jej parametru p . [30%]

- P5.5 Z pomocą Matematyki (lub bez niej) rozwiąż i opisz model $G_{N,E}$. [50%]
- P5.6 Zaimplementuj model konfiguracyjny i przetestuj kiedy jego procedura zbiega. [50%]
- P5.7 Wyznacz sumę statystyczną i rozkład sieci o zadanym hamiltonianie dla przypadku z ustaloną liczbą krawędzi. [50%]



**Politechnika
Warszawska**

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny



Zadanie 10 pn.

„Przygotowanie i uruchomienie nowego kierunku studiów na studiach II stopnia
- Inżynieria i Analiza Danych (IAD)”

realizowane jest w ramach projektu
„NERW PW. Nauka – Edukacja – Rozwój – Współpraca”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dziękuję za uwagę!