

Zadania z fizyki statystycznej

14 stycznia

Zadanie 7.1 (Rozdział 5.4 w [4], zadanie 6.11 w [1])

Wykorzystując przybliżenie średniego pola wyznacz równania uwikłane opisujące średnią wartość spinu $\langle s \rangle$ przy niezerowym polu zewnętrznym $H \neq 0$ dla

- a) ferromagnetyka,
- b) paramagnetyka,
- c) antyferromagnetyka.

Następnie wyznacz te wartości. Najlepiej graficznie.

7 stycznia

Zadanie 6.1 (Zadanie 6.2 b) w [1])

Rozważ jednowymiarowy, otwarty model Isinga złożony z N spinów. Oblicz sumę statystyczną dla tego modelu, inaczej niż na wykładzie, stosując we wzorze na energię podstawienie $\tau_i = s_i s_{i+1}$ dla $1 \leq i < N$.

Zadanie 6.2 (Zadanie 6.4 w [1] oraz rozdział 16 w [3])

Korzystając z *metody macierzy transferu*, oblicz sumę statystyczną dla zamkniętego (czyli takiego, gdzie utożsamiono końce, czyli $s_{N+1} \equiv s_1$) modelu Isinga złożonego z N spinów, umieszczonego w niezerowym zewnętrznym polu magnetycznym H .

Uwaga:

W rozwiązaniu zadania niezbędne będzie przypomnienie informacji o diagonalizacji macierzy i podstawowych własnościach śladu macierzy z algebry liniowej. Polecam rozdział 8.2 w [8]. Wersja dla mniej wymagających: <http://pl.wikipedia.org/wiki/Diagonalizacja> http://pl.wikipedia.org/wiki/%C5%9A%AD_macierzy.

Zadanie 6.3 (Zadanie 6.8) w [1])

Pokaż, że wielka suma statystyczna $\mathcal{Z}_G$ gazu sieciowego o energii

$$E_G = -\varepsilon \sum_{\langle i,j \rangle} c_i c_j \quad \text{dla} \quad c_i, c_j \in \{0, 1\}$$

daje się zapisać jako

$$\mathcal{Z}_G = e^{\beta E_0} Z_I(J, H),$$

gdzie Z_I oznacza sumę statystyczną modelu Isinga zdefiniowanego na tej samej sieci, J to stałą sprzężenia między spinami Isinga, a H - pole magnetyczne działające na te spiny. Ponadto wykaż, że zachodzą następujące relacje

$$\begin{aligned} J &= \frac{\varepsilon}{4}, \\ H &= \frac{\mu}{2} + \frac{z\varepsilon}{4}, \\ E_0 &= \left(\frac{\mu}{2} + \frac{z\varepsilon}{8} \right) N, \end{aligned}$$

gdzie μ jest potencjałem chemicznym rozważanego gazu sieciowego, z liczbą koordynacyjną każdego węzła sieci, a N liczbą wszystkich węzłów w tej sieci.

Wskazówka:

Zastosuj podstawienie $c_i = \frac{s_i + 1}{2}$.

Zadanie 6.4 (Zadanie 6.10 w [1])

Pokaż, że energię stopu dwuskładnikowego (w naszym przypadku mosiądzu) daną wzorem

$$E_M = -\frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} J_{CuCu}(1+s_i)(1+s_j) - \frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ZnZn}(1-s_i)(1-s_j) + \\ - \frac{1}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} J_{CuZn} [(1+s_i)(1-s_j) + (1-s_i)(1+s_j)],$$

można zapisać w tej samej postaci co energię modelu Isinga

$$E_M = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i + const,$$

gdzie $J = \frac{J_{CuCu} + J_{ZnZn} - 2J_{CuZn}}{4}$.

17 grudnia

Zadanie 5.1 (Zadanie 5.24 w [1])

Prawo przesunięć Wiena.

Na podstawie wykładu zapisz gęstość energii promieniowania elektromagnetycznego w temperaturze T (tzw. rozkład Plancka). Udowodnij, że jej maksimum zmienia się liniowo z temperaturą, czyli $\omega_{max} = A \frac{kT}{\hbar}$.

Wskazówki:

Zastosuj podstawienie $x = \beta\omega\hbar$, otrzymane równanie uwikłane rozwiąż numerycznie lub przybliżając $e^x \approx 1 + x$.

Zadanie 5.2 (Zadania 4.6, 4.7, 4.9, 5.11, 5.12, 5.13, w [1] oraz rozdział 3.5 w [7])

Wyprowadź równania stanu dla jedno-, dwu- oraz trójwymiarowego gazu cząstek kwantowych (zarówno dla fermionów jak i dla bozonów). W tym celu

- Wyznacz liczbę stanów $\Gamma(E)$ o energii $\leq E$ odpowiadających cząstce kwantowej umieszczonej w n -wymiarowej studni potencjału o wymiarach L^n ($n = 1, 2, 3$).
- Na podstawie powyższego podpunktu wyznacz odpowiednie funkcje gęstości stanów. Jak zależą one od energii E ?
- Czy funkcje gęstości stanów zależą od spinu cząstek?
- Korzystając ze wzoru wyprowadzonego na wykładzie $pV = kT \ln \mathcal{Z}$ i z wcześniejszych wyników oblicz równania stanu gazów kwantowych dla wymiarów 1, 2, 3.

Wskazówka:

$$g(E)dE = d\Gamma(E).$$

10 grudnia

Zadanie 4.1 (Zadania 5.3 i 5.4 w [1])

Oblicz wielką sumę statystyczną klasycznego gazu doskonałego o temperaturze T i potencjale chemicznym μ . Pokaż, że prawdopodobieństwo znalezienia N cząstek tego gazu w elemencie objętości V jest opisane rozkładem Poissona

$$\mathbb{P}(N) = \frac{e^{-\langle N \rangle} \langle N \rangle^N}{N!},$$

gdzie $\langle N \rangle = V\lambda^{-3}e^{\beta\mu}$, a $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$ opisuje długość termicznej fali de Broglie'a.

Wskazówka:

Pokaż najpierw, że dla układu otwartego, składającego się z nieoddziaływających cząstek oraz będącego w kontakcie z otoczeniem $T, \mu = \text{const}$ sumę statystyczną można zapisać w postaci

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = \exp[e^{\beta\mu} Z(T, V, 1)].$$

Wykorzystaj też wartość sumy statystycznej wyznaczonej w zadaniu 3.1. Dlaczego można skorzystać z tego wyniku?

Zadanie 4.2 (Ćwiczenia nr 14 (tifs13.pdf) w [3])

Oblicz wielką sumę statystyczną oraz znajdź średnią liczbę cząstek w ustalonej temperaturze T dla tzw. maxwellonów. Maxwellony to “coś pomiędzy fermionami, a bozonami” - i -ty poziom energetyczny może być dla nich n_i -krotnie zdegenerowany, gdzie $n_i \neq \infty$ (to nie bozony) i $n_i \neq 0$ (to nie fermiony, które są po prostu niezdegenerowane).

Zadanie 4.3 (Zadanie 5.10 w [1], rozdziały 2.2, 4.2 i 4.5 w [4])

Wyznacz fluktuacje liczby cząstek kwantowych dla fermionów i bozonów o energii ε . Sprawdź zachowanie w niskich temperaturach oraz w granicy klasycznej.

3 grudnia

Zadanie 3.1 (Rozdział 9.2 w [3], zadanie 4.31 w [1])

Zastosuj rozkład kanoniczny do gazu doskonałego. Wyznacz równanie stanu i ciepło właściwe. Porównaj z rozwiązaniem zadania 1.4.

Zadanie 3.2 (Rozdziały 9.3, 9.4 w [3], zadanie 4.16 w [1])

Paradoks Gibbsa: sprawdź, że, energia swobodna i entropia obliczone dla gazu doskonałego (zadanie 3.1) przy pomocy rozkładu kanonicznego nie są wielkościami ekstensywnymi. Popraw wynik (porównaj z zadaniem 1.1 pamiętając, że z naszego punktu widzenia cząstki są nierozróżnialne).

Zadanie 3.3 (Rozdział 9.4 w [3], zadanie 12.10 w [2])

Model Einsteina ciepła właściwego ciał stałych. Oblicz ciepło właściwe zbioru N niezależnych kwantowych oscylatorów harmoniczych. Tym razem w rozkładzie kanonicznym. Porównaj z zadaniem 2.3.

Zadanie 3.4 (Zadanie 12.4 w [2])

Rozwinięcie podwójnie splecionej molekuly DNA jest podobne do rozpinania zamka błyskawicznego. DNA ma N ogniów, z których każde może być w jednym z dwóch stanów: stan zamknięty o energii 0 i stan otwarty o energii ε . Ogniwo może się otworzyć jedynie kiedy jego sąsiad po lewej jest już otwarty. Na schemacie poniżej oznaczono ogniwa otwarte przez $[*]$, a ogniwa zamknięte przez $[]$.

$[*][*][*][*][*][*][*][*][] [] [] [] [] [] [] [] []$

Wyznacz sumę statystyczną dla łańcucha DNA. Znajdź średnią liczbę otwartych ogniów w granicy termodynamicznej ($N \gg 1$).

Wskazówka:

Średnią liczbę cząstek najłatwiej będzie policzyć wprost z definicji, bez formalizmu termodynamicznego, choć można też wyznaczyć ciepło właściwe i z niego otrzymać szukaną wielkość.

Zadanie 3.5 (Zadanie 12.9 w [2])

Rozważ zbiór N nieoddziałujących jednowymiarowych oscylatorów harmoniczych. Oblicz sumę statystyczną zakładając, że element przestrzeni fazowej wynosi $dpdq/\tau$, gdzie τ jest czynnikiem określającym skalę. Oblicz entropię, energię wewnętrzną i ciepło właściwe c_V .

19 listopada

Zadanie 2.1 (Zadanie 4.20 w [1])

Zinterpretuj trzecią zasadę termodynamiki z punktu widzenia fizyki statystycznej.

Zadanie 2.2 (Rozdział 2.1 w [4])

Sprawdź równość średniej czasowej i średniej po zespole dla pojedynczego oscylatora harmonicznego.

Wskazówka:

Pole elipsy o półosiach a i b wynosi $P = \pi ab$.

Zadanie 2.3 (Rozdział 8.8 w [3] i zadanie 4.11 w [1])

Model Einsteina ciepła właściwego ciał stałych. Oblicz ciepło właściwe zbioru N niezależnych oscylatorów harmoniczych.

Zadanie 2.4 * (Zadanie 5.9 w [2], błędzenia losowe w ogólności w rozdziale 2.5 w [6])

Atom w gazie doświadcza częstych i trudnych do przewidzenia zderzeń. Prostą metodą opisu jego ruchu jest założenie, że wykonuje on błędzenie przypadkowe. W tym zadaniu zajmiemy się błędzeniem przypadkowym w jednym wymiarze.

Rozważ cząstkę (znajdącą się początkowo w $x = 0$) wykonującą kolejne przypadkowe kroki wzdłuż osi x . Kroki są o jednakowej długości, a prawdopodobieństwa kroku w prawo i lewo równe sobie i równe $\frac{1}{2}$. Niech $W(k, n)$ będzie prawdopodobieństwem, że cząstka znajduje się k kroków od punktu początkowego po wykonaniu n kroków przypadkowych.

9 i 12 listopada

Zadanie 1.1 (Zadanie 4.4 w [1])

Rozważ układy N niezależnych cząstek

- a) klasycznych,
- b) bozonów,
- c) fermionów.

Zakładając, że pojedyncza cząstka może przebywać w R stanach jednocząstkowych, oblicz, ile wynosi liczba mikrostanów każdego z wymienionych układów.

Zadanie 1.2 (Rozdział 8.10 w [3], rozdział 2.2 w [4])

Rozważ układ złożony z N strzałek, z których każda może przyjmować dwa stany $\uparrow$ lub $\downarrow$, jak na rysunku poniżej.

$\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow \quad \downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow$

Przyjmując, że energia pojedynczej strzałki wynosi odpowiednio ε dla $\uparrow$ oraz $-\varepsilon$ dla $\downarrow$ oblicz liczbę mikrostanów $\Delta\Gamma$ sprzyjających makrostanowi o energii E oraz entropię S , temperaturę T oraz energię swobodną F układu w stanie równowagi. Kiedy entropia przyjmuje wartość maksymalną? Co oznaczają ujemne temperatury?

Wskazówki:

Wprowadź parametr porządku $x = 2n - N$, dla n - liczby strzałek $\uparrow$.

Wzór Stirlinga $\ln n! \approx n \ln n - n$.

Uwaga:

Łańcuch rozważany w tym zadaniu, pomimo pozornego podobieństwa, nie jest modelem Isinga!

Zadanie 1.3 (Rozdział 3.3 w [5])

Wprowadź wzór Stirlinga podany w poprzednim zadaniu.

Wskazówki:

W metodzie wyprowadzenia zaproponowanej w cytowanym podręczniku przydatne okażą się wzory:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} x^i}{i} \quad \text{dla } x \in (-1, 1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Zadanie 1.4 (Zadania 5.6 i 5.7 w [2], rozdział 8.8 w [3])

Zastosuj rozkład mikrokanoniczny do gazu doskonałego. Wyznacz równanie stanu i ciepło właściwe.

Literatura

- [1] A. Fronczak, *Zadania i problemy z rozwiązaniami z termodynamiki i fizyki statystycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2006.
- [2] K. Huang, *Podstawy fizyki statystycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006.
- [3] M. Wierzbicki, *Termodynamika i Fizyka Statystyczna w zadaniach*, <http://if.pw.edu.pl/~wierzba/zajecia/tifs08/skrypt.html>.
- [4] A. Zagórski, *Fizyka statystyczna*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1994.
- [5] A. Zagórski, *Metody matematyczne fizyki*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2001.
- [6] A. Iwanik, J. K. Misiewicz *Wykłady z procesów stochastycznych z zadaniami. Część pierwsza - procesy Markowa*, Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra, 2009.
- [7] L. Adamowicz *Mechanika Kwantowa. Formalizm i zastosowania*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2005.
- [8] J. Klukowski, I. Nabiałek *Algebra dla studentów*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2004.