

**Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki**  
**Pracownia Fizyki i Techniki Jądrowej**

Instrukcja do ćwiczenia laboratoryjnego:

**Spektrometria promieniowania gamma**

Opracowanie:

**prof. dr hab. Jan Pluta, [pluta@if.pw.edu.pl](mailto:pluta@if.pw.edu.pl), Gmach Fizyki, pok. 117c**

**Warszawa, 2012**

Materiał dydaktyczny dla Wydziału Fizyki Politechniki Warszawskiej, opracowany w ramach zadania nr 33: „Modyfikacja kształcenia na Wydziale Fizyki w zakresie wykorzystywania technik i technologii jądrowych w gospodarce narodowej” projektu „Program Rozwojowy Politechniki Warszawskiej” współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego (Program Operacyjny Kapitał Ludzki)



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**PROGRAM ROZWOJOWY**  
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

## Spis treści:

### **1. Wiadomości podstawowe**

- 1.1. Natura promieniowania gamma
- 1.2. Przemiana gamma
- 1.3. Propagacja promieniowania gamma w ośrodku materialnym
- 1.4. Detekcja promieniowania gamma

### **2. Aparatura pomiarowa**

- 2.1. Układ pomiarowy
- 2.2. Program „Maestro”
- 2.3. Ustawienia programu Maestro

### **3. Wykonanie ćwiczenia**

- 3.1. Uruchomienie aparatury
- 3.2. Kalibracja spektrometru
- 3.3. Pomiary widma nieznanego źródła promieniotwórczego
- 3.4. Pomiar tła

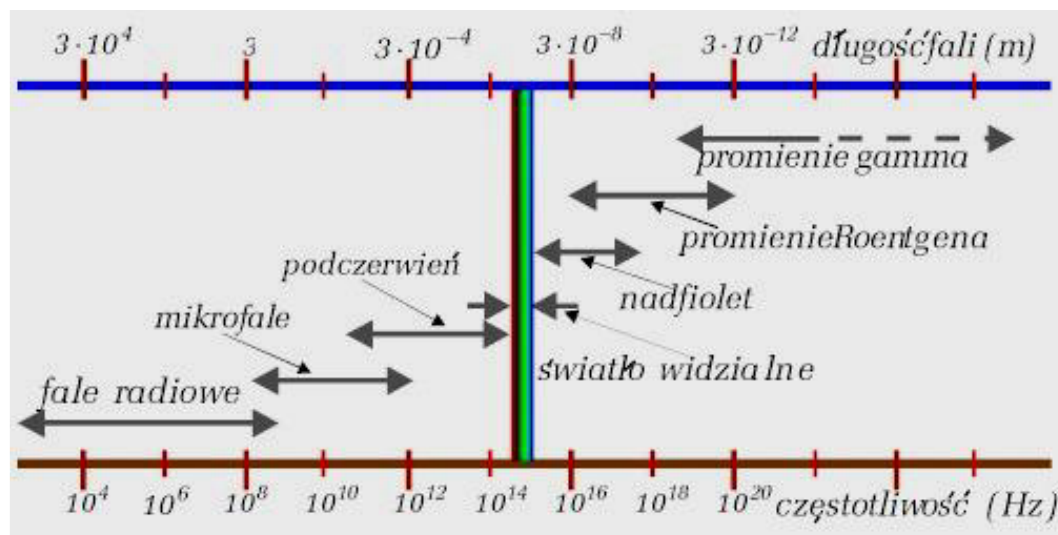
### **4. Opracowanie wyników i przygotowanie sprawozdania**

### **5. Literatura pomocnicza**

### **6. Dodatek 1: Związki kinematyczne w efekcie Comptona**

## 1.1. Natura promieniowania gamma

Na rysunku poniżej pokazane jest widmo fal elektromagnetycznych w funkcji częstotliwości i długości fali. Promieniowanie gamma to fale elektromagnetyczne o największych częstotliwościach i najmniejszych długościach fal.



Rys. 1.1.1. Widmo fal elektromagnetycznych

Zakres długości fal i częstotliwości odpowiadających promieniowaniu gamma nie jest precyzyjnie zdefiniowany i częściowo przekrywa się z zakresem promieniowania rentgenowskiego. Można przyjąć, że długości fal i częstotliwości spełniające odpowiednio warunki:  $\lambda < 10^{-10} \text{ m}$  i  $\nu > 10^{18} \text{ Hz}$ , odnoszą się do promieniowania gamma. Różnice pomiędzy promieniowaniem rentgenowskim i promieniowaniem gamma dotyczą głównie mechanizmu emisji. Pierwsze jest emitowane w lampach rentgenowskich i ma złożoną strukturę o widmie ciągłym i dyskretnym, promieniowanie gamma emitowane przez źródła promieniotwórcze ma charakter dyskretny, emitowane w akceleratorach i zderzeniach jądrowych osiąga bardzo wysokie energie o widmie ciągłym.

Zgodnie z fizyką kwantową, energia odpowiadająca kwantom fal elektromagnetycznych (fotonom) o danej częstotliwości  $\nu$  wynosi

$$E_\gamma = h \nu \quad (1.1.1)$$

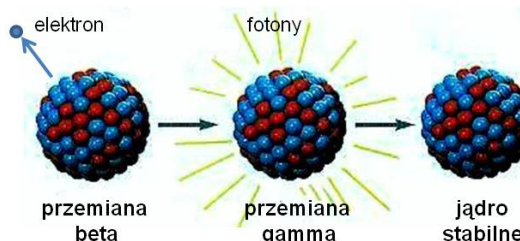
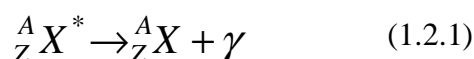
gdzie  $h$  jest stałą Plancka:  $h/2\pi = 6.58 \dots \text{ MeV} \cdot \text{s}$ .

Podanej wyżej częstotliwości  $\nu = 10^{18} \text{ Hz}$  odpowiada w przybliżeniu energia ok.  $4 \text{ keV}$ . Przyjmuje się, że promieniowanie gamma, to fotony o energiach powyżej dziesięciu  $\text{keV}$ .

Falowa natura promieniowania elektromagnetycznego tłumaczy wiele zjawisk optycznych, np. interferencję, dyfrakcję czy polaryzację. W obszarze długości fal odpowiadających promieniowaniu gamma obserwujemy jednak zjawiska, których nie można opisać stosując formalizm fal elektromagnetycznych. Zjawiska te opisuje się traktując promieniowanie gamma jako strumień fotonów.

## 1.2. Przemiana gamma

**Przemiana gamma** jest najczęściej skutkiem wtórnym przemian i reakcji jądrowych. Jądra tworzone w tych przemianach i będące w stanie wzbudzonym na ogół bardzo szybko (w czasie rzędu  $10^{-12}$  s) ulegają przemianie gamma polegającej na przejściu jądra ze stanu wzbudzonego do stanu podstawowego poprzez emisję kwantu pola elektromagnetycznego – fotonu, co można zapisać następująco:



Gwiazdka oznacza tu jądro w stanie wzbudzonym.

W przemianie tej obie liczby: atomowa i masowa pozostają niezmienione, zmienia się natomiast energia wzbudzenia jądra. Energia wyemitowanego fotonu równa jest różnicy energii wzbudzenia jądra przed i po przemianie.

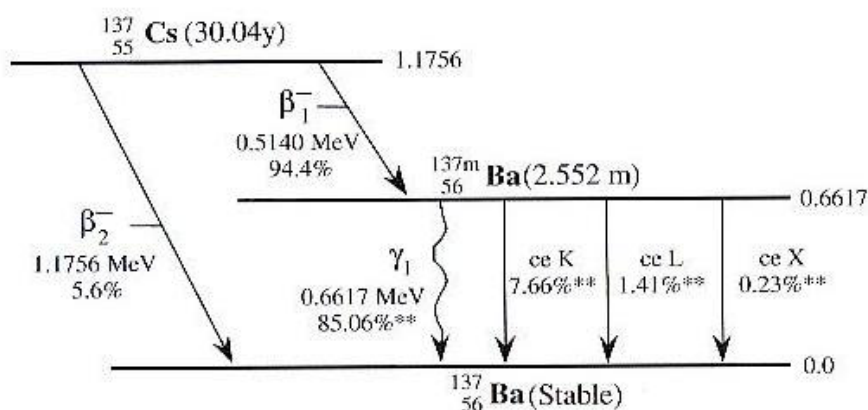
Do przemiany gamma zalicza się też proces, w którym w miejsce emisji fotonu następuje wyemitowanie elektronu z jednej z powłok atomowych (tzw. **konwersja wewnętrzna**, co schematycznie może być zapisane jako



Procesy emisji fotonu lub elektronu wewnętrznej konwersji są procesami konkurencyjnymi. Stosunek prawdopodobieństwa emisji elektronu do prawdopodobieństwa emisji fotonu nazywa się **współczynnikiem wewnętrznej konwersji**. Wartości tych współczynników są wyznaczone i podawane jako jedna z wielkości charakteryzujących daną przemianę gamma. Określa się także cząstkowe współczynniki charakteryzujące prawdopodobieństwo emisji elektronu z poszczególnych powłok atomowych.

W niektórych przypadkach przemiana gamma następuje z pewnym opóźnieniem, które może nawet dochodzić do kilku godzin. Utrzymywany wtedy stan wzbudzony nazywa się **stanem metastabilnym lub izomerycznym**, a opóźnione przejście do stanu podstawowego, przejściem izomerycznym.

Jako przykład, na Rys. 1.2.1 pokazany jest schemat rozpadu promieniotwórczego (przemiany beta-minus) izotopu cezu  ${}^{137}\text{Cs}$ . W wyniku przemiany powstaje jądro izotopu baru  ${}^{137m}\text{Ba}$  w metastabilnym stanie wzbudzonym, co wyraża symbol „m” obok liczby masowej.



Rys.1.2.1 Schemat rozpadu beta jądra  $^{137}\text{Cs}$  oraz przemiany gamma w jądrze  $^{137m}\text{Ba}$  [1].

Widzimy, że de ekscytacja stanu wzbudzonego w jądrze baru następować może albo przez emisję fotonu (strzałka w postaci wężyka skierowana w dół), albo poprzez emisję elektronu z jednej z powłok atomowych (strzałki pionowe). Symbole: K, L, X odpowiadają emisji elektronów odpowiednio z powłok: K, L i dalszych. Energie elektronów wewnętrznej konwersji są pomniejszone o energię wiązania elektronu na danej powłoce atomowej. Podane na rysunku informacje o częstości danego przejścia określone są przez współczynniki wewnętrznej konwersji podane w procentach.

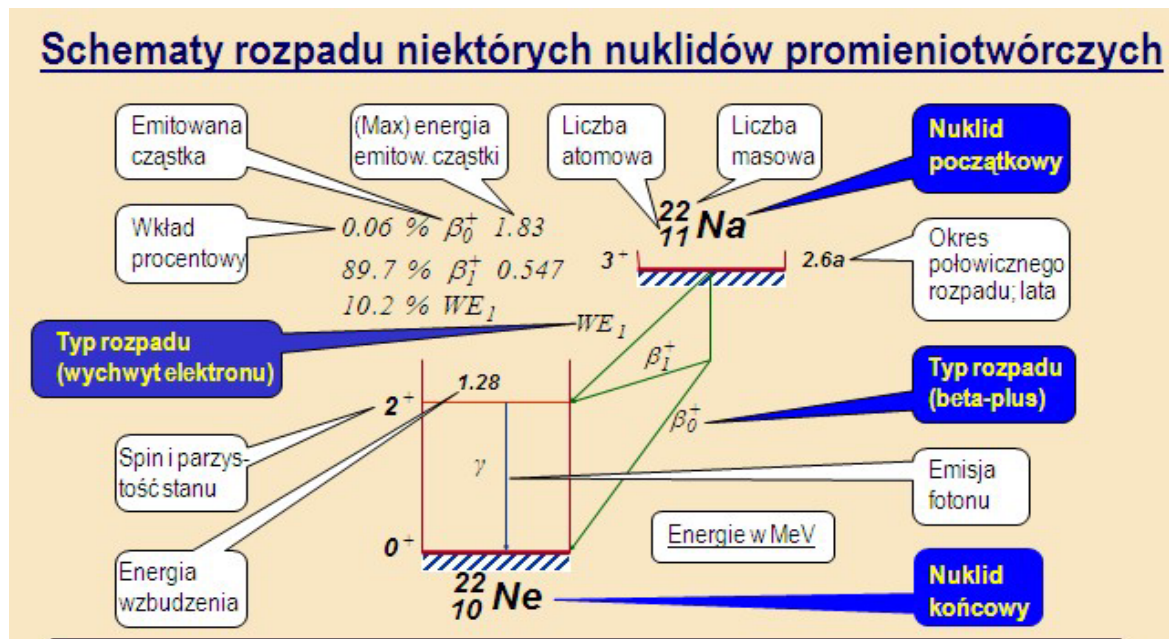
### Schematy przemian promieniotwórczych

Charakterystyczne cech przemian promieniotwórczych podane są na schematach, które w formie graficznej i liczbowej obrazują jakościowe i ilościowe relacje pomiędzy poszczególnymi elementami składowymi danej przemiany. Poniżej przedstawione są schematy wybranych rozpadów promieniotwórczych [2].

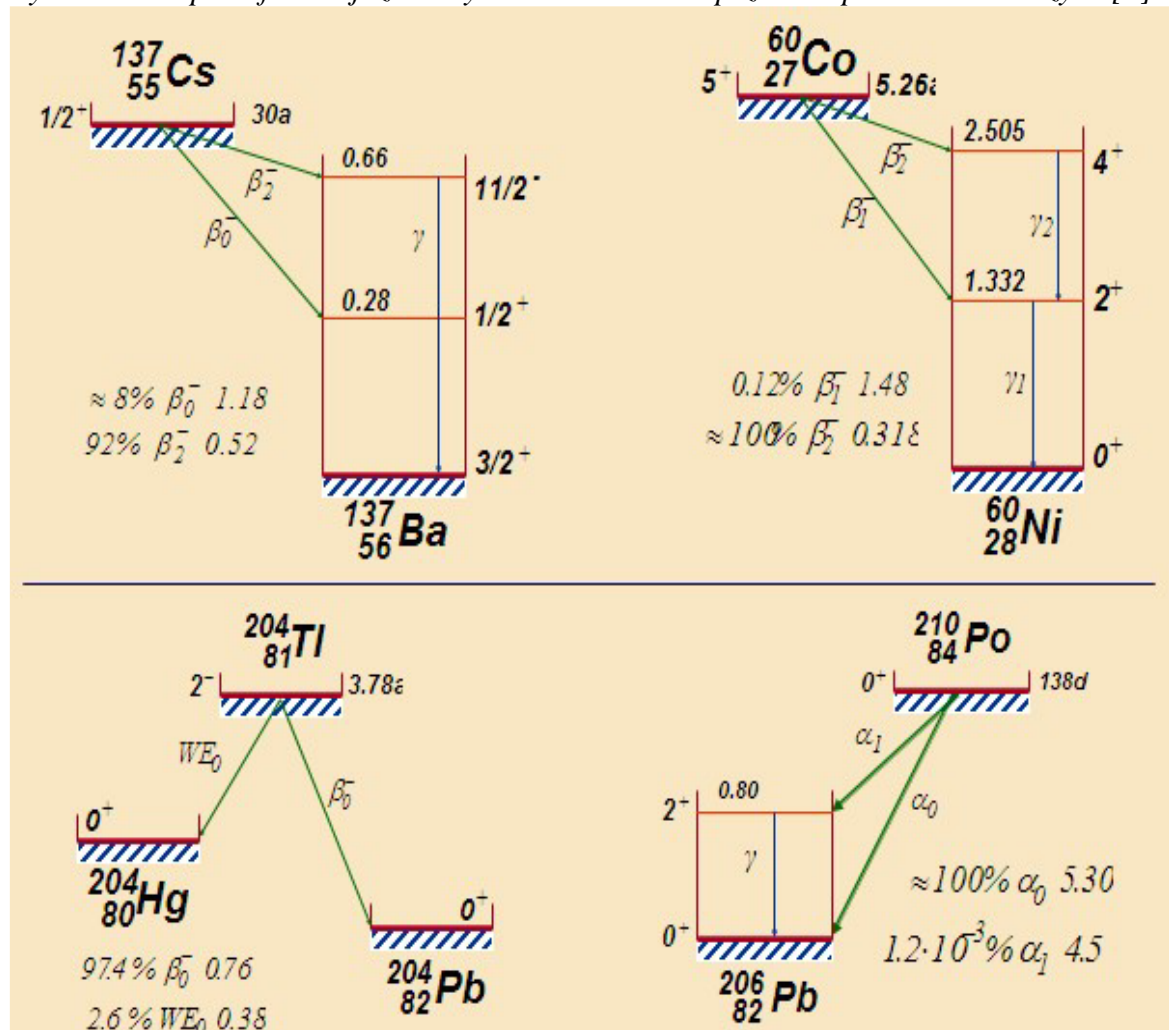
Objaśnienia oznaczeń na schematach:

1. symbol u góry - nazwa oraz liczby: atomowa i masowa nuklidu promieniotwórczego
2. okres połowicznego zaniku wyrażony w jednostkach: **a**-lata, **d**-dni, **min**-minuty, **s**-sekundy,
3. rozpady:
  - **$\alpha$**  - rozpad alfa,
  - **$\beta^-$**  - rozpad beta minus,
  - **$\beta^+$**  - rozpad beta plus,
  - **WE** - wychwytywanie elektronu,
  - strzałki pionowe - przemiana gamma (deekscytacja stanów wzbudzonych),
  - indeksy u dołu - kolejny stan końcowy nuklidu do którego zachodzi rozpad,
4. energie wzbudzenia stanów końcowych podane są w **MeV** nad kreskami oznaczającymi poziomy wzbudzone,
5. spiny i parzystości początkowych i końcowych stanów- obok poziomów energetycznych lub nad nimi,
6. wkład procentowy danego rozpadu i energia emitowanych cząstek w MeV.
7. . symbol u dołu - nazwa oraz liczby: atomowa i masowa nuklidu końcowego przemiany.

Rozmieszczenie tych informacji na schematach ilustruje Rys. 1.2.2.



Rys. 1.2.2a. Opis informacji zawartych na schematach przemian promieniotwórczych [2]



Rys.1.22b.. Przykładowe schematy przemian promieniotwórczych [2]

### 1.3. Propagacja promieniowania gamma w ośrodkach materialnym

Procesy wywoływane przez promieniowanie w ośrodku materialnym zależą od rodzaju i energii promieniowania oraz od własności ośrodka.



Rys.1.3.1. Propagacja różnych rodzajów promieniowania w ośrodkach materialnym

Rysunek 1.3.2. ilustruje poglądowo przenikliwość różnych rodzajów promieniowania:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i neutronów. Emitowane przez źródła promieniotwórcze cząstki alfa zatrzymuje naskórek rąk lub kartka papieru, promieniowanie beta (tj. elektrony lub pozytony) może być zatrzymane przez blachę aluminiową, wiązkę promieniowanie gamma efektywnie osłabia warstwa ołowiu, ale do spowolnienia wiązki neutronów musimy użyć osłony betonowej, wody lub parafiny.

Podstawowym procesem oddziaływania wymienionych rodzajów promieniowania z materią jest **jonizacja**, czyli wybijanie elektronów z powłok atomowych w materiale ośrodka. Z tego właśnie powodu promieniowanie to nazywamy także **promieniowaniem jonizującym**. Własności oddziaływania promieniowania jonizującego z materią zależą od rodzaju i energii promieniowania. Tutaj omówimy tylko własności oddziaływania z materią promieniowania gamma, czyli fotonów, zwracając jednak uwagę na istotne różnice względem oddziaływania z materią ciężkich cząstek naładowanych.

Fotony oddziałują z materią na wiele sposobów. Trzy z nich odgrywają zasadniczą rolę: zjawisko fotoelektryczne, efekt Comptona i produkcja par elektron-pozyton. Prawdopodobieństwa ich zachodzenia zależne są od energii fotonów oraz własności materiału absorbentu. Każdy z tych procesów reprezentowany jest poniżej symbolicznym rysunkiem. (Pamiętajmy jednak, że rysunki te nie odzwierciedlają relacji geometrycznych ani kinematycznych, ale mają na celu poglądowe zilustrowanie mechanizmów poszczególnych procesów.)

	<p><b>Zjawisko fotoelektryczne</b> - to pochłonięcie fotonu przez atom i emisja elektronu z powłoki leżącej w pobliżu jądra.</p>
	$\gamma + atom \rightarrow atom^+ + e^-$
	<p>W wyniku zajścia tego procesu foton zostaje pochłonięty, atom zjonizowany, a wyemitowany elektron ma energię kinetyczną</p>
	$E_k = E_\gamma - W$
<p>Rys. 1.3.3. Zjawisko fotoelektryczne</p>	<p>gdzie <math>W</math> jest "pracą wyjścia" elektronu z danej powłoki, odpowiadającą energii wiązania elektronu na tej powłoce.</p>

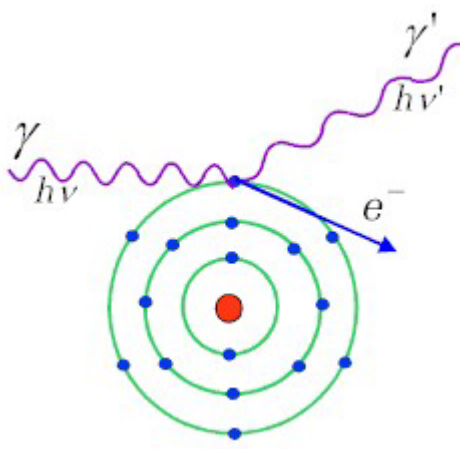
Warunkiem zachodzenia zjawiska fotoelektrycznego jest, by energia fotonu była większa od energii wiązania  $W$  elektronu na danej orbicie atomowej. Zjawisko fotoelektryczne zachodzić może wyłącznie dla elektronów związanych w atomach. Kinematyka wymaga, by część pędu fotonu przejęło trzecie ciało jakim jest jądro atomowe. Właśnie dlatego efekt fotoelektryczny zachodzi najczęściej dla elektronów znajdujących się na powłokach będących najbliżej jądra. Najsilniej związane są elektrony na powłoce najbliższej jądra zwanej powłoką K. Dlatego energię fotonu umożliwiającą uwolnienie elektronu z tej powłoki nazywa się często **krawędzią K**. Z drugiej strony, wybite elektronu z powłoki K wymaga większej energii niż wybite z powłok bardziej oddalonych od jądra. Dlatego dla niższych energii fotonów zachodzi wybite elektronów z wyższych powłok atomowych.

Po uwolnieniu elektronu z powłoki w pobliżu jądra może nastąpić przeskok na tę powłokę elektronu z powłoki dalszej. Wyzwalana przy tym energia emitowana jest w postaci kwantu promieniowania elektromagnetycznego w zakresie rentgenowskim. Może też nastąpić przekazanie energii innemu elektronowi w atomie i jego emisja. Elektron taki nazywany jest **elektronem Auger'a**.

Przekrój czynny na zjawisko fotoelektryczne rośnie bardzo szybko ze wzrostem liczby atomowej materiału w którym efekt zachodzi oraz maleje ze wzrostem energii fotonu. Można to zapisać w postaci empirycznej zależności

$$\sigma_{ph} = C \cdot \frac{Z^k}{E_\gamma^n} \quad (1.3.1)$$

gdzie  $Z$  jest liczbą atomową materiału (absorbentu), a  $E_\gamma$  jest energią fotonu. Dla niskich energii ( $E_\gamma \ll m_0c^2$ ,  $m_0$  – masa elektronu) wartości wykładników potęg we wzorze (1.3.1) są:  $k=4.0$ ,  $n=3.5$ ; dla energii bardzo wysokich ( $E_\gamma \gg m_0c^2$ )  $k=4.6$ ,  $n=1.0$ ;  $C$  - jest stałym, tj niezależnym od  $Z$  i  $E_\gamma$ , współczynnikiem proporcjonalności.

	<b>Efekt Comptona</b> , to rozproszenie fotonu na quasi-swobodnym elektronie.	
	$\gamma + e^- \rightarrow \gamma' + e^-$	
	W rezultacie zajścia tego procesu foton zostaje rozproszony, a jego energia jest mniejsza od energii fotonu pierwotnego. Energia rozproszonego fotonu jest zależna od kąta rozproszenia.	
	$E_1 = \frac{E_0}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}$	(1.3.2)
gdzie $\theta$ jest kątem rozproszenia, a $\alpha = E_0 / m_0c^2$ jest stosunkiem energii fotonu padającego do energii spoczynkowej elektronu, $m_0c^2 = 0.511 \text{ MeV}$		

Rys.1.3.4 Efekt Comptona

Szczegółowe wyliczenia związków kinematycznych w efekcie Comptona zawiera **Dodatek 1**.

Energia elektronu odrzutu wynikające z kinematyki tego procesu dana jest wzorem:



$$E_e = E_0 \frac{\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \quad (1.3.3)$$

Jak widać z postaci powyższych wzorów, energia fotonu rozproszonego  $E_I$  ma najmniejszą wartość dla rozproszenia do tyłu,  $\theta = \pi$ ,  $\cos\theta = -1$  i zależna jest, poprzez wartość  $\alpha$ , od energii fotonu. Największą wartość ma natomiast wtedy energia elektronu odrzutu  $E_e$ . Najsilniejsza zależność od kąta jest dla dużych energii padającego fotonu  $E_0$ . Wartości te wynoszą:

$$E_I(\cos\theta = -1) = E_0 \frac{1}{1 + 2\alpha} \quad E_e(\cos\theta = -1) = E_0 \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha} \quad (1.3.4)$$

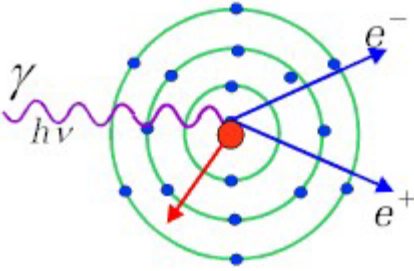
**Przekrój czynny na efekt Comptona określa wzór Kleina Nishiny, który ma złożoną formę.** Dla dużych energii fotonów przekrój czynny na jeden elektron może być wyrażony prostą zależnością

$$\sigma_c^e \propto \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon}, \quad (1.3.5)$$

z której widać, że przekrój czynny na efekt Comptona jest malejącą funkcją energii pierwotnego fotonu. W atomie, gdzie jest  $Z$  elektronów, przekrój czynny na jeden atom określony jest zależnością:  $\sigma_c^{atom} = Z \cdot \sigma_c^e$ .

Zauważmy, że w przypadku efektu Comptona tylko część energii fotonu przekazana jest elektronowi; pozostała unosi foton rozproszony. Przekrój czynny na efekt Comptona rozkładamy dlatego na dwa składniki: przekrój czynny na rozpraszanie  $\sigma_{sc}$  oraz przekrój czynny na absorpcję,  $\sigma_{ca}$ . Relację pomiędzy przekrojem czynnym na efekt Comptona, dany wzorem (1.3.5) a jego składowymi przekrojami czynnymi można wyrazić w postaci

$$\sigma_{cs} = \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \cdot \sigma_c^e, \quad \sigma_{ca} = \sigma_c^e - \sigma_{cs} \quad (1.3.7)$$

	<p><b>Zjawisko tworzenia par elektron-pozyton</b> polega na zamianie (konwersji) fotonu w parę: pozyton i elektron, tj. <math>e^+e^-</math>. Proces ten możliwy jest jedynie, gdy energia fotonu przekracza pewną określoną wartość zwaną energią progową, co wynika z warunku spełnienia w tym procesie praw zachowania energii i pędu. Równoczesne spełnienie obu praw zachowania wymaga, by proces ten zachodził z udziałem "trzeciego ciała", jakim może być jądro atomowe lub elektron, nie może natomiast zachodzić w próżni. Przekaz energii i pędu zachodzi za pośrednictwem pola elektrostatycznego (kulombowskiego) jądra lub elektronu. Proces przebiega następująco:</p>
<p>Rys.1.3.5 Tworzenie par <math>e^+e^-</math></p>	$\gamma + (A, Z) \rightarrow e^+ + e^- + (A, Z)$

gdzie  $(A, Z)$  oznacza jądro o liczbie masowej  $A$  i atomowej  $Z$ .

Ze spełnienia praw zachowania wynika relacja określająca energię progową fotonu powyżej której może zachodzić zjawisko tworzenia par  $e^+e^-$

$$E_\gamma \geq 2 \cdot m_e \cdot c^2 + 2 \cdot \frac{m_e^2}{m_j} \cdot c^2 \quad (1.3.8)$$

gdzie  $E_\gamma = h\nu$  jest energią fotonu,  $m_e$  jest masą elektronu a  $m_j$  masą jądra;  $c$  - jest prędkością światła w próżni. Ponieważ masa jądra jest tysiące razy większa niż masa elektronu, drugi człon we wzorze (1.3.8) można zwykle zaniedbać wyrażając energię progową prostszym wzorem

$$E_\gamma \geq 2 \cdot m_e \cdot c^2 \approx 2 \cdot 0.511 \text{ MeV} = 1.022 \text{ MeV} \quad (1.3.9a)$$

Oznacza to, że energia fotonu musi być większa od energii odpowiadającej sumie mas pozytonu i elektronu, które to cząstki tworzone są w procesie konwersji.

Kiedy proces produkcji par zachodzi w polu elektrostatycznym elektronu, to energia progowa zgodnie ze wzorem (1.3.8), gdzie zamiast masy jądra wstawiamy masę elektronu, jest większa i wynosi

$$E_\gamma \geq 4 \cdot m_e \cdot c^2 \quad (1.3.9b)$$

Proces ten jest jednak znacznie mniej prawdopodobny niż konwersja w polu jądra.

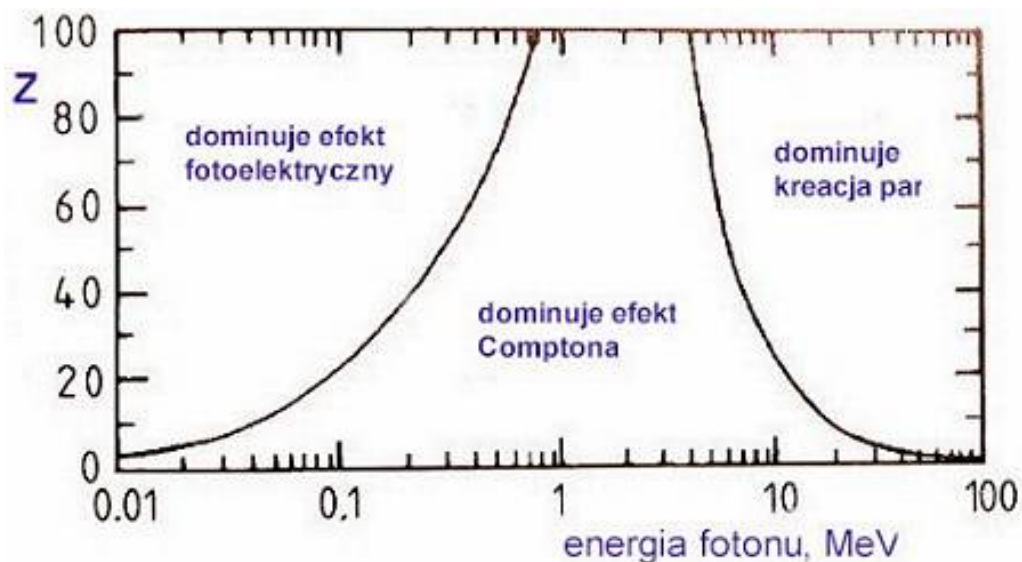
Procesem odwrotnym do tworzenia par  $e^+e^-$  jest **proces anihilacji** pozytonu z elektronem, w którym para pozyton-elektron zamienia się na dwa fotony, tj. na dwa kwanty promieniowania elektromagnetycznego.

Przekrój czynny na wytworzenie pary  $e^+e^-$  przez foton o energii  $E_\gamma$ , w sąsiedztwie jądra o liczbie atomowej  $Z$  może być przedstawiony przybliżonym wzorem postaci

$$\sigma_p = \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \cdot \alpha \cdot Z^2 \cdot f(E_\gamma) \quad (1.3.10)$$

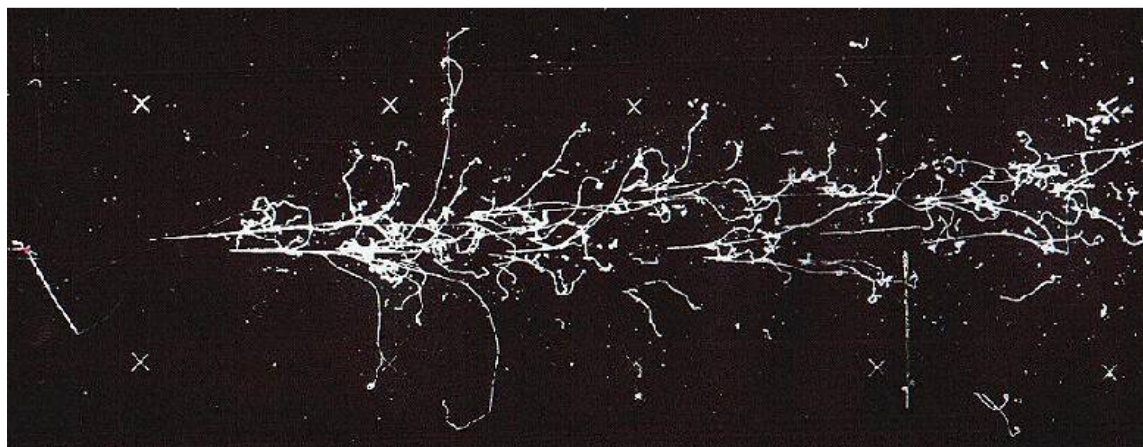
gdzie  $\alpha = 1/137$ , a  $f(E_\gamma)$  rośnie logarytmicznie z energią fotonu, a przy energiach bardzo dużych przestaje zależeć od energii.

Prawdopodobieństwa zajścia poszczególnych procesów zależą zarówno od energii fotonów, jak i od liczby atomowej  $Z$  materiału, z którym zachodzi oddziaływanie. Zjawisko fotoelektryczne jest procesem dominującym przy najniższych energiach i dla dużych wartości  $Z$ . Obszar energii pośrednich tj. około  $1 \text{ MeV}$  zdominowany jest przez efekt Comptona, a szerokość obszaru dominacji największa jest dla małych wartości  $Z$ . Przy najwyższych energiach dominuje efekt tworzenia par  $e^+e^-$ . Zależności te zilustrowane są na Rys. 1.3.6/



Rys. 1.3.6. Obszary dominacji różnych efektów oddziaływania fotonów z materią w funkcji energii fotonów i liczby atomowej absorbentu  $Z$ .

Złożony charakter oddziaływania fotonów z materią ilustruje Rys. 1.3.7. Jest to fotografia wnętrza tzw. komory pęcherzykowej wypełnionej ciekłym ksenonem. Z lewej strony widać ślady reakcji jądrowej wywołanej przez cząstkę padającą z zewnątrz. Widać też dwa pęki nieregularnych śladów, które wyraźnie „celują” w punkt, gdzie zaszła reakcja, ale są od niego oddalone. Pęki te, to rezultaty konwersji fotonów na pary  $e^+e^-$ . Fotony przebiegły od punktu reakcji pewien odcinek, a następnie uległy konwersji, dając początek tzw. kaskadom elektronowo-fotonowym.



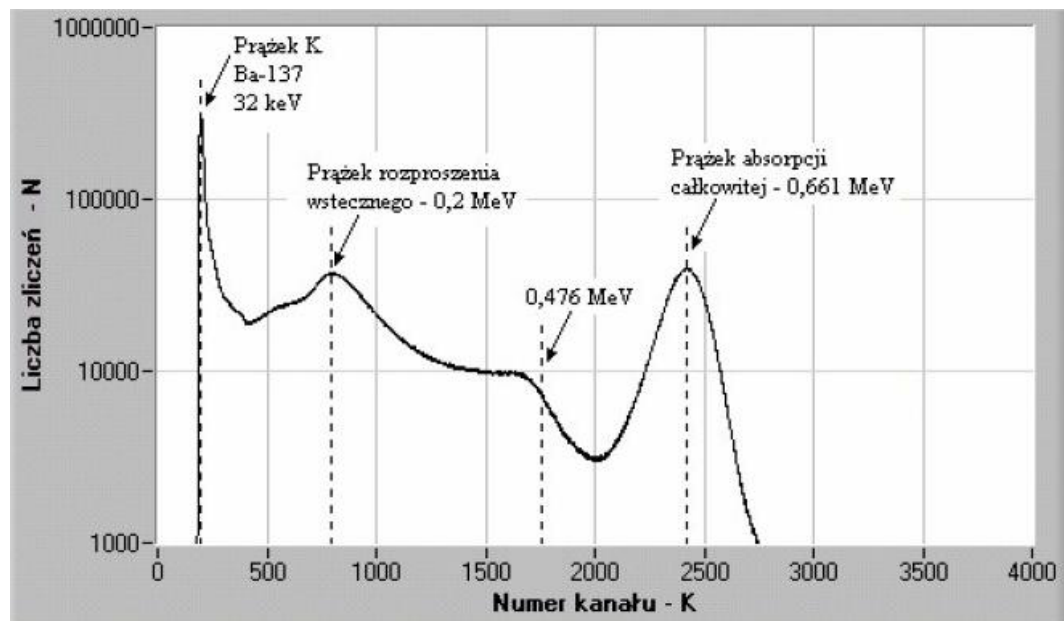
Fot.1.3.7. Kaskady elektronowo-fotonowe zarejestrowane w komorze pęcherzykowej wypełnionej ciekłym ksenonem.

## 1.4. Detekcja promieniowania gamma

Fotony, jako cząstki pozbawione ładunku elektrycznego, przenikają przez ośrodek materialny nie wywołując żadnych skutków aż do miejsca, gdzie znajdzie jedno z omawianych wyżej zjawisk. (Pomijamy efekty zachodzące z bardzo małym prawdopodobieństwem.) Kiedy jednak dane zjawisko wystąpi, foton przekazuje całą swą energię albo jej znaczną część elektronom (pozytonom), które w rezultacie uzyskują energie kinetyczne określone przez kinematykę danego procesu. Jest to zasadnicza różnica w stosunku do quasi-ciągłego charakteru oddziaływania z materią ciężkich cząstek naładowanych.

Zauważmy, że mierzone przez detektor energie, to nie są energie fotonów, ale elektronów, które pojawiają się w rezultacie zajścia danego procesu. Energie te są bliskie energiom fotonów, kiedy zachodzi zjawisko fotoelektryczne, są mniejsze i zależne od kąta rozproszenia fotonu w zjawisku Comptona, są pomniejszone o podwójną energię spoczynkową elektronu w zjawisku tworzenia par elektron-pozyton. Na wynik pomiaru mają także wpływ procesy wtórne, jak anihilacja pozytonów, czy rozproszenie wsteczne w ściankach detektora.

Na kształt widma rejestrowanego wpływa także sposób zamiany energii elektronów na impulsy elektryczne, charakterystyczny dla danego typu detektora. Dla przykładu, na Rys. 1.4.1. pokazane jest widmo gamma izotopu  $^{137}\text{Cs}$  zarejestrowane z pomocą detektora scyntylacyjnego.



Rys. 1.4.1 Widmo promieniowania gamma emitowanego ze źródła  $^{137}\text{Cs}$  i rejestrowanego detektorem scyntylacyjnym

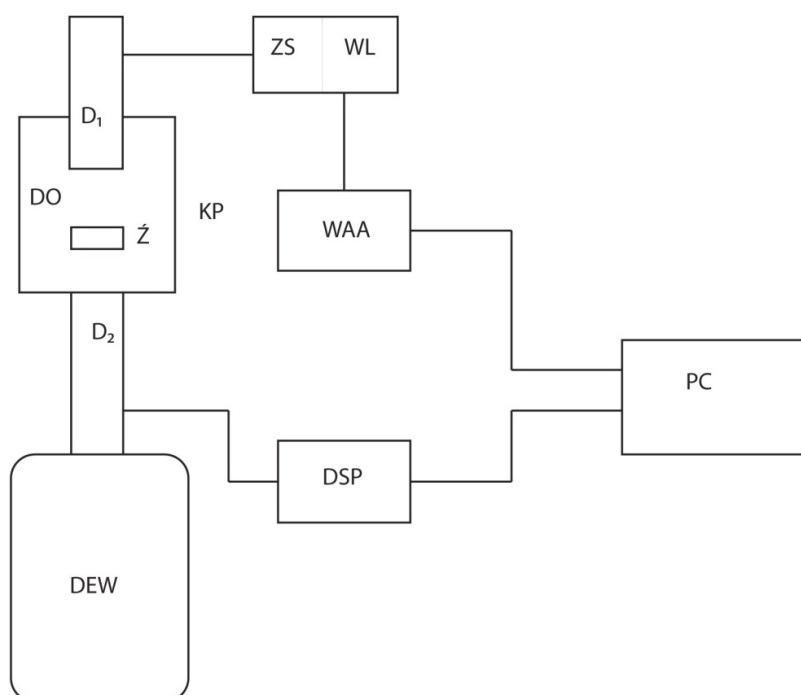
Charakterystyczne punkty tego widma zaznaczone na rysunku to (od prawej strony):

- pik absorpcji całkowitej fotonu w zjawisku fotoelektrycznym, tzw. fotonik,
- miejsce szybkiego spadku liczby rejestrowanych energii, tzw. krawędź comptonowska,
- pik rozproszenia wstecznego odpowiadający rozproszeniu fotonów do tyłu w ośrodku otaczającym scyntylator i następnie zaabsorbowaniu ich w scyntylatorze.
- prążek K – odpowiadający energii przejścia do powłoki K z wyższych powłok w jądrze  $^{137}\text{Ba}$ .

## 2. Aparatura pomiarowa

### 2.1. Układ pomiarowy

Układ pomiarowy składa się z dwóch detektorów: scyntylicyjnego ( $D_1$ ) i półprzewodnikowego ( $D_2$ ) oraz współpracujących z nimi dwóch niezależnych torów spektrometrycznych. Na Rys.1 pokazany jest schemat blokowy układu pomiarowego, na Rys.2 pokazana jest fotografia całego układu z zaznaczonymi elementami – zgodnie ze schematem blokowym



Rys.1.

Schemat blokowy układu pomiarowego

DO – domek ochronny,

Z – źródło promieniotwórcze

$D_1$  – detektor scyntylicyjny,

$D_2$  – detektor półprzewodnikowy germanowy,

ZS – zasilacz wysokiego napięcia spektrometru scyntylicyjnego,

WL – wzmacniacz liniowy spektrometru scyntylicyjnego,

WAA – wielokanałowy analizator amplitudy

DEW – naczynie Dewara z ciekłym azotem,

DSP – DSPEC-LF - spektrometr germanowy

PC – komputer

ED1, ED2 – ekrany spektrometrów: scyntylicyjnego i germanowego

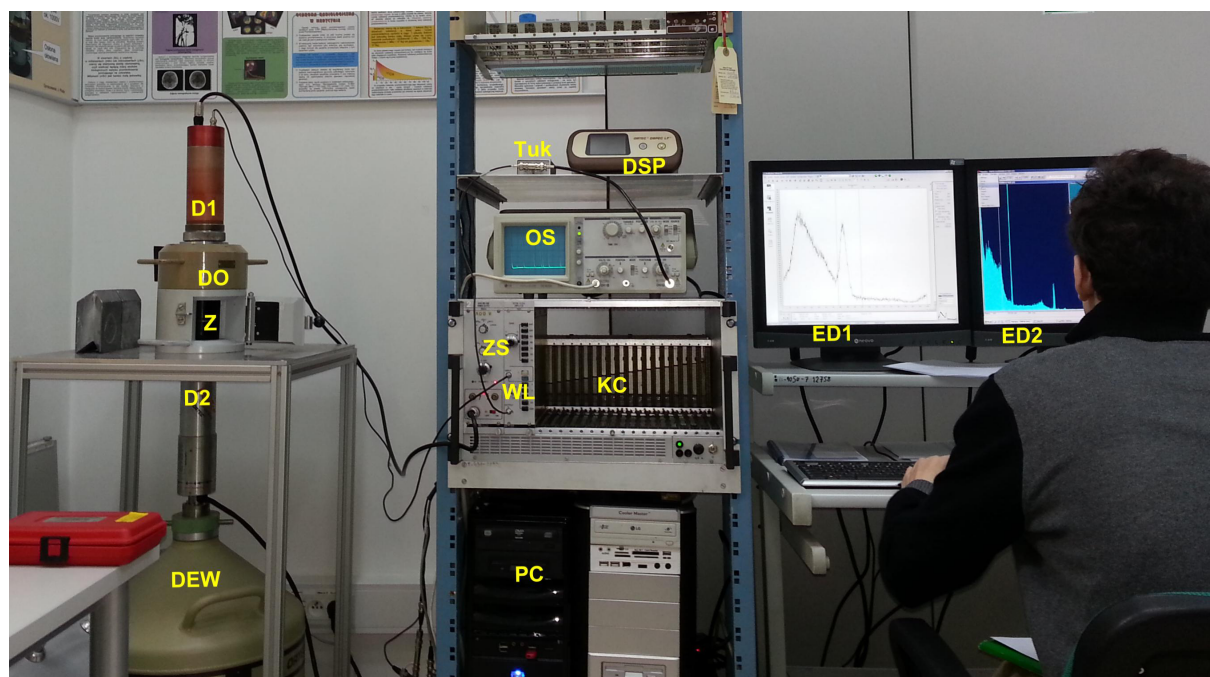
KC – kasetta systemu CAMAC

Tuk – spektrometr scyntylicyjny „Tukan”

OS - oscyloskop

W przypadku detektora germanowego: zasilacz wysokiego napięcia, wzmacniacz z układem kształtowania impulsu oraz przetwornik analogowo-cyfrowy i analizator amplitudy znajdują się w jednej obudowie (DESEC-LF). Całość jest sterowana programem komputerowym, MAESTRO.

W przypadku detektora scyntylacyjnego, zasilacz wysokiego napięcia wraz ze wzmacniaczem znajdują się w jednej obudowie. Oddzielnie, jako karta w obudowie komputera, znajduje się wielokanałowy analizator amplitudy. Układ pomiarowy tego detektora nosi nazwę TUKAN.



Rys.2. Fotografia układu pomiarowego z zaznaczonymi elementami – zgodnie z opisem i schematem blokowym

Do wykonania pomiarów w ćwiczeniu wykorzystuje się detektor półprzewodnikowy (germanowy). Detektor scyntylacyjny służy tylko do demonstracji własności tej techniki pomiarowej poprzez porównanie widm z tego detektora z widmami uzyskiwanymi z pomocą detektora germanowego.

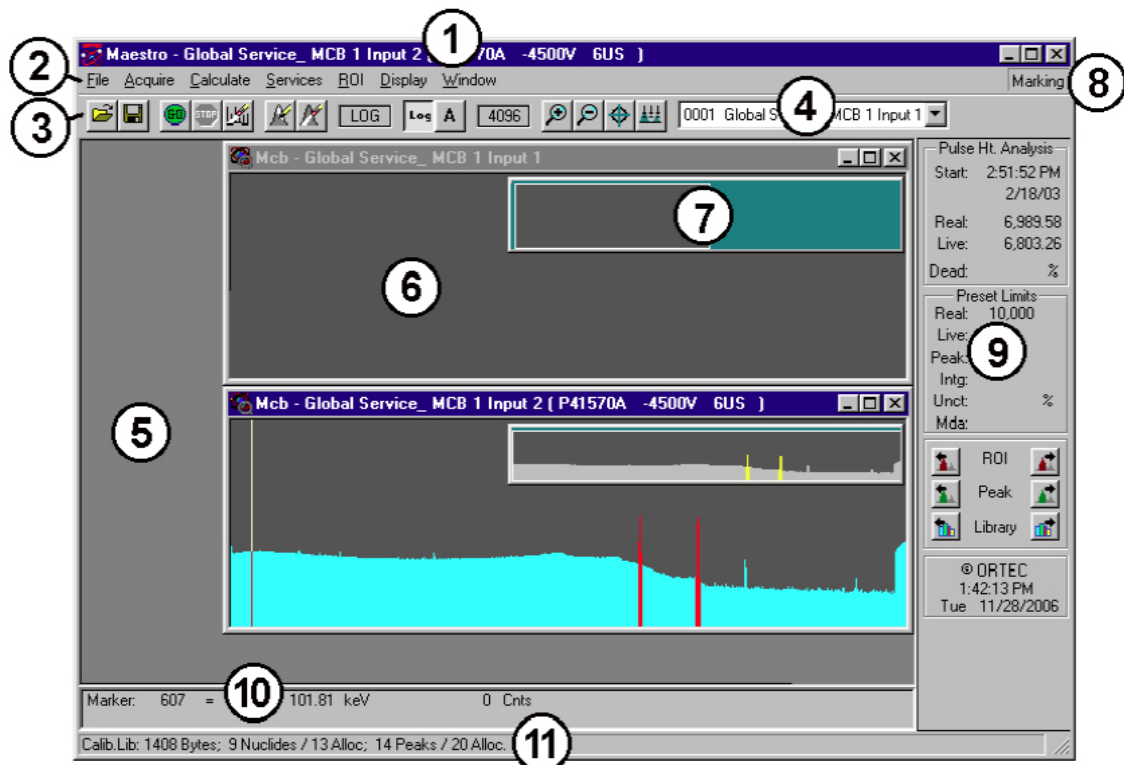
## 2.2 Program „MAESTRO”

Program MAESTRO dostarczony razem z detektorem jest oprogramowaniem do obsługi wielokanałowego analizatora (MCA – MultiChannel Analyser). Stosowany w połączeniu z komputerem osobistym i odpowiednim analizatorem umożliwia dokonanie zaawansowanej analizy badanego widma. Oprogramowanie wykrywa załączony sprzęt, przedstawiając użytkownikowi tylko te funkcje, które są dla niego dostępne. Funkcje te są wyświetlane w MAESTRO-32, gdy urządzenie DSPEC jest podłączone do systemu. Wyświetlacz i kontrola detektora są zintegrowane, zapewniając użytkownikowi prosty w obsłudze interfejs.

W tym ćwiczeniu program obsługuje detektor półprzewodnikowy.

## Opis obsługi program Maestro-32

Rys.3 pokazuje główne okno programu MAESTRO.



Rys.3 Główne okno programu MAESTRO:

Oznaczenia na rysunku:

- 1. Pasek tytułu** z nazwą programu i adresem aktualnie aktywnych okien.
- 2. Menu Bar** - dostępne polecenia menu
- 3. Toolbar** - ikony otwierania widm, zapisu ich na dysku, uruchamiania i zatrzymywania gromadzonych danych oraz dostosowania w poziomie i w pionie skali aktywnych okien
- 4. Detector List** na pasku narzędzi wyświetlający aktualnie wybrany detektor (lub bufor). Kliknięcie na tym polu otwiera listę wszystkich uruchomionych detektorów znajdujących się pod kontrolą programu MAESTRO 32.
- 5. Obszar widma** wyświetlający nawet do ośmiu okien widm.
- 6. Rozszerzony widok spektrum** pokazuje cały histogram lub jego fragment, umożliwia powiększenie określonej części widma i zobaczenie jej bardziej szczegółowo. Można zmienić rozszerzony widok w poziomie i pionie, skalować oraz wykonywać.
- 7. Pełny widok spektrum** - pełny histogram z pliku lub z pamięci detektora. Pionowa skala jest zawsze logarytmiczna, a okno może być przenoszone i skalowane. W podświetlonym prostokącie w widoku zaznacza się obszar, który jest pokazywany w rozszerzonym widoku spektrum (6).
- 8. ROI** (Region of Interest) - po prawej stronie paska menu wskazuje czy tryb ROI jest zaznaczony lub niezaznaczony.

9. **Status Sidebar** po prawej stronie ekranu zawiera informacje na temat bieżących ustawień detektora i czasu zliczania, godzinę i datę, zestaw przycisków do poruszania się pomiędzy pikami i obszarami ROI.
10. **Marker Information Line** pod spektrum pokazujący zaznaczony kanał, energię, a także ilość zliczeń w danym kanale.
11. **Supplementary Information Line** poniżej Marker Line stosowany w celu pokazania zawartości biblioteki, wyników poszczególnych obliczeń, ostrzeżeń lub wskazówek.

## 2.3 Ustawienia programu Maestro:

### Zakładka Amplifier

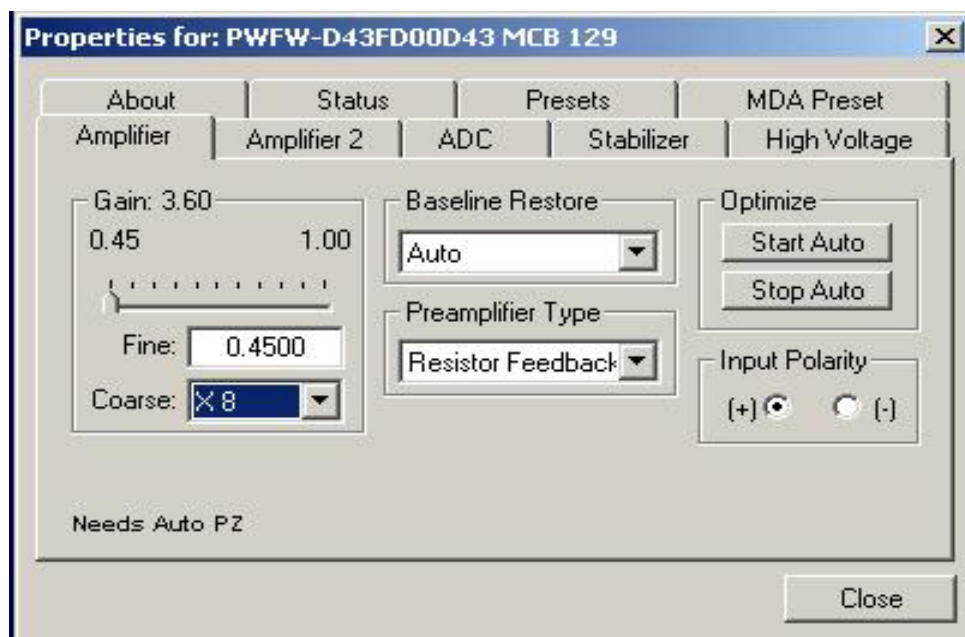
**Gain** – ustawia wzmocnienie sygnału.

**Input Polarity** – wybiera sygnał wejściowy przedwzmacniacza polaryzacji sygnału z czujnika. Dla GEM (p-type) zaznaczony jest dodatni sygnał, a GMX (n-type) ma sygnał ujemny.

**Baseline Restore** - służy do powrotu podstawowych impulsów do rzeczywistej wartości zero pomiędzy impulsami wchodzącymi. Wpływa to na poprawę rozdzielczości poprzez usunięcie niskiej częstotliwości szumu związanego z zasilaniem sieciowym. Istnieją trzy możliwości wyboru ustawień (**Auto**, **Fast** i **Slow**). Fast ustawia się dla dużych aktywności źródeł, Slow – dla małych. **Auto** dobiera automatycznie stałą czasową odpowiednio dla liczby zliczeń na wejściu. Ustawienia te są zapisywane w DSPEC, nawet gdy jest on wyłączony.

**Preamplifier Type** – używany do wyboru typu pracy przedwzmacniacza: **Transistor Reset** lub **Resistive Feedback**. Wybór będzie zależał od przedwzmacniacza dostarczanego wraz z detektorem.

**Optimize** – służy do automatycznej optymalizacji ustawień wartości podstawowych impulsów wejściowych.



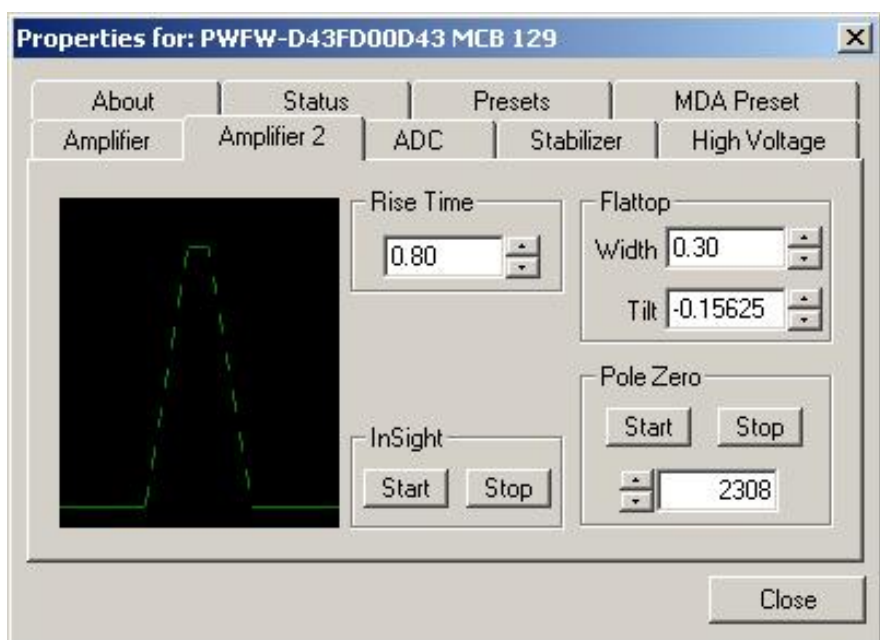
- Zakładka Amplifier, ustawienia: Gain: 0,90, Fine: 0,45, Coarse: X2



## Zakładka Amplifier2

Duży wybór możliwości ustawień **Rise Time** pozwala na precyzyjną kontrolę, poprzez uzyskanie kompromisu pomiędzy rozdzielczością a wydajnością.

Wartość parametru w czasie narastania jest w przybliżeniu równoważna dwukrotnej wartości czasu integracji ustawionej na tradycyjnych analogowych wzmacniaczach. Tak więc wartość 12 mikrosekund odpowiada 6 mikrosekundom w konwencjonalnym wzmacniaczu. Począwszy od wartości nominalnej 12,0, zaleca się wzrost wartości czasu narastania jeżeli oczekuje się lepszej rozdzielczości kosztem liczby zliczeń.



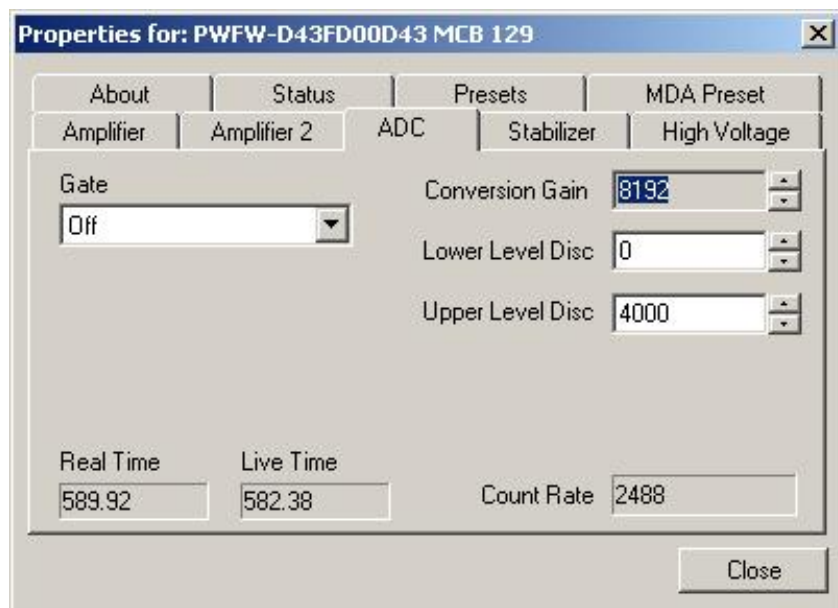
- Zakładka Amplifier 2, ustawienia: Rise Time: 0,80

## Zakładka ADC

**Gate** - pozwala wybrać funkcję bramkowania sygnału. Wyłączenie tej funkcji powoduje, że bramkowanie nie jest wykonywane (czyli wszystkie sygnały są przetwarzane przez detektor). W funkcji w koincydencji sygnał bramkowania musi być obecny we właściwym czasie do przetwarzania zdarzeń, w antykoincydencyjnej – na wejściu bramkowania sygnał nie musi być obecny do konwersji sygnału detektora.

**Conversion Gain** – konwersja określa maksymalną liczbę kanałów w widmie. Jeśli jest ustawiona na 16384 skali energii, będzie podzielona na 16384 kanałów. Zysk konwersji ujęto w potęgach liczby 2 (np. 8192, 4096, 2048)

**Upper- and Lower-Level Discriminators** – do ustawiania górnego i dolnego zakresu pomiaru. W DSPEC dolny i górny obszar pomiaru znajdują się pod kontrolą komputera. Na niższym poziomie dyskryminatora ustawia się poziom najniższej amplitudy impulsów, które będą przechowywane. Na górnym poziomie dyskryminatora ustawia się poziom najwyższej amplitudy impulsów, które będą przechowywane.

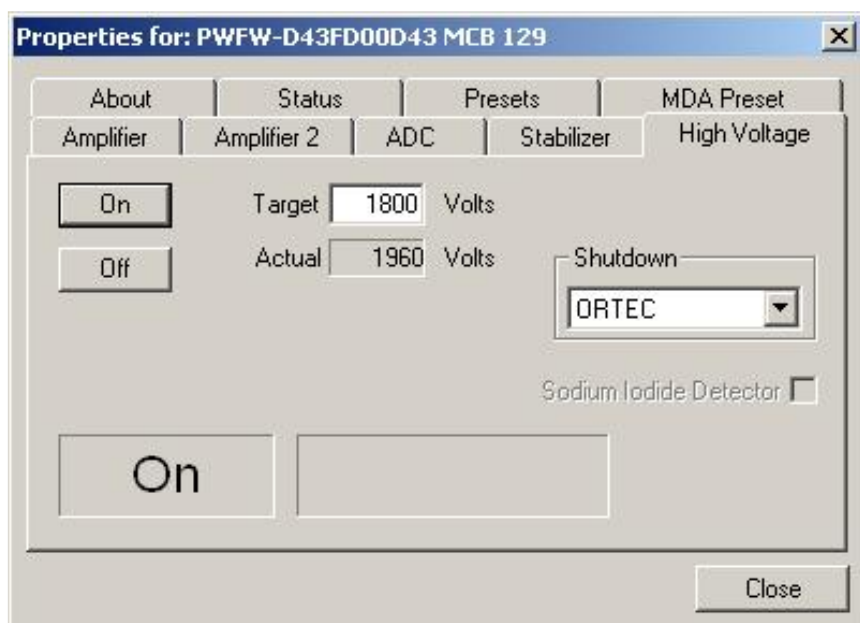


**- Zakładka ADC, ustawienia:**

**Conversion Gain: 4096, Lower Level Disc: 0, Upper Level Disc: 4095**

**Zakładka High Voltage**

Zakładka ta umożliwia włączenie lub wyłączenie wysokiego napięcia, ustawienie wartości napięcia i monitorowanie go oraz pozwala dobrać tryb wyłączania. Wysokie napięcie jest ustawiane ręcznie poprzez nastawienie zdalnego czujnika wyłączania sygnału z detektora. Wartość wysokiego napięcia ustawia się w polu Target.



**- Zakładka High Voltage, ustawienia: Target: 1800V, kliknąć "ON"**

## Zakładka Presets

Parametry pomiaru można ustawić tylko przed pomiarem, w czasie akwizycji danych obszar ustawienia parametrów jest nieaktywny. Można użyć dowolnego lub wszystkich ustawień w jednym czasie. Aby wyłączyć ustawienia, należy wprowadzić wartość zero. W przypadku wyłączenia wszystkich ustawień pomiar danych będzie trwać aż do ręcznie zatrzymania.

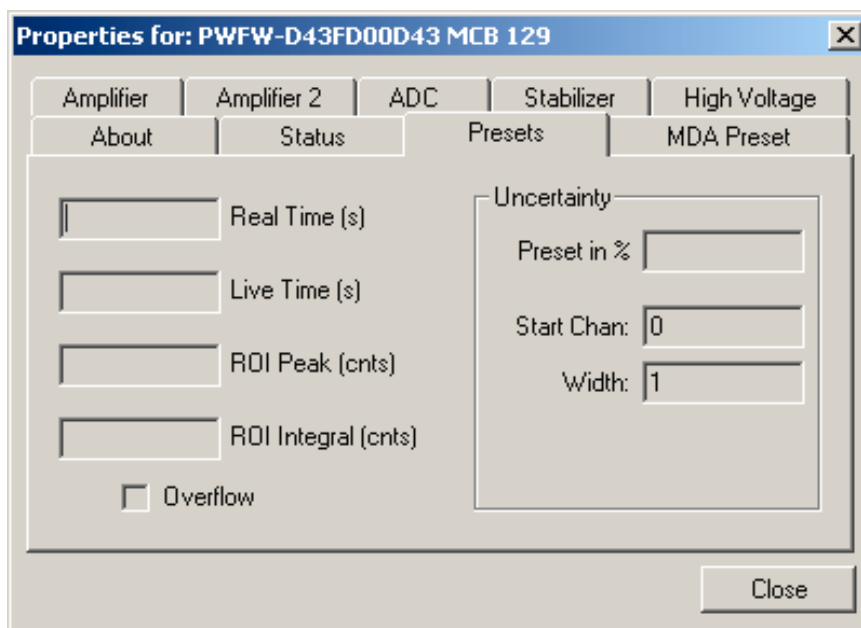
**Real Time** – czas rzeczywisty (zegarowy) trwania pomiaru.

**Live Time** – faktyczny czas przetwarzania sygnałów wejściowych

**ROI Peak** – (Region Of Interest) podaje liczbę zliczeń w kanałach z obszaru ROI; warunek: obszar ROI musi być zdefiniowany wcześniej

**ROI Integral** – suma wszystkich zliczeń w kanałach z obszarów ROI; nie będzie działać, jeśli nie będą zaznaczone ROI

**Uncertainty** - zatrzymuje akwizycje danych, kiedy statystyczna lub obliczeniowa niepewność osiągnie zadaną wartość. Należy wprowadzić wartość w procentach; zakres od 99% do 0,1%.



## Struktura pliku z zapisanymi danymi typu „SPE”

```
....  
(liczby zliczeń w poszczególnych kanałach)  
....  
  
$ROI:  
7  
303 319  
611 639  
862 900  
1960 2028  
2433 2505  
2744 2885  
3571 3641  
$PRESETS:  
Real Time  
600  
0  
$ENER_FIT:  
0.913864 0.390728  
$MCA_CAL:  
3  
9.138643E-001 3.907279E-001 -1.095700E-007 keV  
$SHAPE_CAL:  
3  
-9.648584E-001 1.817135E-002 -4.008120E-006
```

gdzie:

- \$ROI – opis punktów kalibracyjnych - pierwsza wartość pod napisem ROI oznacza liczbę obszarów ROI; w każdej nowej linii znajduje się wartość początkowa i końcowa tego obszaru.
- \$PRESETS – tutaj zapisane są kryteria zatrzymania pomiaru.
- \$MCA\_CAL – opis funkcji kalibracyjnej wyrażonej równaniem kwadratowym

$$y = A + Bx + Cx^2,$$

gdzie liczby są kolejnymi współczynnikami równania; w podanym przykładzie mamy A=9.138643E-001, B=3.907279E-001, C=-4.008120E-006

### 3. Wykonanie pomiarów

#### 3.1 Uruchomienie aparatury

Uwaga: Istotne jest zachowanie kolejności wykonywanych czynności

**Włączyć komputer.**

##### 1. Uruchomić tor pomiarowy detektora germanowego

- Na ekranie ED2 kliknąć „**MCB Configuration**”
- Zaznaczyć nazwę układu pomiarowego i zamknąć okienko inicjalizacji
- Kliknąć „**Maestro for Windows**” – pojawi się ekran pomiarowy detektora germanowego

##### 2. Uruchomić tor pomiarowy detektora scyntylacyjnego:

- Ustawić napięcie zasilania detektora fotopowielacza  
Uwaga: przed włączeniem zasilania napięcie należy ustawić na 0 V, następnie włączyć zasilanie i potem przełącznikami ustawić wartość napięcia **1100 V**.
- Na ekranie ED2 kliknąć „**Tukan**” – pojawi się panel pomiarowy detektora scyntylacyjnego

**Ustawić parametry programu Maestro:**

W głównym oknie programu wybrać: **Menu Bar -> Acquire -> MCB Properties:**

**Uwaga:** Proponowane wartości standardowe podane są przy opisie w punkcie **ustawienia**.

Aparatura jest gotowa do pomiarów.

#### 3.2 Kalibracja spektrometru

Kalibracja polega na przyporządkowaniu numerom kanałów wartości mierzonej energii. W tym celu wykorzystywany jest znany izotop promieniotwórczy, który emituje fotony o wielu energiach. W tym ćwiczeniu wykorzystywany jest izotop pierwiastka europu  $^{152}\text{Eu}$ .

Zestawienie energii fotonów oraz względne intensywności przejść pomiędzy poziomami wzbudzonymi w jądrach  $^{152}\text{Eu}$ , które prowadzą do emisji fotonów o danych energiach zawiera Tabela 1. Rys. 4. pokazuje uproszczony schemat rozpadu izotopu  $^{152}\text{Eu}$ .

Fotony emitowane przez $^{152}\text{Eu}$	
Energia [MeV]	Intensywność [%]
0,122	28,4
0,245	7,5
0,344	26,6
0,411	2,2
0,444	2,8
0,779	13,0
0,867	4,2
0,964	14,5
1,086	9,9
1,112	13,6
1,213	1,4
1,299	1,6
1,408	20,9

Figure 8.2 Simplified decay scheme for  $^{152}\text{Eu}$

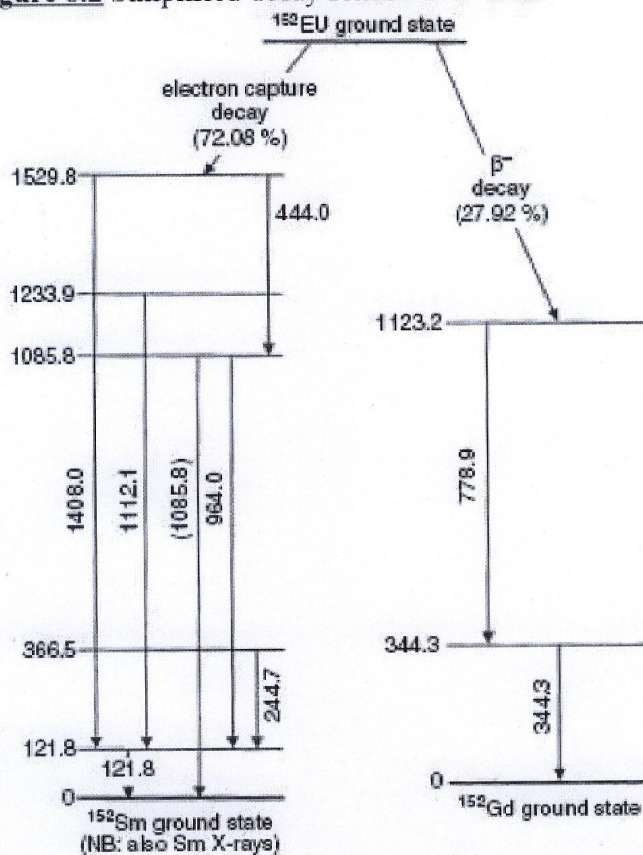
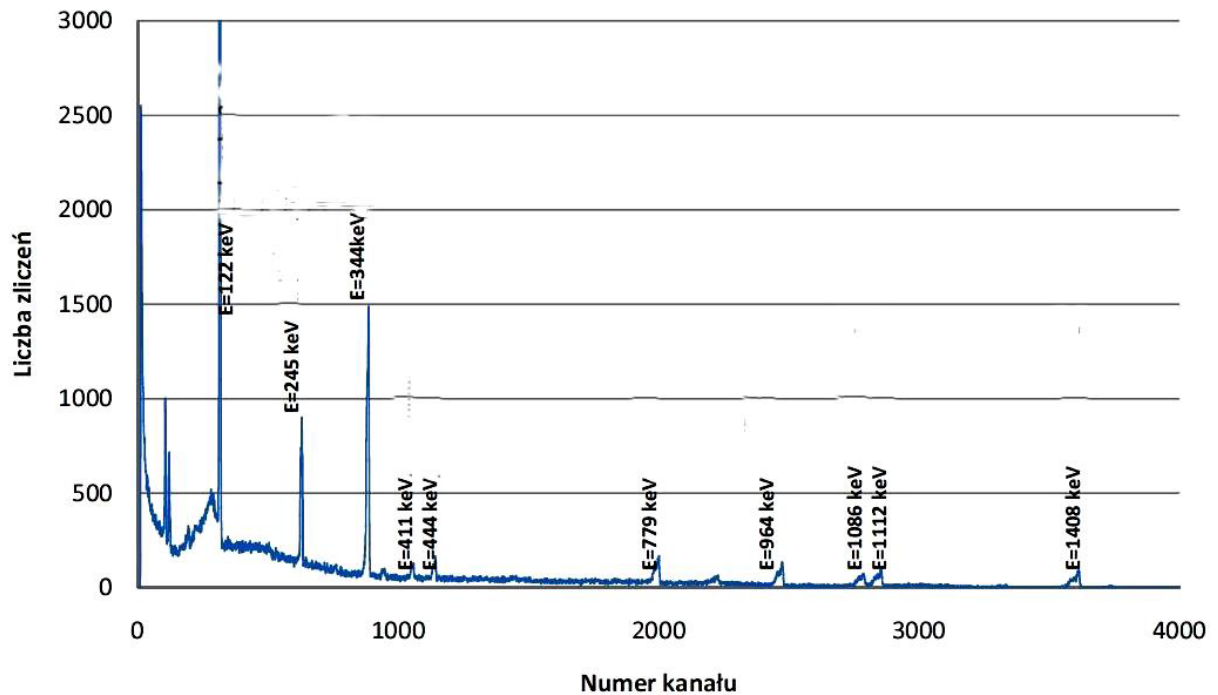


Tabela 1. Energie fotonów z  $^{152}\text{Eu}$

Rys. 4. Uproszczony schemat rozpadu izotopu  $^{152}\text{Eu}$

Na Rys. 5. Pokazane jest widmo promieniowania gamma emitowanego przez źródło  $^{152}\text{Eu}$  i rejestrowanego detektorem półprzewodnikowym, germanowym. Zaznaczone są położenia linii odpowiadających rejestracji fotonów wskutek zajścia zjawiska fotoelektrycznego tzw. „fotopików”. Wysokość linii w przybliżeniu odpowiada intensywności przejścia. Trzeba jednak pamiętać, że

wydajność rejestracji fotonów silnie zależy od ich energii, zmniejsza się ze wzrostem energii fotonów. Dlatego stosunek wysokości pików nie musi odpowiadać stosunkowi intensywności przejść w izotopie  $^{152}\text{Eu}$ .



Rys.5. Widmo promieniowania gamma emitowanego przez źródło  $^{152}\text{Eu}$  i rejestrowanego detektorem półprzewodnikowym, germanowym

### Wykonanie kalibracji

1. Usunąć poprzednią, nieaktualną kalibrację:  
**Calculate -> Calibration -> Destroy Callibration**
2. Zaznaczyć wybrany fotopik  
**ROI -> Mark peak** (obszar fotopiku zostanie zaznaczony na czerwono)
3. Wpisać energię fotonu odpowiadającą wybranemu fotopikowi. Wartości energii podane są na Rys.5. Wybranie polega na ustawieniu kursora na danym kanale. W obrębie pikę wybrać kanał o największej liczbie zliczeń.  
**Calculate -> Calibration ->** (wpisać odpowiednią wartość energii)
4. Powtórzyć to samo dla wszystkich fotopików zaznaczonych na Rys.5.

Na dole ekranu pojawią się wartości energii odpowiadające pozycji kursora.

Zapisać widmo na zewnętrznym (własnym) nośniku pamięci „pen-drive”

**File -> Save as -> ASCII SPE**

Kalibracja zakończona.

### 3.3. Pomiar widma fotonów nieznanego źródła promieniotwórczego

Zadaniem wykonujących ćwiczenie jest identyfikacja wybranych przez prowadzącego źródeł promieniotwórczych poprzez pomiar emitowanego przez te źródła widma promieniowania gamma.

W tym celu po wykonaniu pomiaru i zaobserwowaniu widma na ekranie należy:

1. Wyznaczyć energie wszystkich fotopików
2. Wyznaczyć energie krawędzi comptonowskich
3. Określić zdolność rozdzielczą spektrometru dla kilku wybranych energii.
4. Zapisać widmo na zewnętrznym (własnym) nośniku pamięci „pendrive”  
**File -> Save as -> ASCII SPE**
5. Zapisać mierzone równocześnie widmo z detektora scyntylicyjnego
6. Określić zdolność rozdzielczą spektrometru scyntylicyjnego.

Uwaga: Zdolność rozdzielczą wyznacza się poprzez podanie szerokości fotopiku (w jednostkach energii) zmierzonej w połowie wysokości. Wielkość ta określana jest symbolem **FWHM** (Full Width at the Half of Maximum).

### **3.4. Pomiar tła**

1. Usunąć źródło i uruchomić pomiar.
2. Zapisać widmo na zewnętrznym nośniku pamięci.



### 3. Opracowanie wyników i przygotowanie sprawozdania

Sprawozdanie składa się z części opisowej i pomiarowej.

W części opisowej należy krótko przedstawić następujące zagadnienia:

1. W jakich procesach emitowane jest promieniowanie gamma?
2. Jakie są własności tego promieniowania i z czego one wynikają?
3. Jakie są charakterystyczne cechy oddziaływania promieniowania gamma z materią?
4. Jaka jest zasada działania i konstrukcja detektorów półprzewodnikowych i scyntylicyjnych?

W części pomiarowej należy:

1. Krótko opisać układ pomiarowy i sposób wykonania pomiarów.
2. Opisać metodę kalibracji i przedstawić wykres zależności pomiędzy numerem kanału i energią zmierzonych fotopików. Czy jest to zależność liniowa?
3. Zaprezentować kształty zmierzonych widm i zaznaczyć na nich punkty, dla których wyznaczano energie. Wpisać na wykresach wyznaczone wartości energii.
4. Wyznaczyć zdolności rozdzielcze spektrometru germanowego i scyntylicyjnego dla kilku wybranych energii fotonów (FWHM). Jak zdolność rozdzielcza zależy od energii?
5. Zidentyfikować nieznanne izotopy i podać ich schematy rozpadów. (Izotopy te są jednymi z prezentowanych na tablicach w Laboratorium)
6. Porównać wyznaczone wartości z wartościami na schematach. Sprawdzić czy zgadzają się w granicach wyznaczonych dokładności.
7. Przedstawić wnioski własne z wykonanego ćwiczenia.

### 6. Literatura

[1] James E. Martin, Physics for Radiation Protection, A Handbook, WILEY-VCH, 2006

[2] J.Araminowicz, K.Małuszyńska, M.Przytuła, Laboratorium Fizyki Jadrowej, PWN, Warszawa, 1978

## Dodatek 1.

### Związki kinematyczne w efekcie Comptona

Przypomnijmy na początek kilka użytecznych zależności. Związek pomiędzy częstotliwością fali  $\nu$  i energią fotonu.

$$E = h \cdot \nu \quad (1)$$

Relatywistyczny związek pomiędzy energią całkowitą cząstki,  $E$ , pędem  $p$ , i masą spoczynkową,  $m_0$ .

$$E^2 = m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2 \quad (2)$$

Masa fotonów równa jest zeru. Związek pomiędzy energią i pędem dla fotonu jest więc

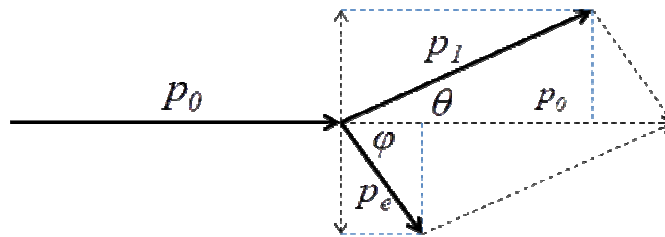
$$E = p \cdot c \quad \text{lub} \quad p = \frac{E}{c} \quad (3)$$

Ze wzorów (1) i (3) wynika, że

$$p = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (4)$$

bowiem  $\lambda = c/\nu$ .

Wprowadźmy kilka oznaczeń użytecznych w naszych rozważaniach. Oznaczmy przez  $E_0$  i  $p_0$  energię i pęd padającego fotonu, a przez  $E_1$  i  $p_1$ , energię i pęd fotonu rozproszonego. Przez:  $m_0$ ,  $E_e$ ,  $T_e$ , i  $p_e$  oznaczmy odpowiednio: masę spoczynkową, energię całkowitą, energię kinetyczną i pęd elektronu odrzutu. Schemat kinematyczny przedstawiony jest poniżej.



Zapiszmy prawa zachowania pędu i energii dla naszego przypadku. Suma składowych pędu rozproszonego fotonu i odrzuconego elektronu, równoległych do kierunku lotu padającego fotonu, równa jest pędowi fotonu padającego,  $p_0$ , czyli

$$p_0 = p_1 \cdot \cos \vartheta + p_e \cdot \cos \varphi \quad (5a)$$

Suma składowych prostopadłych musi być równa zero, gdyż układ foton-elektron przed zderzeniem nie ma pędu w tym kierunku, tj.

$$0 = p_1 \cdot \sin \vartheta - p_e \cdot \sin \varphi \quad \text{lub} \quad p_1 \cdot \sin \vartheta = p_e \cdot \sin \varphi \quad (5b)$$

Prawo zachowania energii mówi, że sumaryczna energia układu składającego się z padającego fotonu i spoczywającego elektronu ma być równa sumie energii fotonu rozproszonego i elektronu odrzuconego. (Pamiętamy, że energia spoczywającego elektronu równa jest jego masie spoczynkowej pomnożonej przez  $c^2$ .)

$$E_0 + m_0 \cdot c^2 = E_1 + \overbrace{T_e}^{E_e} + m_0 \cdot c^2, \quad (5c)$$

z czego wynikają związki:

$$E_0 - E_1 = T_e \quad \text{oraz} \quad c \cdot (p_0 - p_1) = T_e \quad (6)$$

Dla zapisania ostatniej równości uwzględniliśmy zależność (3).

Równania (5abc) umożliwiają wyznaczenie energii fotonu rozproszonego lub zmianę długości fali w efekcie Comptona. Dla wyznaczenia tych wielkości skorzystajmy najpierw z zasady zachowania pędu. Podnieśmy do kwadratu stronami równania (5ab)

$$(p_0 - p_1 \cdot \cos \vartheta)^2 = p_e^2 \cdot \cos^2 \varphi \quad (7a)$$

$$p_1^2 \cdot \sin^2 \vartheta = p_e^2 \cdot \sin^2 \varphi \quad (7b)$$

Po dodaniu ich stronami otrzymujemy

$$p_0^2 + p_1^2 - 2 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot \cos \vartheta = p_e^2 \quad (8)$$

Znajdźmy teraz związek pomiędzy energią kinetyczną i pędem elektronu po zderzeniu z fotonem. Z zależności (2) mamy

$$\overbrace{(T_e + m_0 \cdot c^2)^2}^{E_e^2} = c^2 \cdot p_e^2 + (m_0 \cdot c^2)^2, \quad (9)$$

bowiem energia całkowita jest sumą energii kinetycznej i energii spoczynkowej. Wzór (9) można wyrazić prościej w postaci

$$T_e^2 + 2 \cdot T_e \cdot m_0 \cdot c^2 = c^2 \cdot p_e^2 \quad \text{lub} \quad T_e^2 / c^2 + 2 \cdot T_e \cdot m_0 = p_e^2 \quad (10)$$

Skorzystajmy teraz z zasady zachowania energii. Wykorzystując wzór (6) możemy wzór (10) przepisać w postaci

$$(p_0 - p_1)^2 + 2 \cdot m_0 \cdot c \cdot (p_0 - p_1) = p_e^2 \quad (11)$$

Zapiszmy równość wynikającą ze wzorów (8) i (11)

$$(p_0 - p_1)^2 + 2 \cdot m_0 \cdot c \cdot (p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot \cos \vartheta \quad (12)$$

Można to przepisać w prostszej postaci jako

$$m_0 \cdot c \cdot (p_0 - p_1) = p_0 \cdot p_1 \cdot (1 - \cos \vartheta) \quad (13)$$

lub

$$1/p_1 - 1/p_0 = (1 - \cos \vartheta) / (m_0 \cdot c) \quad (14)$$

Korzystając ze wzoru (4) możemy w oparciu o wzór (14) wyznaczyć zmianę długości fali w efekcie Comptona,

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c} \cdot (1 - \cos \vartheta) = \lambda_C \cdot (1 - \cos \vartheta) \quad (15)$$

Wielkość

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 \cdot c} = 2.4263 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (16)$$

nosi nazwę **komptonowskiej długości fali elektronu**, zaś  $\Delta\lambda$  nazywa się **przesunięciem komptonowskim**. Zauważmy, że zmiana długości fali w efekcie Comptona nie zależy od rodzaju substancji rozpraszającej i długości fali padającego fotonu, a jedynie od kąta rozproszenia. Oznacza to, że względna zmiana energii jest duża dla fotonów o dużych energiach, czyli małych długościach fal. Kiedy kąt  $\vartheta$  równy jest zeru (zderzenie peryferyjne), długość fali nie zmienia się podobnie jak w rozproszeniu klasycznym, kiedy jest równy  $180^\circ$  (zderzenie centralne), to długość fali fotonu rozproszonego powiększa się w stosunku do długości fali fotonu padającego o podwójną komptonowską długość fali elektronu i rozproszenie komptonowskie jest maksymalne.

Warto zauważyć, że efekt Comptona może zachodzić także dla innych cząstek niż elektrony (np. w przestrzeni kosmicznej zderzenia fotonów z protonami). Skala tego efektu, czyli zmiana długości fali (wzór (15)), zależy oczywiście od komptonowskiej długości fali cząstki, która np. dla protonu jest prawie 1900 razy mniejsza niż dla elektronu.

Korzystając z kolei ze związku (3) możemy ze wzoru (14) otrzymać wyrażenie na energię rozproszonego fotonu

$$E_1 = E_0 \cdot \frac{m_0 \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2 + E_0 \cdot (1 - \cos \vartheta)} \quad \text{lub} \quad h\nu_1 = \frac{h\nu_0}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos \vartheta)} \quad (17)$$

gdzie w drugiej równości wprowadziliśmy wielkość wyrażającą energię fotonu w jednostkach energii spoczynkowej elektronu:

$$\alpha = \frac{h\nu_0}{m_0c^2} \quad (18)$$

Pamiętamy, że dla elektronu  $m_0c^2=0.511 \text{ MeV}$ .

Możemy też korzystając z wzoru (6) obliczyć energię kinetyczną elektronu odrzutu otrzymując

$$T_e = h\nu_0 \cdot \frac{\alpha \cdot (1 - \cos \vartheta)}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos \vartheta)} \quad (19)$$

Analizując postać wzorów (17) i (18) widzimy, że ze wzrostem kąta zmniejsza się energia fotonu rozproszonego i zwiększa się energia odrzuconego elektronu.

To samo możemy oczywiście zapisać także w postaci

$$E_1 = E_0 \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \quad (17a)$$

Analogicznie, energia elektronu odrzutu może być zapisana jako

$$E_e = E_0 \frac{\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)} \quad (19a)$$