MMF – ćwiczenia nr 1 - Równania różnicowe

1. Rozwiązać równania różnicowe pierwszego rzędu:

   (a) $y_{n+1} - y_n = 1$, $y_1 = 1$

   (b) $y_{n+1} - ny_n = n!$, $y_1 = 1$

   Wsk. Podzielić równanie przez $n!$ i podstawić $z_n = y_n/(n-1)!$

2. Rozwiązać równania różnicowe drugiego rzędu:

   (a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, $x_0 = 1,\ x_1 = 2$

   (b) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ (ciąg Fibonacciego).

   (c) $y_n^2 = y_{n-1} y_{n+1}$, $y_0 = 4,\ y_1 = 1$

   Wsk. Zlogarytmować równanie i potem podstawić $z = \ln y$.

3. Rozwiązać równanie: $y(n) = y\left(\frac{n}{2}\right) + n$, $y(1) = 3$. Wsk.Podstawić $n = 2^k$, po czym rozwiązać równanie na y_k.

4. Obliczyć wyznacznik D_n zdefiniowany jako:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & & & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 1 & 4 \end{vmatrix}_{n\mathrm{x}n}$$

MMF – ćwiczenia nr 2 Funkcje zespolone

1. Znaleźć graficznie liczby: z^3, $\sqrt[3]{z}$, $\ln z$ dla (*a*) $z = (-4{,}0)$ oraz (*b*) $z = (1, \sqrt{3})$.

2. Rozwiązać równania na *x*: $e^{ix} = 1$, $e^{ix} = -1$, $e^{ix} = i$.

3. Wyrazić przez „zwykłe” funkcje trygonometryczne/hiperboliczne następujące wyrażenia:

   sin(*ix*), cos(*ix*), tg(*ix*), sh(*ix*), ch(*ix*), th(*ix*).

4. Oszacować wartość wyrażenia $W = |\sin(i+\pi/4)|$.

5. Znaleźć obraz odcinka *L* przy odwzorowaniu *F*(*z*) , jeśli:

   (*a*) $F(z) = e^z$, *L* – odcinek *AB* o końcach *A*=(1,0), *B* = (1, π) lub
   L – prosta o równaniu *y* = π/2 .

   (*b*) $F(z) = e^{iz}$, *L* – odcinek *AB* o końcach *A*=(π,0), *B* = (π, 1).

   (*c*) $F(z) = i\,\bar{z}$, *L* – oś *Oy* .

6. Stosując metodę funkcji zespolonych rozwiązać równanie: $x'' + 2\gamma x' + \beta x = F\cos\omega t$.
   Wsk. Dokonać zamiany: x na z=x+iy oraz $\cos\omega t$ *na* $e^{i\omega t}$.

7. Obliczyć całki:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+\sin\varphi}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+4}, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i)^2} dx .$$

MMF – ćwiczenia nr 3 Funkcje Eulera

Wyrazić przez funkcje Eulera, a następnie uprościć, całki:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$, 2. $\int_{0}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$, 3. $\int_0^1 (-\ln t)^{3/2} dt$, 4. $\int_0^{\pi/2} (\tan t)^{1/3} dt$,

5. $\int_0^1 (1-\sqrt{t})^{1/3} dt$, 6. $\int_{-1}^{1} (1-t)^{1/3} (1+t)^{-1/2} dt$

7. Wyprowadzić zwarty wzór na „silnię” $\Gamma(-n + ½)$.

8. Obliczyć x, dla którego wyrażenie $\ln\binom{N}{x}$ osiąga maksimum.

MMF – ćwiczenia nr 4 Transformacja Laplace’a

1. Obliczyć transformaty Laplace’a funkcji: $f(t) = t\sin\omega t$, $g(t) = \sinh\omega t$ $h(t) = \cosh\omega t$
2. Znaleźć funkcję $f(t)$, dla której transformata Laplace’a wynosi;

$$\tilde{f}(s) = \frac{s+1}{s^2+2s} , \qquad \tilde{f}(s) = \frac{s^3+2s}{(s^2+1)^2} , \qquad \tilde{f}(s) = \frac{s}{s^2+4s+13} .$$

3. Metodą transformat Laplace’a rozwiązać równania:

$$\begin{array}{lll} (a) & f'' + f' = t^2 + 2t, & f(0) = 4, \quad f'(0) = -2 \;, \\ (b) & f'' - f' - 6f = 2\,, & f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \;, \\ (c) & f'' + f = t & f(0) = 1, \quad f'(0) = 2 \;. \end{array}$$

4. Podobną metodą rozwiązać układ równań:

$$\begin{array}{l} f' + 2g = 3t \\ g' - 2f = 4 \end{array} \qquad f(0) = 2, \quad g(0) = 3 \;.$$

5. Określić przebieg natężenia prądu elektrycznego $I(t)$ w obwodzie RC , podłączonym do stałego napięcia U_0. Przyjąć, że początkowo kondensator nie był naładowany: $Q(0) = 0$.

6. Określić przebieg natężenia prądu elektrycznego $I(t)$ w obwodzie RL , podłączonym do zmiennego napięcia U (t) = $U_0 \sin\omega t$. Przyjąć, że $I(0) = 0$.

MMF – ćwiczenia nr 5 – 6 Wielomiany ortogonalne

1. Zortogonalizować wielomiany: 1 ; x ; x^2 dla $x \in \langle -1,1 \rangle$.

2. Napisać równania różniczkowe dla wielomianów Laguerre'a i Czebyszewa.

3. Podać rozwiązanie równania: $(1-x^2)f'' - 2xf' + 12f = 0$, $f(0)=0$, $x \in \langle -1,1 \rangle$.

4. Korzystając ze wzoru Rodriguesa obliczyć współczynniki a_n i b_n przy pierwszych dwóch najwyższych potęgach wielomianów Legendre'a P_n i Laguerra L_n^m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

5. Obliczyć wartość wielomianu L_n^m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ dla $x = 0$.

6. Obliczyć kwadraty norm wielomianów Laguerre'a i Czebyszewa: $\| L_n^m \|^2$ oraz $\| P_n \|^2$.

7. Napisać związki rekurencyjne dla wielomianów Laguerre'a i Czebyszewa.

8. Korzystając ze związków rekurencyjnych dla wielomianów obliczyć całki:

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 H_1(x) H_3(x)\, dx \ , \qquad\qquad (b) \quad \int_{0}^{\infty} e^{-x} x^2 L_2^1(x) L_3^1(x)\, dx \ .$$

9. Korzystając z odpowiednich funkcji tworzących obliczyć $P_n(\pm 1)$; $H_n(0)$; $L_n^0(0)$; $L_n^1(0)$.

10. Korzystając z równania rekurencyjnego dla wielomianów Czebyszewa sprawdzić wzór:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)\ , \quad n > 1, \qquad T_0(x) = 1.$$

11. Określić wszystkie miejsca zerowe wielomianu $T_5(x)$, $x \in \langle -1,1 \rangle$.

12. Sprawdzić rozwinięcie dla funkcji tworzącej dla wielomianów Czebyszewa:

$$\frac{4-w^2}{4-4wx+w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n\, T_n(x) \ .$$

Wsk. Pomnożyć całe równanie przez mianownik lewej strony, a następnie przyrównywać współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej w po obu stronach otrzymanej równości. Porównac wyniki z równaniem rekurencyjnym dla tych wielomianów.

MMF – ćwiczenia nr 7 - Funkcje sferyczne

1. Napisać jawne wzory na wszystkie funkcje sferyczne $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ wywodzące się z wielomianu Legendre'a $P_2(t)$, gdzie $t = \cos\theta$.

2. Obliczyć normę $\|Y_{2,1}\|$.

3. Wyrazić wielomian $P_l(t)$ przez funkcje sferyczne $Y_{lm}(t,\varphi)$.

4. Wyrazić funkcję $f(x,y,z) = xy$ przez funkcje sferyczne $Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

5. Na sferze jednostkowej zaznaczyć punkty, gdzie $Y_{2,1}(\theta,\varphi) = 0$.

6. Sprawdzić, że równanie Laplace'a jest spełnione również przez funkcję $f(r,\theta,\varphi)=r^{-l-1}\,Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ [niezależnie od funkcji $f(r,\theta,\varphi)=r^l\,Y_{l,m}(\theta,\varphi)$].

7. Wykazać, że funkcje sferyczne są funkcjami własnymi operatora trzeciej składowej L_3 momentu pędu, tzn. że $L_3 Y_{l,m}=m\hbar Y_{l,m}$ ($\hbar$ - stała Plancka podzielona przez 2π), gdzie $L_3 = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$.

8. Sprawdzić, że funkcja $f(x,y,z) = \int_0^{2\pi}(z+ix\cos u+iy\sin u)^l\, e^{imu}\, du$ speełnia równanie Laplace'a. Na tej podstawie podać – z dokładnością do stałej - całkowe przedstawienie funkcji sferycznych.

MMF – ćwiczenia nr 8 – 9 - Funkcje Bessela

1. Wykazać, że $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ (n – liczba naturalna).

2. Podać (nieosobliwe) rozwiązanie równania: $x^2 f'' + xf' + (4x^2 - 9) f = 0$.

3. Podać szereb Bessela dla równania: $x^2 f'' + xf' - (x^2 + v^2) f = 0$.

4. Wyrazić funkcje sin x oraz cos x przez funkcje Bessela (we wzorze na funkcję tworzącą podstawić $w = i$).

5. Wykazać, że $J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x) J_k(y)$. (Wsk. Funkcje tworzące).

6. Zapisać w postaci szeregu liczbowego całkę $I = \int_0^{2\pi} \cos(2\sin\varphi - 3\varphi)\, d\varphi$.

7. Wykazać, że transformata Laplace'a funkcji Bessela $J_0(t)$ wynosi $\tilde{J}_0(s) = 1/\sqrt{s^2+1}$, zaś funkcji $J_0(2\sqrt{t})$ wynosi $\frac{1}{s} e^{-1/s}$

8. Wyrazić przez funkcje elementarne funkcję $J_{-3/2}(x)$.

9. Znaleźć dwa związki między funkcjami J_0 oraz J_1 . (Wsk. Wzory rekurencyjne dla funkcji Bessela).

10. Udowodnić, że $J_{v+1} + J_{v-1} = \frac{2v}{x} J_v$.

11. To samo dla sferycznych funkcji Bessela: $j_{l+1} + j_{l-1} = \frac{2l+1}{x} j_l$.

12. Rozwiązać równanie: $R'' + \frac{2}{r} R' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0$ $R = R(r)$.

    Wsk. Dokonać zamiany zmiennych: $r \to y = kr$, $R \to S = \sqrt{y}\, R$,

    czyli $r = \frac{y}{k}$, $R = y^{-1/2} S$.

13. Sprawdzić ortogonalność funkcji $J_{1/2}(2x)$ oraz $J_{1/2}(x)$ dla $L = 1$.

MMF – ćwiczenia nr 10 - 11 - Dystrybucje

1. Sporządzić wykresy funkcji: $\theta(-x),\ \theta(x^2-a^2),\ \theta(a^2-x^2),\ \theta(-x^2+4x-3)$, gdzie $\theta(x)$ – funkcja schodkowa Heaviside'a.

2. Obliczyć sploty dwóch ciągów (a_n) i (b_n) : $a*a$ oraz $a*b$, gdzie $a_n=\delta_{1,n}+\delta_{2,n}$, $b_n=\ \delta_{1,n}+2\delta_{2,n}-\delta_{3,n}$, n – liczba całkowita.

3. Obliczyć sploty funkcyjne $f*g$ dla:

   (a) $f(x)=\theta(1-x^2),\ g(x)=\theta(x)$ (b) $f(x)=x^2\theta(1-x^2),\ g(x)=x\theta(x)$,

   (c) $f(x)=G_\alpha(x),\quad g(x)=G_\beta(x)$, G – funkcja Gaussa równa $G_\gamma(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}}e^{-x^2/2\gamma^2}$.

   Na podstawie otrzymanego wyniku napisać zwarty wzór na n – krotny splot: $G_\alpha*G_\alpha*\ldots*G_\alpha$.

4. Obliczyć wartości główne całek:

   (a) $I=P\displaystyle\int_0^4\frac{dx}{x-1}$, (b) $I=P\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+1}$. Porównaj z całką: $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{2A}\frac{x\,dx}{x^2+1}$.

5. Znaleźć granice ciągów przy $n\to\infty$: (a) $P\,\dfrac{\cos nx}{x}$ (b) $P\,\dfrac{\cos(x/n)}{x}$.
6. Znaleźć granice ciągów dystrybucyjnych: (a) $f_n(x)=n\,e^{-n\,|x-1|}$, (b) $f_n(x)=n\,e^{-|nx-1|}$.

7. Napisać ciąg δ-podobny (δ_ε) startując z funkcji ($-f_F'(x)$) , gdzie funkcja Fermiego $f_F(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$.

8. Uprościć iloczyny: $A=x\delta(3-2x)$, $B=\ x\delta(x^2-4)$, $C=\ \sin(\pi x)\ \delta(x^2-4)$
9. Uprościć sploty: $A=x*\delta(3-2x)$, $B=\ x*\delta(x^2-4)$, $C=\ \sin(\pi x)*\delta(x^2-4)$

10. Naszkicować wykresy pierwszej i drugiej pochodnej dystrybucyjnej dla funkcji:

    (a) $f(x)=e^{-|x|}$, (b) $f(x)=\theta(\pi^2-x^2)\,\sin x$.

11. Obliczyć pochodną dystrybucyjną funkcji $f(x)=\ln(\,|\,x\,|)$.

12. Uprościć wyrażenia: $A=\ x\delta''(x)$, $B=\ x^2\delta''(x)$ $C=x^3\delta''(x)$.
13. Rozwiązać równanie: $\Delta f(\vec r)\pm k^2 f(\vec r)=-\delta(r)$

    (Wsk. Skorzystać ze wzoru na laplasjan funkcji $f_o(r)=\dfrac{1}{r}e^{-\alpha r}$: $\Delta f_0=\alpha^2 f_0-4\pi\delta(r)$).

MMF – ćwiczenia nr 12 - 13 - Transformacja Fouriera

1. Obliczyć transformaty Fouriera dla funkcji:

$(a)\quad f(x)=e^{-|x|}$, $\qquad (b)\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$,

$(c)\quad f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $\qquad (d)\quad f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$.

2. Obliczyć dwuwymiarowe transformaty Fouriera dla funkcji:

$(a)\quad f(x,y)=\theta(R-r)\,,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\qquad (b)\quad f(x,y)=\dfrac{1}{r}e^{-\alpha r}$.

W zadaniu (b) przyjąć następującą definicję transformaty:

$$\hat{f}(\vec{q})=\iint_{R^2} e^{-2\pi i\,\vec{q}\circ\vec{r}}\, f(\vec{r})\,d^2\vec{r} \qquad .$$

3. Obliczyć trówymiarowe transformaty Fouriera dla funkcji:

$(a)\quad f(x,y,z)=\theta(R-r)\,,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\qquad (b)\quad f(x,y,z)=\dfrac{1}{r}e^{-\alpha r}$.

4. Obliczyć dystrybucyjne transformaty Fouriera dla funkcji:

$(a)\quad f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $\qquad (b)\quad f(x)=\cos^2 x$,

$(c)\quad f(x)=x\sin x$, $\qquad (d)\quad f(x)=P\dfrac{1}{x}$.

5. Znaleźć szczególne rozwiązania równania:

$(a)\quad f''(x)-4f(x)=\delta(x)$,

$(b)\quad f''(x)+f'(x)+f(x)=\delta(x)$.

MMF – ćwiczenia nr 14 - Szeregi Fouriera

1. Napisać wykładniczy i trygonometryczny szereg Fouriera dla funkcji okresowych:

   (a) $f(x) = \sin^3 x$,

   (b) $f(x) = 1$ (dla $x \in \langle 0, 1)$) oraz $f(x) = 0$ (dla $x \in \langle 1, 2)$).
   Okres periodyczności $L = 2$.

   (c) $f(x) = x^2$, dla $x \in \langle -1, 1)$, $L = 2$.

2. Rozwinąć w (wykładniczy i trygonometryczny) szereg Fouriera dystrybucje:

   (a) $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2m - 1)$

   (b) $f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(x - 4m - 1) - \delta(x - 4m - 2)]$.

   (c) $f(x) = \delta(\sin x)$.

3. Napisać skończony szereg Fouriera $\hat{A}_\nu$ dla ciągu $A_n = \delta_{1,n} + \delta_{2,n}$, $n, \nu = 0, 1, 2, \ldots\ N$-1.

TEMATYKA WYKŁADÓW	Liczba wykładów
1. Wstęp. Funkcje zespolone	1
2. Funkcje Eulera	1
3. Transformacja Laplace'a	1
4. Wielomiany ortogonalne	2
5. Funkcje sferyczne	1
6. Funkcje Bessela	2
7. Dystrybucje	2
8. Transformacja Fouriera	2
9. Szeregi Fouriera	2

Kolokwia

- Siódmy i czternasty tydzień zajęć (zamiast wykładów)

- Każde kolokwium: 5 zadań po 2 punkty (łącznie za dwa kolokwia 20 pkt.)

- Osoby, które uzyskają 16 lub więcej punktów, mogą być zwolnione z egzaminu (z oceną końcową 3; 3,5 ; 4; 4,5 ; lub 5).

- Dopuszczalne 3 nieusprawiedliwione nieobecności. Każda następna – jeden punkt ujemny.