Wyznaczanie parametrów wiązki gaussowskiej

Spis treści

1. Wstęp

W większości zastosowań laserów, a zwłaszcza w optyce nieliniowej, konieczne jest modyfikowanie wiązki emitowanej przez źródło. Aby móc dobrać odpowiednią optykę do transformacji wiązki laserowej konieczna jest znajomość, jaki kształt ma wiązka oraz jak się transformuje przez układy optyczne. Dodatkowo, rozkład gęstości energii (lub mocy) w przekroju poprzecznym wiązki wywiera wpływ na transformację wiązki. Dodatkowo, w wielu eksperymentach jakość wiązki laserowej jest ważnym parametrem mającym bardzo duży wpływ na uzyskiwane wyniki.

Niestety większość laserów nie emituje idealnej wiązki gaussowskiej. W celu ilościowego określenia jakości wiązki gaussowskiej wprowadza się parametr M^2 (tzw. współczynnik M-kwadrat). Określa on liczbowo, ile razy średnica rzeczywistej wiązki w przewężeniu jest większa od średnicy przewężenia idealnej wiązki gaussowskiej o ograniczonej rozbieżności dyfrakcyjnej.

$$M^2 = \frac{\pi w_0 \theta}{4\lambda} \tag{1}$$

Wartość parametru M^2 nie może być mniejsza od 1, ograniczenie to jest skutkiem dyfrakcji promieniowania. Dla idealnej wiązki gaussowskiej (rozkład teoretyczny) parametr M^2=1, dla większości wiązek emitowanych przez lasery $M^2>1$. Dla laserów helowo-neonowych typowa wartość M^2 wynosi mniej niż 1.1 natomiast dla laserów wielomodowych wysokiej mocy parametr M^2 może przyjmować wartość 25 – 30. Wartość parametru M^2 w sposób ilościowy określa jakość wiązki laserowej.

Współczynnik M^2 pozwala w sposób ilościowy przewidzieć jakość wiązki, ale również przewidzieć ewolucję promienia wiązki. Wystarczy we wzorach opisujących wiązkę gaussowską zamienić długość fali na iloczyn długości fali i współczynnika M^2. Metoda ta jednak ograniczona jest jedynie do wiązek o kształcie zbliżonym do wiązki gaussowskiej. Zgodnie z normą ISO 11146 współczynnik M^2 można policzyć z zależności średnicy wiązki od odległości wzdłuż kierunku propagacji. Na potrzeby niniejszej instrukcji parametr przyjęto $M^2=1$.

2. Definicja wiązki gaussowskiej

Wyprowadzenie rozwiązania w postaci wiązki gaussowskiej bezpośrednio z równania falowego (w przybliżeniu paraksjalnym) można znaleźć w wielu podręcznikach do fizyki. Tutaj ograniczymy się jedynie do podania ostatecznego rozwiązania i scharakteryzowania podstawowych parametrów wiązki gaussowskiej.

Załóżmy, że wiązka propaguje się wzdłuż osi z a pole elektryczne w płaszczyźnie xy ma profil gaussowski:

$$\boldsymbol{E}(x,y,z=0,t)=\boldsymbol{E_0}exp\left[\frac{-(x^2+y^2)}{w_0^2}\right]\exp(-i\omega t) \tag{2}$$

gdzie: ω jest częstotliwością wiązki, w_0 jest stałą, tzw. szerokość wiązki w przewężeniu. Odpowiadające tej amplitudzie rozkład natężenia ($I=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*$) w płaszczyźnie xy ma profil:

$$I(x,y,z=0,t)=I_0exp\left[\frac{-2(x^2+y^2)}{w_0^2}\right] \tag{3}$$

Traktując równanie (2) jako warunki brzegowe i podstawiając do równania falowego, w przybliżeniu paraksjalnym, można wykazać, że rozkład pola elektrycznego dany jest zależnością:

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\boldsymbol{E_0}\frac{w_0}{w(z)}exp\left[\frac{-(x^2+y^2)}{w(z)^2}\right]\exp\left[i\frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)}\right]\exp[ikz-i\omega t+i\phi(z)] \tag{4}$$

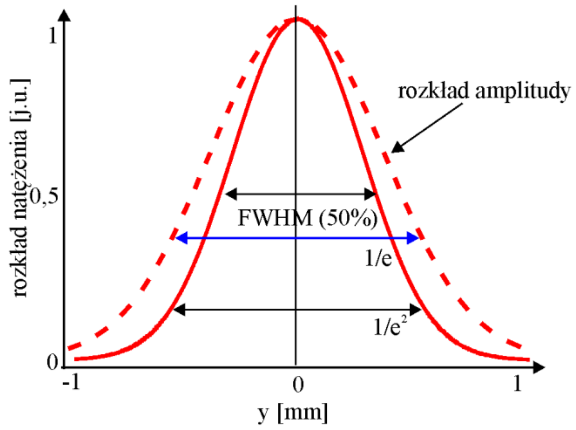
gdzie $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$; λ jest długością fali; R(z) jest promieniem krzywizny frontu falowego, w(z) jest poprzecznym rozmiarem wiązki liczonym od osi optycznej do miejsca gdzie wartość amplitudy maleje e razy, $\phi(z)$ jest przesunięciem fazowym jakie dodatkowo pojawia się z rozchodzeniem się wiązki $\left(\phi(z) = \tan^{-1}\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)$.

Odpowiadający rozkładowi amplitudy (4) profil rozkładu natężenia wyrażony jest wzorem:

$$I(x,y,z,t) = I_0\left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 exp\left[\frac{-2(x^2+y^2)}{w(z)^2}\right] \tag{5}$$

Z powyższego wzoru wynika, że w każdej płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny xy (tzn. prostopadłej do kierunku propagacji wiązki) rozkład natężenia wiązki ma charakter gaussowski. Promień wiązki w każdej płaszczyźnie zdefiniowana jest jako odległość od osi optycznej do miejsca gdzie wartość natężenia wynosi $1/e^2$ (13,5%) maksymalnej wartości w środku wiązki. Parametr w(z) opisuje zatem zależność szerokości wiązki od odległości propagacji z. Talia wiązki w_0 (zwana również przewężeniem wiązki) jest wtedy gdy promień wiązki osiąga wartość minimalną, czyli dla położenia z=0. Zdefiniowana jest jako odległość od osi optycznej do miejsca gdzie wartość natężenia wynosi $1/e^2$ (13,5%) maksymalnej wartości w środku wiązki lub gdzie amplituda wiązka osiąga wartość $1/e$ amplitudy maksymalnej (rys.1). Czasami wygodniej posługiwać się pojęciem szerokości wiązki w znaczeniu całkowitej szerokości w połowie maksymalnej wartości krzywej natężenia, FWHM (ang. *full width at half the maximum value*). Wzór (6) i rysunek 1 pokazują jak powiązanie są zależności FWHM i w_0.

$$w_0 = 0{,}85 \cdot FWHM \tag{6}$$



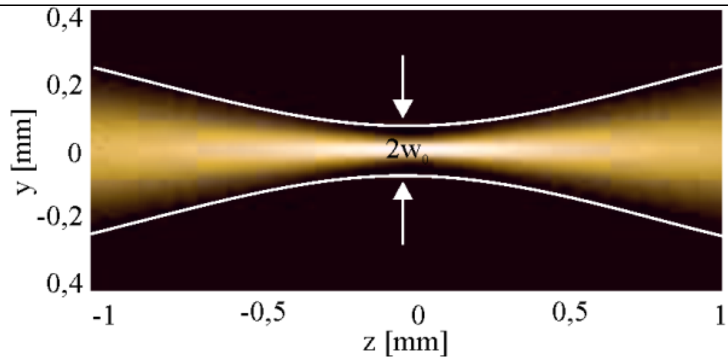
Rys. 1. Profil rozkład natężenia (linia ciągła) i amplitudy (linia przerywana) wiązki gaussowskiej propagującej się wzdłuż osi z.

3. Parametry określające wiązkę gaussowską

Parametry charakteryzujące wiązkę gaussowską przyjmują prostą postać jeśli wyrazie się je za pomocą w_0 oraz wartością odległości propagacji z mierzoną od przewężenia wiązki. Ważnym parametrem określającym rozchodzenie się wiązki jest jej szerokość w punkcie z, w(z):

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z\lambda}{\pi w_0^2}\right)^2} \qquad (7)$$

Graficzne przedstawienie powyższego wzoru zaprezentowano zostało na rys. 2, białe linie przedstawiają rozkład natężenia wiązki. Wiązka taka rozchodząc się wzdłuż osi z, w pewnym określonym miejscu (z=0) zwęża się – jej promień osiąga minimalną wartość w_0 – miejsce to określane jest mianem przewężenia wiązki (ang. *beam waist*) (Rys.2). Należy podkreślić, że parametr w(z) zależy od długości fali propagującej się wiązki. W każdej płaszczyźnie prostopadłej do osi propagacji, wiązka wzdłuż osi propagacji z ma rozkład gaussowski.



Rys. 2. Przykład propagacji wiązki gaussowskiej o przewężeniu w_0 w punkcie z=0.

Weźmy pod uwagę urojoną część funkcji exponencjalnej zależnej od współrzędnych x i y z rozkładu amplitudy wiązki gaussowskiej (4)

$$exp\left[i\frac{k(x^2+y^2)}{2R(z)}\right] \tag{8}$$

gdzie k jest wektorem falowym a R(z) jest funkcją z. Zależność (8) jest funkcją x^2 i y^2. Jest to przybliżenie paraksjalne frontu sferycznego o promieniu R(z). Funkcja R(z) nazywana jest zatem promieniem krzywizny frontu falowego wiązki gaussowskiej. Wielkość R(z) określa się w następujący sposób:

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right] \tag{9}$$

Gdy $z \to \infty$ zależność staje się liniowa, co jest typowe dla wiązek sferyczny pochodzących z punktu z=0. Promień frontu falowego wiązki gaussowskiej dąży do nieskończoności w przewężeniu wiązki, co oznacza, że w przewężeniu front falowy jest płaski. Dla dostatecznie dużych odległości z

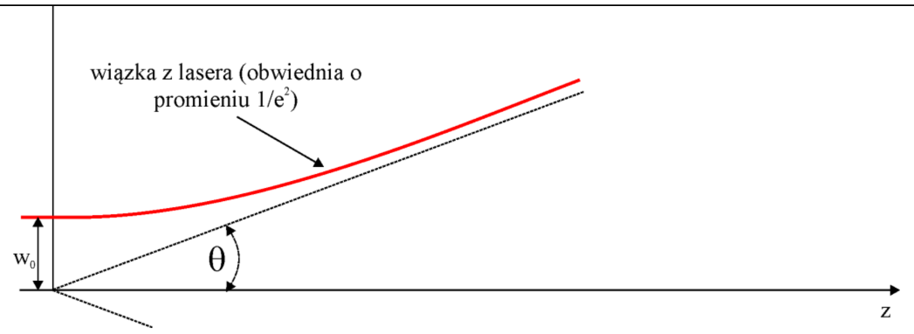
$\left(z \gg \frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)$ rozmiar wiązki oraz promień krzywizny frontu falowego osiągają wartość:

$w(z) = \frac{\lambda z}{\pi w_0}$; $R(z) = z$.

Wierzchołek stożka wzdłuż którego rozchodzi się wiązka laserowa, którego tworząca (obwiednia o promieniu$1/e^2$) tworzy kąt θ z osią optyczną, znajduje się w płaszczyźnie przewężenia (rys.3).

$$\theta \cong \tan(\theta) = \frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$	(10)

Kąt θ nazywany jest kątem rozbieżności wiązki gaussowskiej (ang. *half angle divergence*) i opisuje rozbieżność wiązki w trakcie propagacji. Kąt rozbieżności wiązki i jej szerokość są odwrotnie proporcjonalne, co oznacza, że im większa wartość w_0 tym mniejszy kąt rozbieżności i odwrotnie. Dodatkowo, dla zadanej długości fali λ, szerokość wiązki w(z) oraz jej kąt rozbieżności θ są funkcją jedynie parametru w_0.

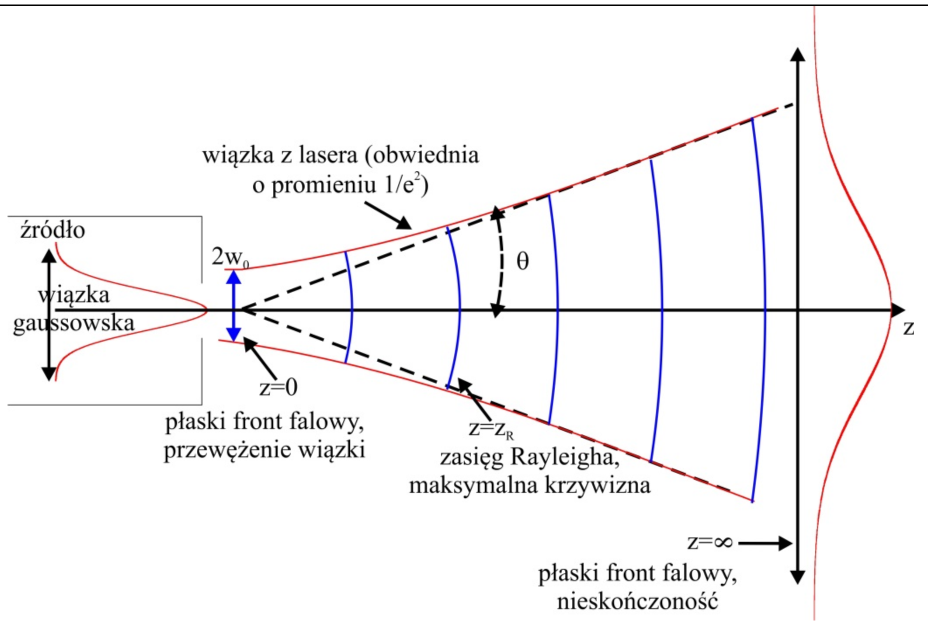


Rys. 3. Kąt rozbieżności wiązki gaussowskiej mierzony w pole dalekim.

Wiązki gaussowskiej nie są rozbieżne liniowo. W pobliżu w_0, z reguły w pobliżu wyjścia lasera kąt rozbieżności jest bardzo mały; w dużej odległości od w_0, w dużej odległości od źródła, kąt rozbieżności osiąga wartość θ.

Do opisu wiązki wprowadza się również parametr zwany zasięgiem Rayleigha (z ang. *Rayleigh range*). Jest to odległość od przewężenia wiązki do punktu, w którym promień wiązki wzrósł $\sqrt{2}$ razy:

$$z_R = \frac{n\pi w_0^2}{2\lambda}$$	(11)

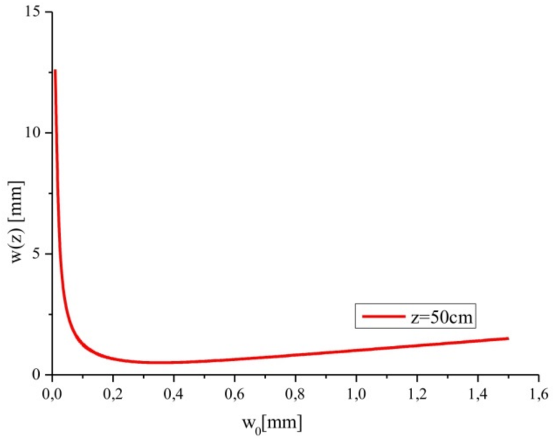


Rys. 4. Rozchodzenie się wiązki gaussowskiej, w każdym przekroju wiązki jest gaussowski rozkład natężenia.

W przewężeniu wiązki (z=0) wiązka gaussowska jest płaska ($R(0) = \infty$). W nieskończoności ($z = \infty$) wiązka jest również płaska ($R(z) = z = \infty$). W miarę rozchodzenia się wiązki od jej przewężenia, krzywizna wiązki rośnie, w pewnej odległości osiąga maksimum, po czym znowu zaczyna maleć. Zasięg Rayilegha jest to zatem odległość od przewężenia wiązki do miejsca, w którym krzywizna wiązki osiąga maksimum. Rozbieżność wiązki powinna być zatem mierzona w odległościach większych niż zasięg Rayilegha (z reguły >10z_R).

Jeśli znamy dokładnie wartość w_0 korzystając z zależności (7) można łatwo wyznaczyć wartość w(z) dla zadanej odległości propagacji z. Jednakże, wzór ten można wykorzystać również do określenia jak wartość w(z) zmienia się wraz z wartością w_0, dla zadanej odległości propagacji z. Rysunek 5 pokazuje zależność w(z) od w_0, dla długości fali 0,793µm na odległości propagacji z=500mm.

Szerokość wiązki na odległości 500mm osiąga minimalną wartość dla początkowej szerokości wiązki w_0~0,4mm. Każda inna wartość w_0 spowoduje, że szerokość wiązki będzie większa na odległości z=500mm.



Rys. 5. Wykres szerokości wiązki gaussowskiej w(z) w funkcji przewężenia wiązki w_0, na odległości propagacji 50cm

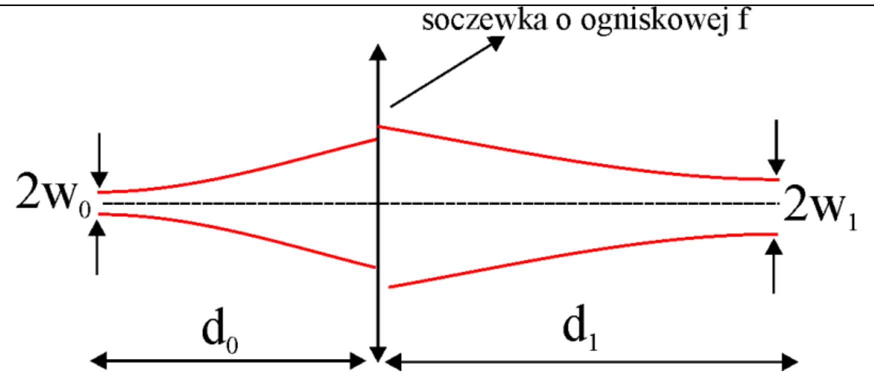
Kolejnym ważnym parametrem jest tzw. niezmiennik wiązki gaussowskiej, zdefiniowany wzorem:

$$\theta \cdot w_0 = \frac{\lambda}{\pi} \Rightarrow 2\theta \cdot 2w_0 = \frac{4}{\pi}\lambda \qquad (12)$$

Iloczyn przewężenia wiązki i kąta rozbieżności jest wielkością stałą dla ustalonej długości fali promieniowania. Wiązka o mniejszym kącie rozbieżności ma większą średnicę przewężenia i na odwrót. Oznacza to, że nie można wygenerować wiązki gaussowskiej o dowolnych wartościach θ i w_0 dla ustalonego λ.

4. Transformacja wiązki gaussowskiej przez soczewki

Wiązka przechodząc przez soczewkę nie zmienia poprzecznego rozkładu pola (rozkład gaussowski jest niezmieniony), zmienia się natomiast promień krzywizny frontu falowego, położenie i rozmiar przewężenia wiązki oraz zasięg Rayleigha.



Rys. 6. Transformacja wiązki gaussowskiej o przewężeniu w_o przez soczewkę o ogoniskowej f.

Na powyższym rysunku d_0 oznacza położenie przewężenia wiązki padającej na soczewkę (tzw. wiązka przedmiotowa), d_1 oznacza położenie przewężenia wiązki po przejściu przez soczewkę, natomiast f – jest ogniskową soczewki.

Wielkości d_0 i d_1 związane są zależnością:

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_0 + \frac{z_R^2}{d_0 - f}} = \frac{1}{f} \tag{13}$$

Gdzie z_R jest zasięgiem Rayleigha wiązki padającej na soczewkę. Gdy $z_R \to 0$ powyższe równanie przyjmuje taką samą postać jak równanie soczewkowe w optyce geometrycznej.

Promień wiązki padającej a soczewkę w_0 (w przewężeniu) oraz promień wiązki wychodzącej z soczewki związane są zależnością:

$$w_1^2 = \frac{w_0^2}{\left(1 - \frac{d_0}{f}\right)^2 + \left(\frac{z_R}{f}\right)^2} \tag{14}$$

W sytuacji gdy $d_1 = d_2 = f$, powyższy wzór upraszcza się do wzoru wiążącego średnicę przewężenia w_0 ze średnicą w_1 wiązki padającej na soczewkę o długości ogniskowej f

$$w_0 = \frac{\lambda f}{\pi w_1} \tag{15}$$

Zatem rozmiar przewężenia wiązki padającej na soczewkę jest odwrotnie proporcjonalny do przewężenia wiązki wychodzącej z soczewki.

Z powyższego wzoru wyniku, że jeśli chcemy np. zmniejszyć średnicę wiązki laserowej w płaszczyźnie ogniskowej, to można to zrealizować w następujący sposób:

- skrócić długość fali promieniowania
- zastosować soczewkę o krótszej ogniskowej
- zwiększyć średnicę wiązki padającej na soczewkę

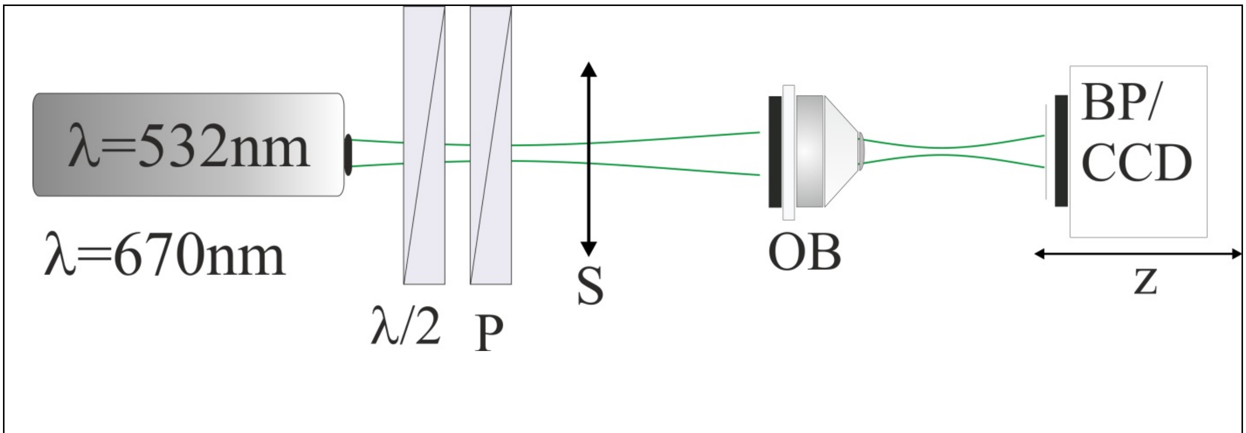
Z powyższego wzoru wynika również, że zasięg Rayleigha jest proporcjonalny do kwadratu długości ogniskowej *f*.

5. Układ eksperymentalny i wykonanie ćwiczenia

Celem eksperymentu jest wyznaczenie szerokości wiązki w_0 dla zadanej długości fali.

UWAGA: Wyniki uzyskane dla lasera emitującego wiązkę o długości fali 642nm wykorzystane będą w ćwiczeniu „Ćwiczenie 2: Solitony optyczne w nematycznym ciekłym krysztale". Wyniki uzyskane dla lasera emitującego wiązkę o długości fali 532nm wykorzystane będą w ćwiczeniu „Ćwiczenie 3: Całkowicie optyczny pomiar stałych elastycznych".

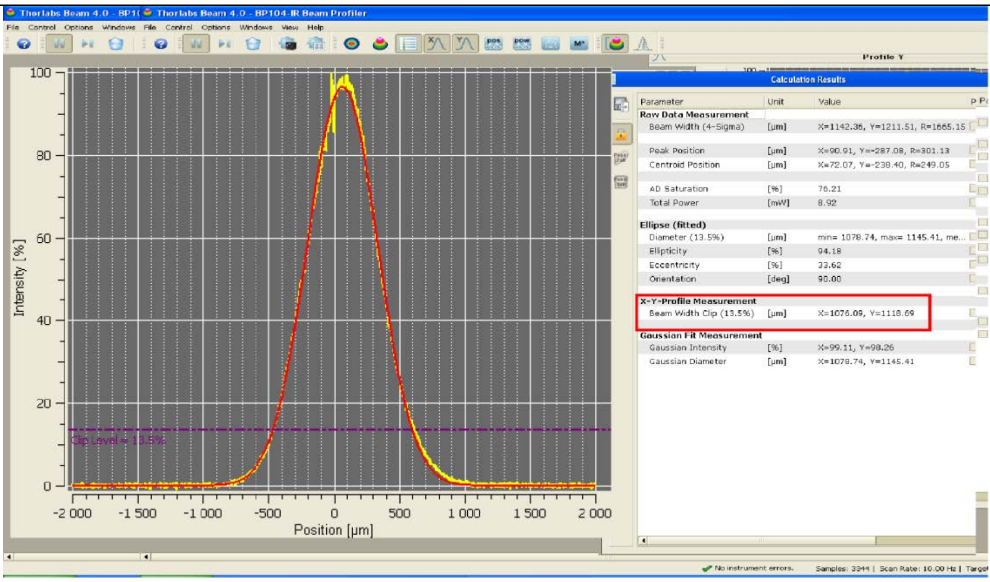
A. Pomiar przewężenia wiązki na podstawie kąta rozbieżności



Rys. 7. Schemat podstawowego układu eksperymentalnego wykorzystanego do pomiaru przewężenia wiązki gaussowskiej.

W pierwszej części ćwiczenia należy wyznaczyć szerokość wiązki emitowanej przez laser o długości fali $\lambda = 532nm$ oraz szerokość wiązki po przejściu przez układ soczewek/obiektyw. Pomiary przeprowadzone będą w układzie jak na rys. 7. Zaznaczone na rysunku półfalówka i polaryzator służą do kontroli mocy wiązki.

Za obiektywem ustawiona jest kamera CCD i/lub Beam Profiler (BP) służąca/cy do rejestracji obrazu/plamki. Kamera/(BP) ustawiona jest na stoliku mikrometrycznym umożliwiającym precyzyjny przesuw wzdłuż osi z (oś propagacji). Należy zarejestrować obraz plamki dla różnych położeń kamery/BP wzdłuż osi z. Przykładowy obraz uzyskany dla wiązki o długości fali $\lambda = 642nm$, po przejściu przez obiektyw, w odległości z=4mm od obiektywu przedstawiony jest na rys.8.

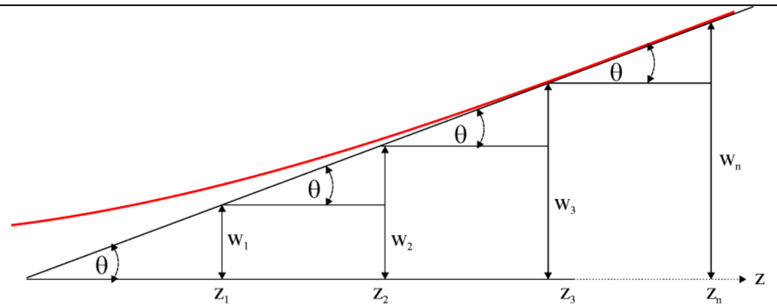


Rys. 8. Przykładowy wynik pomiaru szerokości wiązki gaussowskiej o długości fali $\lambda = 793nm$ po przejściu przez obiektyw mikroskopowy, w odległości z=4mm za obiektywem, wykonany przy użyciu profilometru wiązki

Na podstawie uzyskanych szerokości profilu gaussowskiego w(z) dla kilku położeń wzdłuż osi z należy oszacować kąt rozbieżności dyfrakcyjnej θ (patrz Rys. 9):

$$tan\theta = \frac{w(z_n) - w(z_1)}{z_n - z_1} \qquad (16)$$

Mając wyznaczony kąt rozbieżności należy skorzystać ze wzoru (10) w celu obliczenia szerokości wiązki w przewężeniu w_0.



Rys. 9. Zależność kąta rozbieżności wiązki gaussowskiej od długości propagacji z i szerokości wiązki w(z).

Przeprowadzenie pomiarów:

[1]. Określić szerokość wiązki laserowej padającej na obiektyw/soczewkę

[2]. Wyznaczyć zależność w(z) dla różnych położeń wzdłuż osi z za obiektywem/soczewką oraz dla kilku wartości mocy Policzyć kąt rozbieżności i szerokość wiązki w przewężeniu dla stosowanych obiektywów/soczewek. Pomiary przeprowadzić dla 2 obiektywów o różnych ogniskowych.

[3]. Następnie należy zmienić szerokość wiązki padającej na obiektyw i wykonać analogiczne jak w pkt. 2 pomiary.

[4]. Dla każdego obiektywu/soczewki policzyć zasięg Rayleigh'a.

[5]. Po wyznaczeniu szerokości w przewężeniu należy sprawdzić parametr niezmienności wiązki gaussowskiej (wzór 12).

[6]. Wykonać analogiczne pomiary (pkt. 1-4) dla drugiego źródła.

UWAGA: profilometr podaje wartość $2w(z)$ a nie $w(z)$!!! Zawsze należy upewnić się, czy jednostkami są μm a nie pixele oraz czy szerokość wiązki określana na poziomie $\frac{1}{e^2}$ czy jako FWHM (na poziomie 50%). W przypadku korzystania z funkcji wyznaczania kąta rozbieżności należy sprawdzić czy podawany przez program kąt jest θ czy 2θ.

6. Opracowanie wyników i przygotowanie sprawozdania

1. Cel ćwiczenia
2. Krótki wstęp teoretyczny – co zostało wykonane w ramach ćwiczenia
3. Schemat i opis układu pomiarowego wraz z opisem wykonania ćwiczenia

4. Określenie wraz z dokładnymi wyliczeniami szerokości wiązki dla lasera o długości fali $\lambda = 532nm$, wraz z podaniem obiektywu/soczewki dla którego było liczone przewężenie oraz szerokością wiązki padającej na soczewkę/obiektyw. Wyniki należy podać dla wszystkich wykorzystanych obiektywów/soczewek wraz z wyliczeniami. Dla każdego obiektywu/soczewki podać zasięg Rayleigh'a. Należy podać wyniki dla różnych mocy wiązki oraz określić czy szerokość wiązki zależy od mocy wiązki laserowej.
5. Określenie wraz z dokładnymi wyliczeniami szerokości wiązki dla lasera o długości fali $\lambda = 642nm$, wraz z podaniem obiektywu/soczewki dla którego było liczone przewężenie oraz szerokością wiązki padającej na soczewkę/obiektyw. Dla każdego obiektywu/soczewki podać zasięg Rayleigh'a. Należy podać wyniki dla różnych mocy wiązki oraz określić czy szerokość wiązki zależy od mocy wiązki laserowej.
6. Policzyć iloczyn przewężenia wiązki i kąta rozbieżności dla stosowanych długości fali promieniowania oraz obiektywów/soczewek, dla każdego ze stosowanych źródeł określić parametr M^2.
7. Wnioski

UWAGA: Na zajęcia należy przynieść pendrive'a (min. 1GB). W trakcie zajęć nie ma możliwości korzystania z własnych komputerów.

Wszystkie prezentowane wyniki powinny zawierać komentarz i opis wyjaśniający, każdy prezentowany wykres w sprawozdaniu powinien zawierać podpis pod wykresem oraz komentarz w tekście sprawozdania.

Literatura:

1. R. Jóźwicki, Optyka laserów, WNT, Warszawa, 1981
2. Gaussian Beam Propagation.pdf, www.cvimellesgriot.com
3. J. Alda, „Laser and Gaussian Beam Propagation and Transformation", Encyclopedia of Optical Engineering, Marcel Dekker, 2003