1 Uwagi do kilku zadań z kolokwium Michał Urbański

Poniżej przedstawiam odpowiedzi na kilka pytań (kolokwium z 2007 roku) z komentarzami. Odpowiedzi są krótkie i na kolokwium należy dopisywać komentarze.

1.1 Definicja niepewności i błędu

Podaj definicje niepewności, niepewności standardowej, niepewności rozszerzonej i błędu. Wyjaśnij różnicę pomiędzy niepewnością a błędem.

Błąd - różnica pomiędzy wartością zmierzoną $\tilde{x}$ a wartością poprawną x_0 („prawdziwą"): $\Delta x = \tilde{x} - x_0$
Błędu, ani wartości prawdziwej nie znamy. Błąd jest pojęciem służącym do opisania tego, że wynik pomiaru nie jest dokładny i równy wartości mierzonej.

Niepewność - wartość związana z wynikiem pomiaru charakteryzujący rozrzut wielkości mierzonej.

Definiuje się dwie miary niepewności:

Niepewność standardowa – niepewność wyrażona poprzez odchylenie standardowe. **Niepewność standardowa jest podstawową miarą niepewności.**

Niepewność rozszerzona $U_p(x)$ – promień przedziału ufności (dla zadanego poziomu ufności) wyznaczonymi metodami statystycznymi. Niepewność wyznacza się na podstawie odchylenia standardowego: $U_p(x) = K_p\sigma(\bar{x})$, gdzie K_p jest współczynnikiem rozszerzenia, dla $p = 0,95$ przyjmuje się w przybliżeniu $K_p = 2$, $\bar{x}$ – średnia z danych pomiarowych, $\sigma(\bar{x})$ – odchylenie standardowe średniej $\bar{x}$, $\sigma(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(x)$

Metody szacowania niepewności:

A) Metoda statystyczna polegająca na wyznaczeniu estymatora odchylenia standardowego na podstawie serii danych pomiarowych.
B) Metoda polegająca użyciu innych danych niż seria pomiarowa. Zazwyczaj polega na wyznaczaniu maksymalnej wartości błędu granicznego na podstawie danych producenta i wyznaczeniu wartości odchylenia standardowego dla założonego rozkładu prawdopodobieństwa.

Przykłady błędnych odpowiedzi:

Niepewność to pewne prawdopodobieństwo, że wynik znajduje się w pewnym przedziale.– **niepewność to nie prawdopodobieństwo a promień przedziału ufności**.

Niepewność - to pewien przedział ... (niepewność to nie przedział a promień przedziału)

Niepewność to oszacowanie błędu – za mało, niezbędne jest podanie definicji na czym polega oszacowanie (szacuje się jako odchylenie standardowe).

1.2 Zmienna losowa o rozkładzie równomiernym

Zmienna losowa ma rozkład równomierny w przedziale $[a, b]$. Wyznacz:

a) funkcję rozkładu prawdopodobieństwa z warunku "unormowania",
b) wartość oczekiwaną,
c) odchylenie standardowe,
d) medianę.

Uwagi:
ad a) Wykorzystując warunek unormowania: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ mamy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & dla \quad x \in [a,b] \\ 0 & dla \quad \text{poza } [a,b] \end{cases} \tag{1}$$

ad. b) $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)xdx = \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{b+a}{2}$

ad. c) $\sigma^2(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)(x-E(X))^2dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 dx$

Po obliczeniach:
$\sigma^2(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$
ad. d) $Me(X) = \frac{b+a}{2}$
oczywiście niezbędne są wyprowadzenia i obliczenia.

1.3 Metoda najmniejszych kwadratów

Omów metodę najmniejszych kwadratów. Wyprowadź wzór dla przypadku wyznaczenia nachylenia a funkcji liniowej $y = ax$, gdy wszystkie pomiary $\{x_i, y_i\}$ wykonane zostały z taką samą niepewnością. Udowodnij, że $a = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$

Uwagi:
jeżeli wyprowadzony został wzór dla równania $y = ax + b$ to rozwiązanie będzie traktowane jako wykonanie innego zadania.
Wyprowadzenie: metoda najmniejszych kwadratów minimalizuje błąd dopasowania I:

$$I(a) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i)^2$$

warunek minimum: $\dfrac{\partial I(a)}{\partial a} = 0$

z tego otrzymujemy: $(-2)\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i - ax_i)\,x_i = 0$

czyli: $a\sum\limits_i x_i^2 = \sum\limits_i x_i y_i$ a z tego: $a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$

1.4 Niepewność średniej serii pomiarów

W wyniku pomiaru natężenia prądu uzyskano następujące wyniki (w mA):

2.0 2.2 1.8 2.1 1.9 2.2 1.8 2.3 1.7 2.4 1.6

wyznacz:
a) wartość średnią, czyli estymator wielkości zmierzonej,
b) estymator odchylenia standardowego $s(X)$,
c) estymator odchylenia standardowego wartości średniej,
d) niepewność złożoną (całkowitą) wartości średniej, jeśli pomiar wykonano miernikiem analogowym klasy 2% na zakresie 5mA.

Rozwiązanie:

a) $\bar{x} = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} x_i = 2,0$

b) $s(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{11} (x_i - \bar{x})^2}{10}}$

W celu wyliczenia odchylenia standardowego należy zrobić tabelkę:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
$2,0$	0	0
$2,2$	$0,2$	$0,04$
$1,8$	$0,2$	$0,04$
$2,1$	$0,1$	$0,01$
$1,9$	$-0,1$	$0,01$
$2,2$	$0,2$	$0,04$
$1,8$	-02	$0,04$
$2,3$	$0,3$	$0,09$
$1,7$	$-0,3$	$0,09$
$2,4$	$0,4$	$0,16$
$1,6$	$-0,4$	$0,16$
	$suma =$	$0,64$

Odchylenie standardowe:
$s(x) = \sqrt{\frac{0,64}{10}}$
$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{0,64}{11 \cdot 10}} = \sqrt{\frac{0,64}{110}} \approx \frac{0,08}{10} = 0,08$

d) Składowa aparaturowa niepewności szacowana metodą B wynosi:
$\Delta I = 2\%\ 5mA = \frac{2}{100}\ 5mA = 0,1mA$

Niepewność złożona standardowa u czyli niepewności całkowita uwzględniająca rozrzut opisany odchyleniem standardowym $s(\bar{x})$ oraz składową ΔI obliczoną metodą B wyliczymy jako:

$$u(I) = \sqrt{\sigma^2(\bar{x}) + \frac{(\Delta I)^2}{3}} \tag{2}$$

podstawiając: $u(I) = \sqrt{\frac{0,64}{11\ 10} + \frac{0,01}{3}} = \sqrt{\frac{0,64}{110} + \frac{0,01\frac{110}{3}}{110}} \approx \sqrt{\frac{0,64}{110} + \frac{0,37}{110}}$ (w mA)
i mamy:
$u(I) = \sqrt{\frac{1,01}{110}} mA \approx \sqrt{\frac{1}{100}} mA = 0,1mA$
Niepewność rozszerzona $U_p = K_p s(\bar{X})$, dla $p = 0,95$ $K_p = 2$, czyli $U_{0,85}(I) = 0,2mA$. Wartość natężenia prądu z podaną niepewnością rozszerzoną można zapisać jako:
$I = (2,0 \pm 0,2)mA$
lub wartość natężenia prądu z niepewnością standardową $I = 2,0(0,1)mA$

1.5 Niepewność złożona funkcji dwóch zmiennych

Pokój zmierzono miarką z podziałką centymetrową i uzyskano następujące wartości boków pokoju: $x = (5,51 \pm 0,01)m$ i $y = (4,02 \pm 0,01)m$, gdzie 0,01m jest błędem granicznym oszacowanym na podstawie rozdzielczości miarki. Ponadto stwierdzono, ze ściana jest nierówna i oszacowano amplitudę nierównomierności na ok. 100mm. Wyznacz pole powierzchni i niepewność standardową.
Rozwiązanie:
Pole powierzchni $S = 5,51m\ 4,02m = 22,1502\ m^2$
Przyjmiemy, że błąd graniczny równy jest amplitudzie nierównomierności ściany czyli $\Delta x = \Delta y = 0.1m$ (metoda niestatystyczna analizy niepewności)
Błąd pola powierzchni obliczamy jako różniczkę zupełną:

$$\Delta S = x\Delta y + y\Delta x \tag{3}$$

Niepewność standardową pola powierzchni wyznaczymy zakładając rozkład równomierny błędu:

$$u(S) = \sqrt{\frac{1}{3}(x\Delta y)^2 + \frac{1}{3}(y\Delta x)^2}\ m^2 =$$
$$= \sqrt{0,55^2 + 0,4^2}\ m^2 = \sqrt{0,46}\ m^2 = 0,68\ m^2$$

zastosujemy przybliżenie $0,68 \approx 0,7$ czyli pole powierzchni z niepewnością standardową wynosi: $S = 22,2(0,7)m^2$.

1.6 Niepewność funkcji jednej zmiennej

W celu pomiaru objętości kuli wykonano 10 pomiarów obwodu i uzyskano (w mm):

40 44 36 42 38 44 36 46 34 48 32

Zakładając, że pomiar wykonano miarką z podziałką milimetrową wyznacz objętość i niepewność objętości.
Rozwiązanie
Średnia wartość z danych $\bar{x} = 40$mm.
Odchylenie standardowe $\sigma(L) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{L})^2}{(N-1)}}$,
gdzie N liczność próby, u nas $N = 11$.
$\sum_{i=1}^{N} (L_i - \bar{L})^2 = 182$, gdzie L_i - seria pomiarów obwodu.
Odchylenie standardowe średniej po podstawieniach:
$\sigma(\bar{L}) \approx 1,4$
Niepewność systematyczna pomiaru obwodu $\Delta L = 1mm$ (rozdzielczość podziałki).
Obliczenie objętości: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{L^3}{6\pi^2} = 1080,76mm$
Niepewność pomiaru długości L liczymy jako niepewność złożoną:

$$u(L) = \sqrt{\sigma^2(\bar{L}) + \frac{(\Delta L)^2}{3}}$$

otrzymujemy $u(L) \approx 0,8\ mm$
niepewność objętości $U(V) = \frac{dV}{dL}U(L) = \frac{L^2}{2\Pi^2}U(L)$.
Łatwiej jest obliczyć niepewność względną: $\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta L}{L}$,
Dla niepewności mamy: $\frac{U(V)}{V} = 3\frac{U(L)}{L}$, co daje:
$\frac{U(V)}{V} = 3\frac{0,8}{40}$, czyli $U(V) = \Delta V = 3 \cdot 1081 \cdot \frac{0,8}{40} \approx 60$
Objętość więc jest równa $V = 1080\ mm^3(60\ mm^3)$,
(w nawiasie podano niepewność standardową).