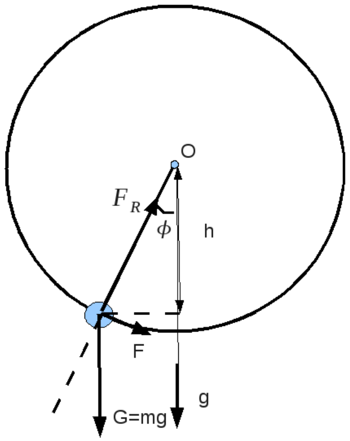
Wahadło matematyczne
Michał Urbański

1. RÓWNANIE DRGAŃ WAHADŁA MATEMATYCZNEGO

Wahadło matematyczne jest ciałem, które porusza się w polu grawitacyjnym jednorodnym po okręgu (ma jeden stopnień swobody).



Rysunek 1: Ciało poruszające się po okręgu o promieniu L i środku O w polu grawitacyjnym, F_R – siła naciągu linki, $G = mg$ siła grawitacji, F – siła wypadkowa, h wysokość liczona od punktu zaczepienia, ϕ–kąt opisujący położenia ciała na okręgu.

Ruch ciała o masie m opisany jest równaniem Newtona dla ruchu obrotowego: $N = m\varepsilon = I\frac{d^2\phi}{dt^2}$, gdzie $N = L \times F$ jest momentem siły powodującym ruch po okręgu, I jest momentem bezwładności $I = mL^2$. Ponieważ kąt pomiędzy ramieniem L a siła wynosi ϕ więc moment siły powodujący ruch: $N = mgLsin(\phi)$. Równanie ruchu jest więc równaniem różniczkowym nieliniowym drugiego rzędu:

$$-\frac{g}{L}sin\,(\phi) = \frac{d^2\phi}{dt^2} \tag{1}$$

Równanie to można rozwiązać rozwijając funkcję sin w szereg, jednak można równanie to przekształcić do równanie pierwszego rzędu, korzystaję z zasady zachowania energii (energia jest całką pierwszą równania różniczkowego):

$$-mgh(\phi) + \frac{1}{2}mv^2 = -mgh(\phi_0) + \frac{1}{2}mv^2(0) \tag{2}$$

gdzie: ϕ_0–kąt początkowy ruchu, $v(0)$– prędkość początkowa. Zakładamy że w chwili początkowej $v(0) = 0$ czyli, że w chwili $t = 0$ odchylamy wahadło o kąt $\phi(0) = \phi_0$ i puszczamy swobodnie z prędkością zerową.

Jeśli wysokość zapiszemy $h(\phi) = Lcos(\phi)$ oraz prędkość $v = L\frac{d\phi}{dt}$ to otrzymamy równanie:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}\left(cos(\phi) - cos(\phi_0)\right)} \tag{3}$$

Ponieważ interesuje nas tylko zależność okresu od amplitudy więc wystarczy w równaniu (3) rozdzielić zmienne i wykonać całkowanie po czasie po ćwiartce okresu (od zera do $T/4$):

$$\int_{\phi_0}^{0} \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{g}{L}\left(cos(\phi) - cos(\phi_0)\right)}} = \int_{0}^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4} \tag{4}$$

Granice całkowania po kącie wynikają z tego, że: $\phi(T/2) = 0$ oraz $\phi(0) = \phi_0$.

W celu wyliczenia tej całki w (4) korzystamy z przekształcenia: $cos(\alpha) = 1 - 2sin^2(\frac{\alpha}{2})$ oraz z wartości całki eliptycznej $\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2sin^2\phi}}$ (rozwiązanie analityczne nie istnieje, w tablicach matematycznych podane są wzory w postaci szeregów).

Ostatecznie otrzymujemy:

$$T(\phi_0) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + (\frac{1}{2})^2sin^2(\frac{\phi_0}{2}) + (\frac{1}{2}\frac{3}{4})^2sin^4(\frac{\phi_0}{2})\ldots\right) \tag{5}$$

W celu analizy danych empirycznych równanie to zapiszemy w postaci:

$$T(\phi_0) = T_0\left(1 + F(\phi_0)\right) \tag{6}$$

gdzie $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ oraz

$$F(\phi_0) = (\frac{1}{2})^2sin^2(\frac{\phi_0}{2}) + (\frac{1}{2}\frac{3}{4})^2sin^4(\frac{\phi_0}{2}) + (\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{4}{5})^2sin^6(\frac{\phi_0}{2})\ldots \tag{7}$$

2. POMIARY

W ćwiczeniu należy wykonać pomiary dwóch zależności:

1) Pomiar zależności okresu wahadła od długości (od wysokości x) dla małych kątów wychylenia początkowego ϕ_0.
2) Pomiar zależności okresu od amplitudy drgań ϕ_0.

Okres drgań wahadła zgodnie z równaniem (5) wynosi:
$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + F(\phi_0)\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l_0+x}{g}}\left(1 + F(\phi_0)\right)$,
gdzie $F(\phi_0)$ jest małą poprawką, a l_0–długością początkową, x–zmiana długości mierzona bezpośrednio. Wzór ten przekształcamy do postaci:

$$y(x) = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{l_0 + x}{g}\left(1 + F(\phi_0)\right)^2 \tag{8}$$

W doświadczeniu nie mierzymy długości wahadła a odległość x od umownego punktu (czyli zmianę długości, w zestawie w laboratorium oś linijki pomiarowej jest zorientowana w dół, czyli wartości x odczytane z linijki są ujemne).

W punkcie 1. należy wykonać dla ok.15 wartości wysokości (co 3 - 5 cm), jeden okres pięć razy dla każdej wartości długości. Kąt powinien być ok $15^0 - 20^0$, zbyt mały kąt powoduje duże błędy pomiaru czasu. Należy uważać aby drgania zachodziły w jednej płaszczyźnie.

W punkcie 2. pomiary wykonać dla kątów 5,10,15,....,85 stopni. Wykonać pomiary dla jednego okresu i powtórzyć każdy pomiar 5 razy w celu wyznaczenia średniej.

3. OPRACOWANIE DANYCH

Dla dwóch części ćwiczenia należy wykonać analizę metodą najmniejszych kwadratów i znaleźć parametry prostej najlepiej pasujące do danych doświadczalnych.

1) Zależność okresu wahadła od długości.

   a) wykonać wykres $y(x) = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$ (wzór (5)),

   b) metodą najmniejszych kwadratów znaleźć takie wartości parametrów prostej a i b, dla których prosta $y = ax + b$ najlepiej pasuje do danych empirycznych, pomiarów okresu T od przyrost długości x. Na podstawie otrzymanych parametrów a i b wyznaczyć przyśpieszenie grawitacyjne g i l_0 ($a = \frac{1}{g}$ oraz $b = \frac{l_0}{g}$).

2) Zależność okresu T od amplitudy drgań.

   a) Wykreśl zależność zależności okresu T od kąta maksymalnego wychylenia ϕ_0. Zaznacz słupki błędów. Należy przyjąć błąd graniczny kąta $\Delta\phi_0 = 5^0$.

   b) W celu linearyzacji tego równania i opracowania metoda najmniejszych kwadratów wykreśl zależność okresu T od parametru $x = F(\phi_0)$, gdzie $F(\phi_0)$ dane jest równaniem (7). Równanie (6) można zapisać w postaci:

$$T = T_0(1 + x) = T_0 x + T_0 \tag{9}$$

   jest to równanie prostej z dwoma jednakowymi parametrami (nachyleniem i stałą).

   Na wykresie $T = T(x)$ zaznacz słupki błędów. Niepewność $x = F(\phi_0)$ danego równaniem (7) wyznacz metodą różniczki: $\Delta x = \frac{\partial F}{\partial \phi_0}\Delta\phi_0$, gdzie $\Delta\phi_0$ jest niepewnością pomiaru kąta (pamiętaj o wykonaniu obliczeń dla kąta wyrażonego w radianach)..

   c) Wyznacz metodą najmniejszych kwadratów parametry równania liniowego $T = ax+b$, sprawdzić czy otrzymane a i b są jednakowe, zgodnie z równaniem (9) powinno być $a = b = T_0$. Przedyskutuj przyczyny dla których obserwujemy różnicę pomiędzy parametrami a i b, oraz przyczyny odstępstwa od prostej.

4. ANALIZA NIEPEWNOŚCI

Niepewność pomiaru kąta wynika zarówno z dokładności podziałki jak i z możliwości pomiaru kąta w „locie”. W niepewności pomiaru kąta można zawrzeć fakt, że w wyniku tłumienia drgań amplituda zmienia w czasie się szczególnie silnie dla dużych kątów. Można przyjąć, że błąd maksymalny pomiaru kąta wynosi ok 5 stopni.

Niepewność pomiaru czasu zależy od dokładności zegara, oraz od błędu rejestracji momentu przejścia nici przed fotokomórką. Głównym czynnikiem jest niepewność pochodząca od rejestracji nici i można ją oszacować jako czas przelotu nici. Jeśli nić ma grubość d to błąd maksymalny pomiaru czasu wynosi $\Delta T = \frac{d}{v(0)}$, gdzie $v(0)$ jest prędkością w najniższym punkcie ruchu (dla kąta $\phi = 0$, patrz zadanie 1). Przy obliczeniach niepewności należy pamiętać, że składowa aparaturowa niepewności równa jest błędowi granicznemu podzielonemu przez $\sqrt{3}$.

5. WNIOSKI

We wnioskach należy zawrzeć następujące elementy:

1. Wyprowadzić w sprawozdaniu wzór na okres korzystając z zasady zachowania energii. Opisać założenia niezbędne do napisania równania ruchu (1).
2. Uzasadnić dlaczego pomiar zmiany długości jest dokładniejszy od pomiaru długości wahadła.
3. Porównać dokładność (wyliczyć niepewność) wyznaczenia przyśpieszenia przy pomocy jednego pomiaru z dokładnością metodą najmniejszych kwadratów.
4. Wyliczyć składowe niepewności pochodzące od różnych źródeł błędów. Opisać źródła błędu pomiaru czasu.
5. W części 2. „Pomiar zależności okresu od amplitudy drgań” określić przyczyny odchylenia uzyskanych danych od prostej. Dlaczego wyznaczone nachylenie i stała metodą najmniejszych kwadratów różnią się?.

6. ZADANIA I PROBLEMY

Zad 1. *Ciało zawieszono na nierozciągliwej nici długości l i odchylono o kąt ϕ_0. Wyznacz zależność prędkości v od kąta wychylenia ϕ. Wskazówka: skorzystaj z zasady zachowania energii, kąt ϕ_0 jest kątem maksymalnym, kąt ϕ jest kątem chwilowym, zależnym od czasu.*

Zad 2. *Wymień założenia, przy których równanie 3 opisuje poprawnie ruch ciała na lince w polu grawitacyjnym, czyli podaj założenia wahadła matematycznego.*

Zad 3. *Wykonaj pomiar okresy wahadła zawieszonego w ręku oraz na gwoździu (może być dowolne nieruszające się zawieszenia), przy zachowaniu stałej długości. Wykonaj pomiar ok 10 okresów stoperem. Przeanalizuj różnice w okresach.*

Zad 4. *Wyprowadź wzór na okres wahadła matematycznego ($T = 2\Pi\sqrt{\frac{l}{g}}$) dla małych kątów rozwiązując równanie (1). Wykonaj rysunek sił, wyprowadź równanie (1), wstaw przybliżenie $\sin(\phi) \approx \phi$ i pokaż, że rozwiązanie $\phi(t) = A\sin(\omega t)$ spełnia równanie (1) dla $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.*