

Teoria pomiaru

Michał K. Urbański

Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej
Zakład V, „Badań strukturalnych”
Gmach Główny pok 159,
Gmach Elektrotechniki klatka A, pok 538
michal.urbanski@pw.edu.pl,
strona <http://www.if.pw.edu.pl/~murba/>

marzec-maj 2024

Mierzy się od tysięcy lat.

teoria błędów ma 200 lat

teoria pomiarów ma 120 lat

teoria reprezentacji pomiarów nieidealnych została zapoczątkowana
ponad pół wieku temu.

zastosowanie zbiorów rozmytych do analizy niepewności ma 20lat,
t-normy po raz pierwszy w teorii pomiarów pojawiły się 15 lat temu

Punkty widzenia

- 1 Filozofia pomiaru
- 2 Matematyczny model pomiaru - Formalna teoria pomiarów - teoria reprezentacji
 - 1 pomiar idealny, podział na klasy abstrakcji
 - 2 reprezentacja z progiem, niepewność a próg, reprezentacja przedziałowa,
 - 3 reprezentacja probabilistyczna,
 - 4 zbiory rozmyte
- 3 Kwantowa teoria pomiarów. Twierdzenie spektralne dla operatorów liniowych w przestrzeni Hilberta.
- 4 Porównanie ze wzorcem, komparacja
- 5 pomiar jako oddziaływanie badanego obiektu z przyrządem pomiarowym,
- 6 wzorce i wielkości podstawowe,
- 7 struktura systemowa pomiaru, schemat blokowy,
- 8 pomiar jako uzyskiwanie informacji
- 9 pomiar w naukach społecznych

Pomiar jest zagadnieniem dotyczącym metod poznawczych, dotyka więc filozoficznie epistemologii.

Poznanie dotyczy relacji przedmiot - podmiot.

Poglądy na temat przedmiotu poznania:

- 1 nie ma obiektywnie istniejących przedmiotów - są tylko poglądy,
- 2 przedmiot poznania jest konstruowany podczas procesu poznawczego. Np elektron istnieje w przyrządach pomiarowych,
- 3 przedmioty poznania istnieją obiektywnie.

Każdy pomiar daje serię liczb i musi być zinterpretowany.

Konstruowanie przedmiotu poznania w punkcie 2 oznacza pewien relatywizm poznawczy nie wykluczający

- 1 model antyczny - Grecja.
Rzeczywistość jest numeryczna - pomiar to odkrywanie liczb wpisanych w rzeczywistość.
Metafizyka
matematyka jest geometryczna
- 2 model Hinduski - poznanie jest reprezentacją rzeczywistości
algebra liczb

Przyrządy pomiarowe a pomiar

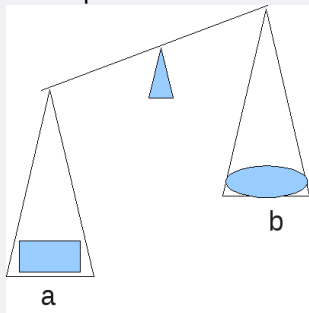
- 1 Większość pomiarów w naukach przyrodniczych wykonuje się przy pomocy aparatury.
- 2 Aparatura często jest skomputeryzowana i złożona.
- 3 Producenci nie podają szczegółów budowy przyrządów.
- 4 Pomiar nie sprowadza się do odczytu z wyświetlacza.
- 5 Analiza wyników powinna obejmować:
 - analizę niepewności z opisem wszystkich źródeł błędów,
 - zasadę działania przyrządu pozwalającą na uniknięcie efektu aparaturowego,
 - analizę teorii wykorzystanej do budowy przyrządu,
 - w przypadku pomiaru zjawisk nowych należy ocenić czy przyrząd może zarejestrować poprawnie badane zjawisko
- 6 Zasady konstrukcji przyrządów pomiarowych niezbędne są do poprawnej interpretacji wyniku pomiaru i analizy niepewności.

Pomiar Komparacyjny

Struktura empiryczna zadana jest przez operacje:

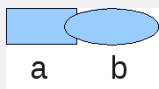
- 1 komparacji zadające relację poprzedzania \prec (porządku) w zbiorze obiektów empirycznych
- 2 operacje składania obiektów \circ .

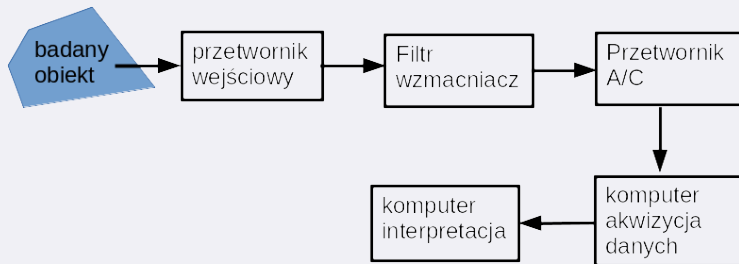
kompara



z lewej - komparator: $b \prec a$

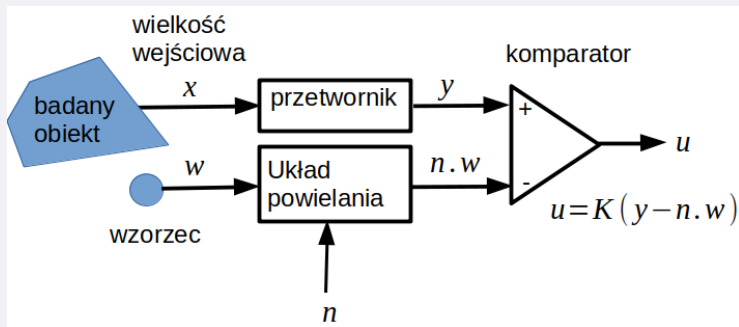
poniżej - złożenie obiektów:
 $a \circ b$.





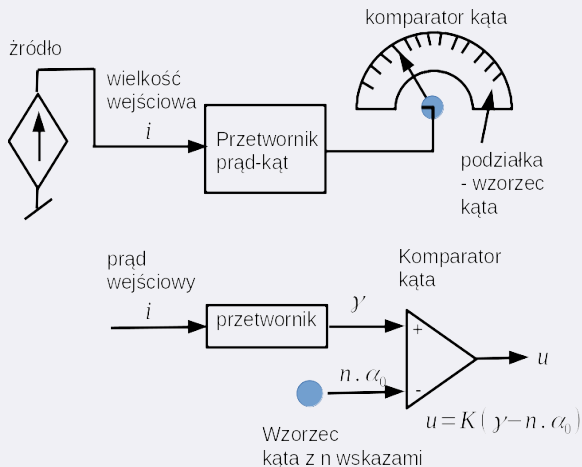
Rysunek: Schemat blokowy układu pomiarowego

Schemat blokowy pomiaru komparacyjnego



Rysunek: Komparacyjny układ pomiarowy, komparator idealny działa wg równania: $u = K(y - n \cdot w)$ z warunku $y = 0$ wnioskujemy, że $y = n \cdot w$.

pomiar komparacyjny natężenia prądu



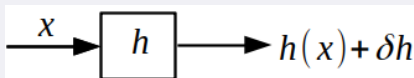
Rysunek: amperomierz jako komparator

błąd w pomiarze komparacyjnym

równanie pomiaru:

$$x = x_0 + \delta x \quad (1)$$

x_0 - wartość prawdziwa, x - wynik pomiaru, wartość nominalna, odczyt przyrządu,
równanie (1) ma postać: $x_0 = x - \delta x$



Rysunek: Błąd przetwornika opisanego odwzorowaniem $h(x)$

Układ przetwarzający sygnał $h(x)$ opisany jest równaniem $y = h(x)$, gdzie x i y są wielkościami prawdziwymi. Błąd -przetwarzania wynosi δh czyli wartość prawdziwa na wyjściu jest:

$$y = h(x_0) + \delta h \quad (2)$$

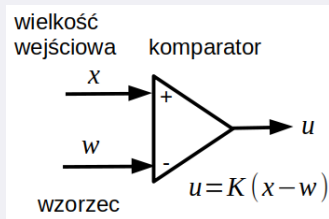
pomiar komparacyjny - porównanie z wzorcem

Komparator jest układem dwuwejściowym o równaniu nominalnym:

$$u = K(x - w) \quad (3)$$

u - sygnał wyjściowy komparatora, x - wielkość mierzona, w - wielkość wzorcowa.
pomiar metodą zerową:

$$u = 0 \Rightarrow x = w$$



Rysunek: pomiar komparacyjny

Model błędu pomiarem komparacyjnym

Równanie błędu: $x = x_0 + \delta x$ oraz $w = w_0 + \delta w$

Dla wartości prawdziwej z uwzględnieniem błędu:

$$u = K(x - w) + \delta_k u \quad (4)$$

$$u + \delta_n u = 0 \quad (5)$$

$$u = -\delta_n u \Rightarrow K(x - w) + \delta_k u = -\delta_n u \quad (6)$$

$$K(x - w + \delta w) = -\delta_k u - \delta_n u \quad (7)$$

$$x_0 = w - \delta w - \frac{1}{K}(\delta_k u + \delta_n u) \quad (8)$$

$$\delta x = \delta w + \frac{1}{K}(\delta_k u + \delta_n u) \quad (9)$$

Struktura empiryczna - Ω

Założenia dotyczące Ω zależą od natury mierzonej wielkości.
Wielkości fizyczne – wielkości ekstensywne – struktury z porządkiem i addytywnym działaniem:

$$\Omega = \langle V, \circ, \prec \rangle \quad (10)$$

V – zbiór obiektów empirycznych,

\circ – operacja składania obiektów empirycznych,

\prec – porządek ostry "niepełny",

Ω – semigrupa (nie ma elementów odwrotnych) lub N -zbiór z niepełnym porządkiem.

Operacja \circ opisuje:

czynność składania obiektów oraz powtarzania pomiarów.

Zakładamy, że \circ jest: łączna, przemienna i istnieje element neutralny (ontyczne "nic")

Czyli $\langle V, \circ \rangle$ nie jest grupą, jest semigrupą lub też N -zbiorem (czyli składanie dotyczy jedynie elementów identycznych)

Struktura matematyczna - \mathbb{M}

Założenia dotyczące M powinny być zgodne ze strukturą empiryczną - Ω

Dla pomiarów wielkości ekstensywnych jest to struktura z porządkiem i działaniem addytywnym:

$$\mathbb{M} = \langle M, \oplus, < \rangle \quad (11)$$

M – zbiór obiektów matematycznych,

\oplus – operacja semi dodawania,

$<$ – porządek ostry "niepełny",

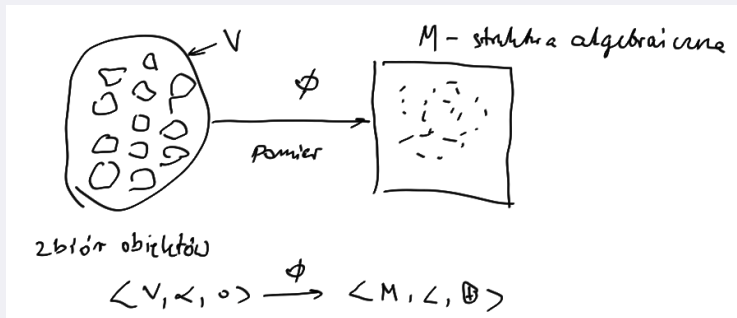
\mathbb{M} – semigrupa lub N -zbiór z niepełnym porządkiem.

Operacja \oplus reprezentuje operację składania empirycznego

$\langle M, \oplus, < \rangle$ jest semigrupą lub też N -zbiorem (czyli składanie dotyczy jedynie elementów identycznych).

Pomiar jako reprezentacja

$$\Omega \xrightarrow{\Phi} M \quad (12)$$



Rysunek: schemat poglądowy reprezentacji pomiarowej

Wartość wielkości

Podstawowe pojęcia:

- 1 wielkość (fizyczna) a reprezentowana (opisane) jest odwzorowaniem Φ_a (measurement mapping):

$$\Phi_a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad (13)$$

czyli utożsamiamy wielkość a z funkcją Φ_a

- 2 wynikiem pomiaru jest wartość wielkości $\Phi_a(\omega)$:

$$x = \Phi_a(\omega) \quad (14)$$

gdzie: ω - obiekt, dla którego wykonano pomiar

x - wynik pomiaru, miara mierzonej wielkości dla ω .

masa

masa - Ψ_{masa} , masa klocka: $m = \Psi_{masa}(klocek)$,

masa to nie ciało materialne a własność ciała.

co oznacza równanie $E = mc^2$?

PORZĄDEK - OPERACJA KOMPARACJI

O relacji R będziemy zakładać, że jest częściowym ostrym porządkiem - relacja R jest:

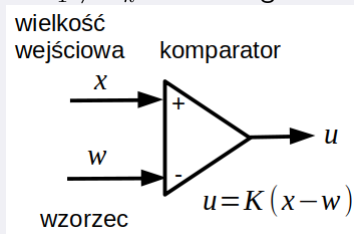
❶ **przeciwzwrotna:**

żaden element nie jest w relacji sam ze sobą: $\neg(xRx)$.

❷ **przechodnia:** $(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$.

przeciwzwrotność i przechodniość gwarantuje **antysymetryczność**.

Ponadto będziemy zakładali acykliczność: jeśli $a_1Ra_2 \cdots a_{k-1}Ra_k$, to $a_1 \neq a_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$,



Własności porządku R w zbiorze V

- **zwrotność:** aRa dla wszystkich $a \in V$,
- **przeciwwrotność:** $\neg aRa$ (czyli $(a, a) \notin R$) dla wszystkich $a \in V$ (gdzie \neg oznacza negację),
- **symetryczność:** jeśli aRb , to bRa dla wszystkich $a, b \in V$,
- **przechodniość:** jeśli aRb i bRc , to aRc dla wszystkich $a, b, c \in V$,
- **negatywna przechodniość:** jeśli $\neg aRb$ i $\neg bRc$, to $\neg aRc$ dla wszystkich $a, b, c \in V$,
- **semiprzechodniość:** jeśli aRb i bRc , to dla każdego $d \in V$ aRd lub dRc dla każdego $a, b, c \in V$,
- **asymetryczność (przeciwsymetryczność):** jeśli aRb , to $\neg bRa$, co oznacza, że nie może zajść jednocześnie aRb i bRa dla każdego $a, b \in V$,
- **antysymetryczność:** jeśli aRb i bRa , to $a = b$ dla każdego $a, b \in V$,

Własności porządku R w zbiorze V , cd.

- **zupełność**: dla każdego $(a, b) \in R$ zachodzi aRb lub bRa (connected relation) dla $a, b \in V$,
- **acykliczność**: jeśli $a_1Ra_2 \cdots a_{k-1}Ra_k$, to $a_1 \neq a_k$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$,
- **zwartość**: jeśli $a \neq b$, to aRb lub bRa dla każdego $a, b \in V$,
- **własność Ferrersa**: jeśli aRb i cRd , to aRd lub cRb (inaczej mocna własność przedziałowa) dla każdego $a, b, c, d \in V$.

Relacja negatywnej przechodniości może być zapisana: jeśli aRb , to aRc lub cRb dla każdego $a, b, c \in V$.

rodzaje porządków

Dwuargumentowa relacja R w zbiorze V jest:

- (Eq) **równoważnością**, jeśli jest przechodnia, zwrotna i symetryczna,
- (Par) **ostrym porządkiem częściowym**, jeśli jest przechodnia i asymetryczna,
- (Weak) **słabym porządkiem**, jeśli jest ostrym porządkiem częściowym i negatywnie przechodnim,
- (Bi) **biporządkiem**, jeśli spełnia warunek Ferrersa,
- (Acyc) **acykliczna**, jeśli spełnia warunek acykliczności,
- (Interval) **porządkiem przedziałowym**, jeśli jest przeciwzwrotna i Ferrersa,
- (Semi) **semiporządkiem**, jeśli jest porządkiem przedziałowym spełniającym warunek semiprzechodniości,

Dwuargumentowa relacja R w zbiorze V jest:

- (Lin) **porządkiem liniowym** (total or simple order), jeśli jest antysymetrycznym porządkiem słabym,
- (Strict) porządkiem ostrym, jeśli jest przeciwzrotny (może to dotyczyć różnych porządków),
- (WePar) **porządkiem częściowym**, jeśli jest słabym porządkiem antysymetrycznym i zwrotnym,
- (Tot) **porządkiem całkowitym**, jeśli jest porządkiem częściowym, słabym i zupełnym,
- (Graf) **grafem**, jeśli jest relacją symetryczną i zwrotną.

POMIAR IDEALNY – bez błędów

Wielkości ekstensywne, wartości wielkości są liczbami:

Wynik pomiaru liczby \mathbb{R} która opisuje niezbędne właściwości:

$$\Omega \xrightarrow{\Phi} \mathbf{R}. \quad (15)$$

Φ odwzorowanie pomiarowe,

Struktura empiryczna określona jest przez operacje :

$$\mathbb{V} = \langle V, \prec, \circ \rangle \quad (16)$$

- 1 Obiekty można składać a wartości wielkości można dodawać operacja składania \circ .
- 2 Obiekty można uporządkować ze względu na wartości wielkości komparator zadaje relację poprzedzania \prec .

Model pomiaru – odwzorowanie:

$$\langle V, \prec, \circ \rangle \xrightarrow{\Phi} \langle \mathbb{R}, <, + \rangle. \quad (17)$$

Φ jest reprezentacją w \mathbb{R} jeśli:

$$\Phi(a \circ b) = \Phi(a) + \Phi(b) \quad (18)$$

gdzie $+$ jest dodawaniem w \mathbb{R} , $a, b \in V$
oraz:

$$a \prec b \implies \Phi(a) < \Phi(b)$$

gdzie $<$ jest porządkiem w \mathbb{R} .

Pomiar idealny: twierdzenia Höldera (1901).

Twierdzenie

Niech $\mathbb{V} = \langle V, \preceq, \circ \rangle$ będzie Archimedeeską słabo uporządkowaną grupą, wtedy $\mathbb{V} = \langle V, \preceq, \circ \rangle$ jest izomorficzne z podgrupą liczb rzeczywistych $\langle \mathbb{R}, \leq, + \rangle$. Ponadto jeśli Φ jest izomorfizmem to $\Phi' = \alpha\Phi$ jest również izomorfizmem $\alpha\Phi$, dla każdego $\alpha > 0$

Definicja Relacja \preceq jest Archimedeeska jeśli dla każdego $a, b \in V$ istnieje taka liczba naturalna n , że $a \preceq n.b$, gdzie $n.a = n \oplus \dots \oplus a$, suma jest n składników.

Definicja $\langle V, \oplus \rangle$ jest grupą jeśli działanie \oplus jest wewnętrzne, istnieje element neutralny e ($a \oplus e = a$ dla każdego $a \in V$) i istnieje element odwrotny czyli dla każdego $a \in V$ istnieje $a^{-1} \in V$ taki, że $a \oplus a^{-1} = e$

Definicja Relacja \preceq jest słabym porządkiem jeśli jest zupełna i przechodnia.

Słaby porządek zadaje relację równoważności:

$$a \approx b \Leftrightarrow (a \preceq b \text{ i } b \preceq a).$$

Szkic dowodu

Dla każdego elementu $a \in V$ definiujemy zbiory $L(s)$ i $U(s)$:

$$L(s) = \left\{ \frac{m}{n} : n.s \succeq m.a \text{ dla pewnego } m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (19)$$

$$U(s) = \left\{ \frac{m}{n} : m.a \succeq n.s \text{ dla pewnego } m, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (20)$$

czyli symbolicznie dla (19): $s \succeq \frac{m}{n}a$ oraz (20) $s \preceq \frac{m}{n}a$

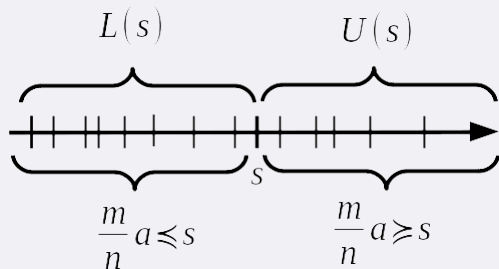
Definiujemy kres dolny „inf” i kres górny „sup” ułamków z (20) i (19):

$$u(s) = \inf U(s) \text{ oraz } l(s) = \sup L(s) \quad (21)$$

definicja $M = \sup A \Leftrightarrow \forall_{x \in A} x \preceq M$

w granicy $l(s) = u(s)$ i wtedy $\Psi(s) = l(s) = u(s)$. Jest to wartość $\Psi(s)$ względem wzorca a

pomiar komparatorem - ułamki porównawcze



Rysunek: Ułamki komparacyjne

Liczby rzeczywiste - konstrukcja liczb

liczny naturalne

V - zbiór przedmiotów, $\Omega = 2^V$ rodzina podzbiorów zbioru Ω ,

\sim - relacja równoliczności w Ω :

$A \sim B$ wtedy i tylko wtedy jeśli istnieje izomorfizm $f : \Omega \rightarrow \Omega$.

Relacja ta jest relacją równoważności i dzieli zbiór Ω na klasy równoliczności Ω / \sim .

Klasy te są liczbami naturalnymi \mathcal{N}

Liczby całkowite

W zbiorze par $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ definiujemy relację równoważności:

$(n, m) \sim (k, l) \Leftrightarrow n + l = k + m$ liczby całkowite $\mathcal{Z} = \mathcal{N} \times \mathcal{N} / \sim$

liczby wymierne

W zbiorze par $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ definiujemy relację równoważności:

$(n, m) \sim (k, l) \Leftrightarrow n \bullet l = k \bullet m$ liczby wymierne $\mathcal{Q} = \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} / \sim$

liczby rzeczywiste

zbiór ciągów zbieżnych Ξ

W zbiorze liczb wymiernych Q tworzymy ciągi nieskończone:

$q : N \rightarrow Q$, mają one postać: $q = (q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)$

Ciąg (q_i) zbieżny jeśli dla każdego $\varepsilon \in Q$ istnieje taka liczba naturalna n , że dla każdych $k_1, k_2 > n$ zachodzi $|q_{k_1} - q_{k_2}| < \varepsilon$.

relacja równoważności w Ξ

W przestrzeni ciągów zbieżnych Ξ zadajemy relacją

równoważności: $\Theta_1 \sim \Theta_2$ jeśli Θ_1 i Θ_2 są wspólnie zbieżne, czyli jeśli ciąg utworzony z wymieszanych elementów: $(q_1, r_1, q_2, r_2, \dots)$ jest zbieżny, gdzie q_i jest elementem ciągu Θ_1 a r_i jest elementem ciągu Θ_2 .

Liczby rzeczywiste

Liczby rzeczywiste są zbiorem klas równoważności ciągów

$$\mathbb{R} = \Xi / \sim$$

dodawanie

Dodawanie klas.

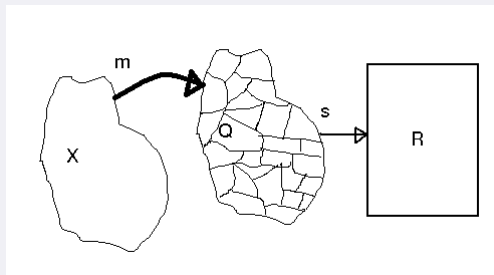
Niech $a, b \in \mathbb{R}$, a jest reprezentowane ciągiem zbieżnym do a : (a_1, a_2, \dots) oraz b jest reprezentowane ciągiem zbieżnym do b : (b_1, b_2, \dots) ,
 $a + b$ jest reprezentowane ciągiem $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$

porządek

przenosi się z porządku liczb naturalnych

Pomiar idealny

Jeśli pomiar jest idealny to równowaga komparatora zadaje relacje równoważności w zbiorze obiektów empirycznych: V



Odwzorowanie pomiarowe można złożyć z dwóch odwzorowań:

$$V \xrightarrow{m} Q \xrightarrow{s} \mathbb{R} \quad (22)$$

Gdzie Q jest zbiorem klas równoważności: $Q = V / \sim$.

Pomiar idealny - bez błędu pomiarowego

Pomiar jest idealny jeśli odwzorowanie pomiarowe jest homomorfizmem w liczby rzeczywiste:

$$\langle V, \prec, \oplus \rangle \xrightarrow{\Phi} \langle \mathbb{R}, <, + \rangle. \quad (23)$$

W taki przypadek nazywamy modelem punktowym pomiaru. Warunkiem jest to aby relacja nieporównywalności była relacją równoważności:

(równoważność jest przechodnia, zwrotna i symetryczna).

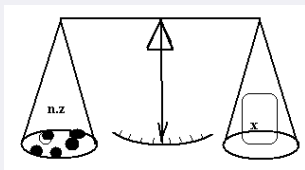
Wtedy relacja równoważności zadaje klasy równoważności Q elementów o tej samej właściwości (mierze cechy):

$$Q = X / \sim .$$

Pomiar Φ może być przedstawiony jako złożenie dwóch odwzorowań $\Phi = s \bullet m$ czyli:

$$\Omega \xrightarrow{m} Q \xrightarrow{s} \mathbb{R}. \quad (24)$$

Pomiar komparatorem rzeczywistym



Komparator zadaje przeciwzrotną relację poprzedzania \prec .
Z powodu błędów pomiarowych relacja \prec nie zadaje relacji równoważności.

Definicja Relacja \prec jest przeciwzrotna jeśli nie zachodzi $a \prec a$ dla każdego $a \in V$.

Definicja

\sim jest relacją nieporównywalności:

$$x \sim y \Leftrightarrow (\neg x \prec y \wedge \neg y \prec x).$$

Nieporównywalność

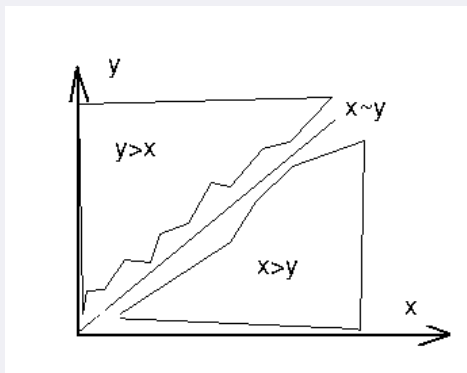
Z każdą relacją porządku \prec związana jest relacja nieporównywalności \sim :

Definicja

\sim jest relacją nieporównywalności:

$$x \sim y \Leftrightarrow$$

$$(\neg x \prec y \wedge \neg y \prec x).$$



Pomiar na obiektach ze zbioru V reprezentują dwie funkcje
mezurand i próg.

Mesurand: $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$

W wyniku procedury pomiarowej przyporządkujemy obiektowi a
liczbę $\Phi(a)$ (wartość mezurandu dla $a \in V$).

Odwzorowanie Φ reprezentuje operację składania \circ :

$$\Phi(a \circ b) = \Phi(a) + \Phi(b) \quad (25)$$

Próg odróżnialności δ jest funkcją dwóch zmiennych:

$\delta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

Próg δ jest minimalną różnicą między wartościami wielkości
mierzonej ($\Phi(b) - \Phi(a)$) pozwalającą na ustalenie relacji
poprzedzania $a \prec b$

$$a \prec b \Leftrightarrow \delta(a, b) < \Phi(b) - \Phi(a) \quad (26)$$

Próg $\delta(a, b)$ opisuje błąd komparacji i reprezentuje porządek \prec w
przestrzeni obiektów

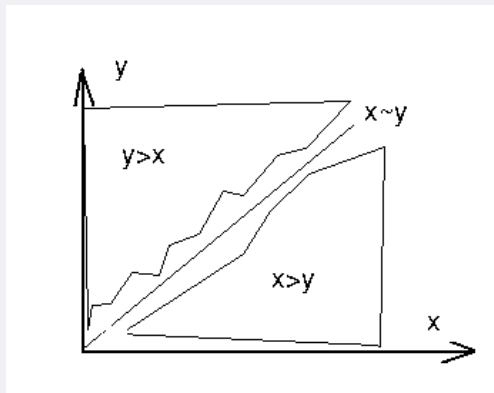
Nieporównywalność

Z każdą relacją porządku \prec związana jest relacja nieporównywalności \sim :

Definicja

\sim jest relacją nieporównywalności:

$$x \sim y \Leftrightarrow (\neg x \prec y \wedge \neg y \prec x).$$



Pomiar z błędem pomiarowym

relacja nieporównywalności

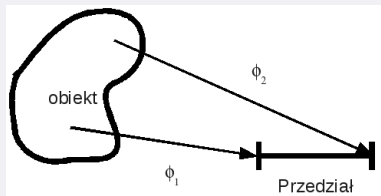
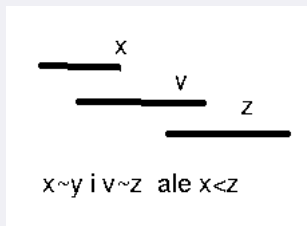
- nieprzechodnia

nie można zbudować klas
równoważności.

Model przedziałowy:

Pomiar opisany jest parą
odwzorowań:

$\Phi_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\Phi_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$.



Wyniki pomiarów reprezentujemy w strukturze interwałowej

$\mathbb{I} = \langle I, \oplus, < \rangle$, gdzie I jest zbiorem interwałów, \oplus jest dodawaniem interwałów, $<$ – jest porządkiem interwałowym.

Reprezentacja przedziałowa

Dodawanie interwałów:

$$[a_1, a_2] \oplus [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad (27)$$

Porządek interwałowy:

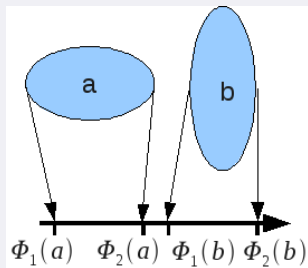
$$[a_1, a_2] < [b_1, b_2] \Leftrightarrow a_2 < b_2 \quad (28)$$

Jeśli obiektowi a przyporządkujemy przedział $[a_1, a_2]$ czyli:

$$\Phi_1(a) = a_1 \text{ i } \Phi_2(a) = a_2$$

to:

$$a \prec b \Leftrightarrow \Phi_2(a) < \Phi_1(b) \quad (29)$$



Reprezentacja przedziałowa, próg rozróżnialności

Wartość wielkości $\Phi(a)$ jest środkiem przedziału:

$$\Phi(a) = \frac{1}{2} (\Phi_2(a) + \Phi_1(a))$$

Niepewność $U(a)$, promień przedziału:

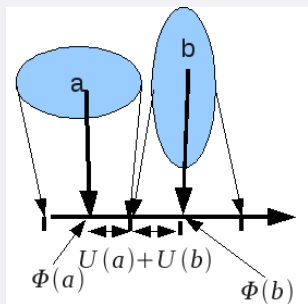
$$U(a) = \frac{1}{2} (\Phi_2(a) - \Phi_1(a))$$

T.j. $\Phi_1 = \Phi - U$ oraz $\Phi_2 = \Phi + U$
Relacja poprzedzania opisana jest więc:

$$a \prec b \Leftrightarrow \Phi(a) + U(a) < \Phi(b) - U(b)$$

czyli $\Phi(a) + U(a) + U(b) < \Phi(b)$

Wielkość $\delta(a, b) = U(a) + U(b)$ jest progiem odróżniania obiektów.



Próg δ opisuje granice odróżnialności obiektów. przez odróżnialność rozumie się fakt, że komparator wykazał różnicę, czyli:

$$a \prec b \Leftrightarrow \Phi(a) + \delta(a, b) < \Phi(b) \quad (30)$$

Próg δ jest funkcja dwóch zmiennych

Jest rozkładalny na dwie niezależne składowe tylko gdy istnieje reprezentacja przedziałowa.

Taki przypadek opisuje jedynie błędy systematyczne.

Jeśli $\delta(a, b) = U(a) + U(b)$ to $U(a \oplus b) = U(a) + U(b)$ czyli zasada propagacji niepewności odpowiada składowym systematycznym.

W ogólnym przypadku próg nie jest rozkładalny na składowe niezależne.

W modelu probabilistycznym: $\delta(a, b) = \sqrt{U^2(a) + U^2(b)}$

Reprezentacja z progiem

Z punktu widzenia teorii reprezentacji próg opisuje relacje pomiędzy obiektami.

Struktura empiryczna:

$$\mathbb{V} = \langle V, \prec, \circ \rangle \quad (31)$$

Opisana jest poprzez dwa odwzorowania:

$$\Phi : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ oraz } \delta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

Właściwości relacji \prec opisane są poprzez reprezentację:

$$a \prec b \Leftrightarrow \Phi(a) + \delta(a, b) < \Phi(b) \quad (32)$$

czyli o właściwościach relacji decyduje próg.

Właściwości relacji zadane przez próg

Twierdzenie

Jeśli dla każdego $a, b \in V$ próg jest dodatni: $\delta(a, b) > 0$ to relacja \prec jest acykliczna.

Definicja

Relacja \prec jest acykliczna jeśli nie istnieje taki ciąg a_0, a_1, \dots, a_n że $a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_0$.

Właściwość

Relacja acykliczna jest przeciwzwrotna (nierówność ostra: nie może zajść $a \prec a$)

Twierdzenie

Jeśli dla każdego $a, b \in V$ próg jest rozkładalny, czyli istnieje dodatnia funkcja $U : V \rightarrow \mathbb{R}^+$: taka, że $\delta(a, b) = U(a) + U(b)$ to relacja \prec jest porządkiem przedziałowym.

Wtedy U nazwiemy niepewnością i spełniona jest własność liniowości:

$$U(a \circ b) = U(a) + U(b):$$

w pracy: *M. Le Menestrel, B. Lemaire (2004–2006)*

Podano warunki istnienia reprezentacji dla struktur $\langle A, \oplus, \prec \rangle$.

Twierdzenie A jest \mathbb{N} -zbiorem i \prec jest binarną relacją spełniającą warunek Archimedesesa. Następujące warunki są równoważne:

❶ istnieje para funkcji $\varphi_1, \varphi_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ taka, że $\varphi_1 \leq \varphi_2$ i

$$\begin{cases} x \prec y \Leftrightarrow \varphi_2(x) < \varphi_1(y), \\ \varphi_1(m.x) = m\varphi_1(x), \\ \varphi_2(m.x) = m\varphi_2(x), \end{cases}$$

dla dowolnych $x, y \in A$ i $m \in \mathbb{N}$.

❷ relacja \prec jest homotetycznym porządkiem przedziałowym.

\mathbb{N} -zbiór $\forall(x \in A)\forall(m, n \in \mathbb{N}) (mn).x = m.(n.x)$

Porządek przedziałowy: \prec -relacja asymetryczna spełniająca warunek $\forall(x, y, u, v \in A)(x \prec y \text{ i } u \prec v) \Rightarrow (x \prec v \text{ lub } u \prec y)$.

Definicja \prec jest homotetycznym porządkiem przedziałowym, jeśli spełnia następujące warunki:

❶ **Przedziałowość**

$$\forall(x, y, u, v \in A)(x \prec y \text{ i } u \prec v) \Rightarrow (x \prec v \text{ lub } u \prec y)$$

❷ **Homotetyczność** $\forall(x, y \in A)\forall(n \in \mathbb{N}) x \prec y \Leftrightarrow n.x \prec n.y$

❸ **Archimedejskość** $\forall(x, y \in A)\exists(n \in \mathbb{N}) x \prec n.y$

❹ **Dodatniość**

$$\forall(x, y \in A)\forall(m, m' \in \mathbb{N}; m < m') x \prec y \Rightarrow m.x \prec m'.y$$

❺ **Ośrodkowość** $\forall(x, y, z \in A)\exists(m, m', m'' \in \mathbb{N})$

$$x \prec y \Rightarrow m.x \prec m''.z \preceq m'.z \prec m.y$$

❻ **Super-Archimedejskość**

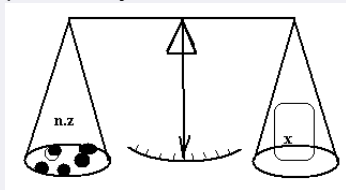
$$\forall(x, y \in A)\exists(m, m' \in \mathbb{N}; m' < m) x \prec y \Rightarrow m.x \prec m'.y$$

Pomiar komparatorem

Dwie operacje:

- 1 składanie obiektów, lub tylko powielanie identycznych $n.x$.
Powielanie: $V \times \mathbb{N} \rightarrow V$, \mathbb{N} -liczby naturalne.
- 2 komparacja określająca nieostry, słaby porządek \prec
- 3 relacja poprzedzania \prec jest subhomotetyczna:
 $a \prec b \Rightarrow n.a \prec n.b$

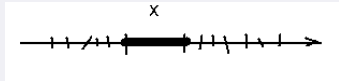
powielamy wzorzec z i mierzony obiekt x i ustalamy dwa warunki:



$$n_1.x \succ m_1.z \quad \text{i} \quad n_2.x \prec m_2.z, \quad x, z \in V$$

Wynik komparacji

$$m_1 \cdot z \prec n_1 \cdot x \quad \text{i} \quad n_2 \cdot x \prec m_2 \cdot z$$



$$\frac{m_1}{n_1} z < x \quad \text{oraz} \quad \frac{m_2}{n_2} z > x$$

Pomiar dokładny: zawsze jedna szalka przeważy;
relacja nieporównywalności jest przechodnia i:

$$\sup\left(\frac{m_1}{n_1}\right) = \inf\left(\frac{m_2}{n_2}\right) \quad (33)$$

jest to dokładną miarą wielkości mierzonej względem wzorca z .

Pomiar z błędem

nieporównywalność jest nieprzechodnia – lewe i prawe porównania różnią się i wynikiem pomiaru jest przedział:

$$\left[\sup\left(\frac{m_1}{n_1}\right), \inf\left(\frac{m_2}{n_2}\right) \right] \quad (34)$$

Pomiar porównawczy

M.K. Urbański, J. Wąsowski,

Algebraic approach to extensive measurement based on direct comparison, (*Measurement 2008*)

Wykonujemy serię komparacji x względem y ,

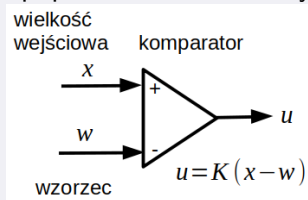
Każda komparacja kończy się jednym z możliwych wyników:

(C_-) $x \prec y$ (x poprzedza y): możemy ustalić, że: x jest "mniejsze" niż y .

(C_0) $x \sim y$: x i y są nieporównywalne.

(C_+) $y \prec x$ (y poprzedza x): możemy ustalić, że: x jest "większe" niż y

"poprzedza" – nie wiemy czy to oznacza, że jest "większe".



Seria komparacji

W celu określenia miary obiektu x względem y wykonujemy wiele komparacji: czyli porównujemy $n.x$ z $m.y$

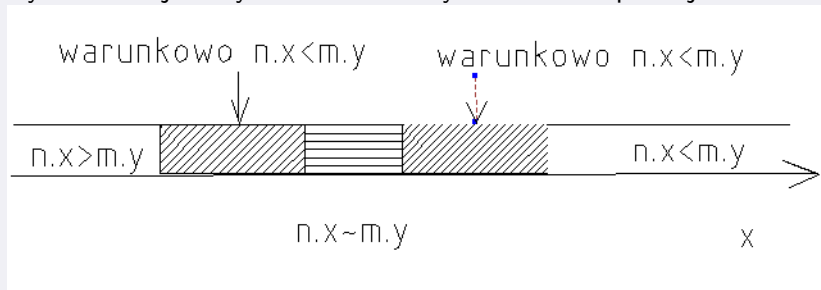
seria komparacji ma prowadzić do ustalenie wyniku pomiaru w postaci informacji, że:

Ułamek $q = \frac{m}{n}$ ma jedną z możliwych pięciu własności:

- (C1) $n.x \prec m.y$ dla wszystkich n, m takich, że $q = m/n$,
- (C2) ($n.x \succsim m.y$ for all n, m takich, że $q = m/n$)
i (istnieje n, m takie, że $q = m/n$ i $n.x \prec m.y$) i
(istnieje n, m takie, że $q = m/n$ i $n.x \sim m.y$),
- (C3) $n.x \sim m.y$ dla wszystkich n, m takich, że $q = m/n$,
- (C4) ($m.y \succsim n.x$ dla wszystkich n, m takich, że $q = m/n$)
i (istnieje n, m takie, że $q = m/n$ i $m.y \prec n.x$)
i (istnieje n, m takie, że $q = m/n$ i $n.x \sim m.y$),
- (C5) $m.y \prec n.x$ dla wszystkich n, m takich, że $q = m/n$,

Pomiar komparacyjny c.d.

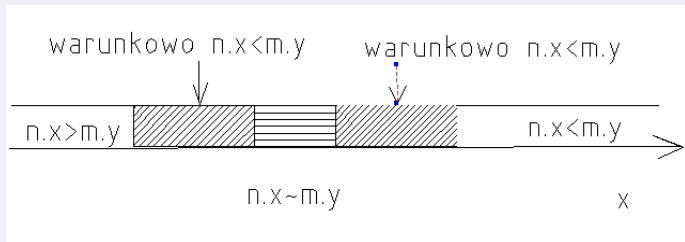
Wynikiem komparacji $n.x$ z $m.y$ jest własność ułamka $q = \frac{m}{n}$, w wyniku której każdy ułamek możemy umieścić na prostej:



ułamek $q = \frac{m}{n}$ opisuje warunkowe wyprzedzanie x przez y w stopniu q

jeśli dla wszystkich n i m takich, że $q = \frac{m}{n}$ istnieją takie n i m , że $n.x \sim m.y$ oraz takie n_1 i m_1 i $q = \frac{m_1}{n_1}$ takie, że $n_1.x < m_1.y$

Postulat spójności



Jeżeli w wyniku porównań otrzymamy, że:

" x warunkowo mniejsze od y w stopniu q " i powtórzymy pomiary to nie możemy otrzymać dla tego samego q , że " x jest warunkowo większe od y w stopniu q ".

CZYLI: nie możliwe jest aby istniały takie n_1, n_2, m_1, m_2 takie, że:

$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = q$ i zachodzi $n.x_1 < m_1.y$ oraz $n.x_2 < m_2.y$.

Tj.: powtarzając porównania otrzymamy dokładnie odwrotny wynik komparacji dla większej liczby porównań.

UWAGA

dwa sposoby realizacji kopii:

- 1 tworzymy n kopii "fizycznie",
- 2 powtarzamy komparacje w tych samych warunkach.

Ustalenie rezultatu komparacji $n.x \prec m.y$ zachodzi w wyniku interpretacji porównań dla n kopii obiektu x , oraz dla m kopii obiektu y . Jeśli x jest obiektem badanym a y wzorcem (odniesieniem) to w przypadku przetwornika analogowo-cyfrowego n kopii obiektu x , (czyli $n.x$) uzyskujemy poprzez wielokrotne powtórzenie komparacji z jednym i tym samym (powtarzalnym w sensie statystycznym) obiektem.

Każdy ułamek q reprezentuje wiele porównań.

Zbiory ułamków określające wynik komparacji

Dla ustalonych obiektów $x, y \in A$.

Oznaczmy:

- 1 $U_y(x)$ – zbiór wszystkich ułamków bezwarunkowego poprzedzania x przez y , czyli zbiór $q = \frac{m}{n}$ takich, że $n.x$ poprzedza $m.y$ bezwarunkowo, czyli zawsze $n.x \prec m.y$ dla wszystkich n i m takich, że $\frac{m}{n} = q$.
- 2 $\hat{U}_y(x)$ – zbiór wszystkich ułamków warunkowego poprzedzania x przez y ,
- 3 $\hat{L}_y(x)$ – zbiór wszystkich ułamków warunkowego poprzedzania y przez x ,
- 4 $L_y(x)$ – zbiór wszystkich ułamków bezwarunkowego poprzedzania y przez x , czyli zbiór $q = \frac{m}{n}$ takich, że $n.y$ poprzedza $m.x$ bezwarunkowo, czyli zawsze $n.y \prec m.x$ dla wszystkich n i m takich, że $\frac{m}{n} = q$.

Oczywiście:

$$L_y(x) = U_x^{-1}(y) \text{ oraz } \hat{L}_y(x) = \hat{U}_x^{-1}(y)$$

REPREZENTACJA

struktura $X = \langle A, \oplus, \prec \rangle$ A jest \mathbb{N} -zbiorem dodatnich obiektów ma reprezentację: pomiar oparty na porównywaniu opisany jest czwórką funkcji $l_y, \hat{l}_y, \hat{u}_y, u_y$,
gdzie każda funkcja jest odwzorowaniem $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$.

$$l_y(x) = \sup L_y(x), \quad u_y(x) = \inf U_y(x), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \hat{l}_y(x) &= \begin{cases} \inf \hat{L}_y(x) & \text{if } \hat{L}_y(x) \neq \emptyset \\ l_y(x) & \text{if } \hat{L}_y(x) = \emptyset \end{cases}, \\ \hat{u}_y(x) &= \begin{cases} \sup \hat{U}_y(x) & \text{if } \hat{U}_y(x) \neq \emptyset \\ u_y(x) & \text{if } \hat{U}_y(x) = \emptyset \end{cases}. \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} L_y(x) &= \left\{ \frac{m}{n} \mid m.y \prec n.x, m, n \in \mathbb{N} \right\} \\ U_y(x) &= \left\{ \frac{m}{n} \mid n.x \prec m.y, m, n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

Nieskończona liczba porównań – składowa systematyczna

para funkcji: $l_z, u_z : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ jest reprezentacją przedziałową:
wyznacza przedział $[l_z(x), u_z(x)]$ (dla każdego $x \in A$) opisujący
składową systematyczną błąd.



$a \in [l_z(x), u_z(x)] \cap \mathbb{Q}^+$ nazywamy ułamkiem bezwarunkowej
nieporównywalności x względem z :

$n.z \sim m.x$ dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ takich, że $a = n/m$.

Homotetyczność relacji \prec : $\forall(x, y) \forall(n) x \prec y \Leftrightarrow n.x \prec n.y$

Dla struktur homotetycznych : $a = m/n \in L_z(x)$ to $m.z \prec n.x$,
oraz $a = m/n \in U_z(x)$ to $n.x \prec m.z$, dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$.

Własności reprezentacji l_z, u_z

Funkcje l_z i u_z spełniają następujące warunki:
dla dowolnych $x, y \in A$ i $k \in \mathbb{N}$

$$(i) \quad 0 < \frac{l_z(x)}{\sqrt{l_z(z)}} \leq \frac{u_z(x)}{\sqrt{u_z(z)}},$$

$$(ii) \quad x \prec y \Rightarrow (l_z(x) < l_z(y) \text{ i } u_z(x) < u_z(y)),$$

$$(iii) \quad l_z(k.x) = kl_z(x), \quad u_z(k.x) = ku_z(x).$$

Pomijając szczególne przypadki,
funkcje l_z i u_z *słabo* reprezentują relację \prec .

Niepewność pomiarów

Z definicji zbiorów mamy: $L_y(x)$, $\hat{L}_y(x)$, $U_y(x)$ and $\hat{U}_y(x)$ mamy:

$$L_y(k.x) \subseteq kL_y(x), \quad \hat{L}_y(k.x) \subseteq k\hat{L}_y(x),$$

$$U_y(k.x) \subseteq kU_y(x), \quad \hat{U}_y(k.x) \subseteq k\hat{U}_y(x),$$

Jeżeli zdefiniujemy niepewności całkowitą $\Delta_y(x)$ i niesystematyczną $\hat{\Delta}_y(x)$:

$$\Delta_y(x) = \frac{1}{2}(u_y(x) - l_y(x)) \quad \text{ i } \quad \hat{\Delta}_y(x) = \frac{1}{2}(\hat{u}_y(x) - \hat{l}_y(x)).$$

to mamy własności:

$$\Delta_y(x) \leq \frac{1}{k}\Delta_y(k.x) \quad \text{ i } \quad \frac{1}{k}\hat{\Delta}_y(k.x) \leq \hat{\Delta}_y(x) \quad (38)$$

Wielkość (średnicę przedziału) $\hat{\Delta}_y(x)$, traktujemy jak "całkowitą" niepewność:

$$\hat{\Delta}_y(x) = \Delta_y(x) + \left[\hat{\Delta}_y(x) - \Delta_y(x) \right].$$

Dla drugiej składowej $\hat{\Delta}_y(x) - \Delta_y(x)$ of $\hat{\Delta}_y(x)$ mamy:

$$\frac{1}{k} \left[\hat{\Delta}_y(k.x) - \Delta_y(k.x) \right] \leq \hat{\Delta}_y(x) - \Delta_y(x) \quad \text{for } k \in \mathbb{N}. \quad (39)$$

Składowe $\Delta_y(x)$ i $\hat{\Delta}_y(x) - \Delta_y(x)$ nazwiemy odpowiednio *systematyczną* i *nie-systematyczną* składową niepewności całkowitej $\hat{\Delta}_y(x)$.

Składowa nie-systematyczna może się zmniejszać w wyniku powielania (powtarzania) obiektów porównywanych.

Twierdzenie o reprezentacji

Niech A będzie \mathbb{N} -set wyposażony w niedokładny porządek częściowy \prec spełniający warunek Archimedesa. Wtedy granice: $l_y(x)$, $\hat{l}_y(x)$, $u_y(x)$ i $\hat{u}_y(x)$ istnieją dla każdego $x, y \in A$ i spełniają warunki

(R1) dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzi:

$$0 < \hat{l}_y(x) \leq l_y(x) \leq u_y(x) \leq \hat{u}_y(x).$$

(R2') $l_y(k.x) = kl_y(x)$, $u_y(k.x) = ku_y(x)$,

(R3) dla wszystkich $x, y \in A$ i $k \in \mathbb{N}$ mamy:

$$k\hat{l}_y(x) \leq \hat{l}_y(k.x), \quad \hat{u}_y(k.x) \leq k\hat{u}_y(x).$$

(R4) $w \prec x \Rightarrow (l_y(w) < l_y(x) \text{ and } u_y(w) < u_y(x))$,

(R5) $w \prec x \Rightarrow (\hat{l}_y(w) \leq \hat{l}_y(x) \text{ and } \hat{u}_y(w) \leq \hat{u}_y(x))$,

dla wszystkich $x, y, w \in A$ and $k \in \mathbb{N}$.

Przetwornik analogowo–cyfrowy

Z przedstawionej teorii wynika potrzeba opracowania nowego algorytmu działania przetwornika analogowo–cyfrowego:

- 1 na wyjściu – dwie pary liczb – a nie jedna wartość:
 - estymator pary liczb reprezentujących niepewności niesystematyczne dla danej liczby komparacji,
 - estymator składowej systematycznej – metodą ekspercką analizy źródeł niepewności.
- 2 analiza serii komparacji – częściowo analiza sygnałów czasowych.
- 3 nie ma układu pamiętającego chwilowy stan sygnału.

Reprezentacja struktur przedziałowych

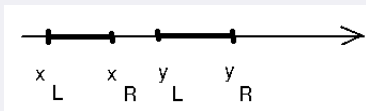
Założenia

- (M1) Wynik x pomiaru niedokładnego reprezentowany jest przez przedział $\mathbf{x} = [x_L, x_R] \subset \mathbb{R}^+$.
- (M2) Propagacja błędów opisana jest arytmetyką przedziałową:

$$[x_L, x_R] + [y_L, y_R] = [x_L + y_L, x_R + y_R].$$

- (M3) Porządek \prec zadany jest dzięki komparacji:

$$[x_L, x_R] \prec [y_L, y_R] \Leftrightarrow x_R < y_L.$$



Z algebraicznego punktu widzenia mamy do czynienia ze strukturą:

$$\mathfrak{J} = \langle \mathbb{I}\mathbb{R}^+, \boxplus, \boxminus \rangle,$$

gdzie $\mathbb{I}\mathbb{R}^+$ - zbiór domkniętych, ograniczonych przedziałów $\mathbf{x} = [x_L, x_R] \subset \mathbb{R}^+$; \boxminus jest homotetycznym porządkiem przedziałowym spełniającym warunek Archimedesa.

Niech $\mathbf{x} = [x_L, x_R] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^+$. Wtedy

$$[l_z(\mathbf{x}), u_z(\mathbf{x})] = \left[\frac{x_L}{z_R}, \frac{x_R}{z_L} \right] = \left\{ \frac{x}{z} \mid x \in \mathbf{x}, z \in \mathbf{z} \right\},$$

gdzie $\mathbf{z} = [z_L, z_R]$ jest wzorcem pomiarowym.

Przedział $\left[\frac{x_L}{z_R}, \frac{x_R}{z_L} \right]$ jest przedziałem bezwarunkowej nieporównywalności i opisuje błąd graniczny pomiaru wielkości $[x_L, x_R]$ przy pomocy wzorca $[z_L, z_R]$.

Co to jest niepewność?

W teorii reprezentacji niepewność musi być zdefiniowana przez próg.

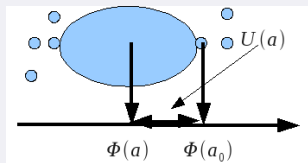
Definicja

Niech $\langle V, \prec, \oplus \rangle$ będzie strukturą empiryczną. $V_0 \subset V$ jest podzbiorem elementów idealnych jeśli dla każdej pary $a_0, b_0 \in V_0$ próg jest zerowy: $\delta(a, b) = 0$.

Definicja

Niepewnością $U(a)$ pomiaru wykonanego na elemencie $a \in V$ nazywamy kres dolny progu:

$$U(a) = \inf_{a_0 \in V_0} \delta(a, a_0) \quad (40)$$



Próg z niepewności

Założmy, że mamy w modelu pomiaru zadaną jedynie niepewność, czy da się zdefiniować próg?

Definicja Strukturę z niepewnością jest to: $\langle V, \oplus, \ominus, \Phi, U \rangle$

gdzie: V jest zbiorem obiektów,

◦ operacją dwuargumentową opisującą składanie (operacja łączna i przemienne),

$\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ – odwzorowanie pomiarowe reprezentujące mesurand,

$U : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ – odwzorowanie opisujące niepewność.

Para odwzorowań reprezentuje działania \oplus i \ominus i spełnia następujące warunki:

- 1 $\Phi(a \oplus b) = \Phi(a) + \Phi(b)$,
- 2 $\Phi(a \ominus b) = \Phi(a) - \Phi(b)$
- 3 $U(a \ominus b) = U(a \circ b) \geq 0$
- 4 $U(a \oplus b) \leq U(a) + U(b)$

Struktura z niepewnością

Dwa działania:

- 1 \oplus – składanie obiektów,
- 2 \ominus – wyznaczanie różnicy przez komparator.

Operacje te nie są prostym wzajemnym uzupełnieniem bowiem nie zachodzi skracanie:

$$(a \oplus b) \ominus b \neq b \quad (41)$$

Definicja

$e \in V$ jest elementem neutralnym w strukturze z niepewnością jeśli dla każdego $a \in V$ zachodzi: $a \oplus e = a \ominus e = a$.

Działania \oplus i \ominus są łączne, ale: $a \ominus a \neq e$.

Struktura z niepewnością

Dwa działania:

- 1 \oplus – składanie obiektów,
- 2 \ominus – wyznaczanie różnicy przez komparator.

Operacje te nie są prostym wzajemnym uzupełnieniem bowiem nie zachodzi skracanie:

$$(a \oplus b) \ominus b \neq b \quad (41)$$

Definicja

$e \in V$ jest elementem neutralnym w strukturze z niepewnością jeśli dla każdego $a \in V$ zachodzi: $a \oplus e = a \ominus e = a$.

Działania \oplus i \ominus są łączne, ale: $a \ominus a \neq e$.

Teoria modelu algebraicznego z niepewnością wymaga matematycznego dopracowania.

W TEORII REPREZENTACJI bada się warunki poprawnego opisu (poprawnej reprezentacji rzeczywistości w strukturach językowych).
zagadnienie teorii reprezentacji:

- 1 warunki jaki muszą być spełnione aby odwzorowanie pomiarowe było homomorfizmem struktur,
- 2 konstrukcja odwzorowania pomiarowego, dla różnych modeli empirycznych.

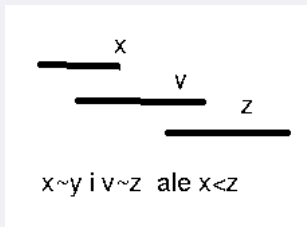
Pomiary opisywane są dwoma operacjami: składanie i komparacja.

NIEPEWNOŚĆ musi być opisana poprzez próg, aby zgodna była z opisem reprezentacjonistycznym

Pomiar z błędem pomiarowym

relacja nieporównywalności

- nieprzechodnia



nie można zbudować klas równoważności

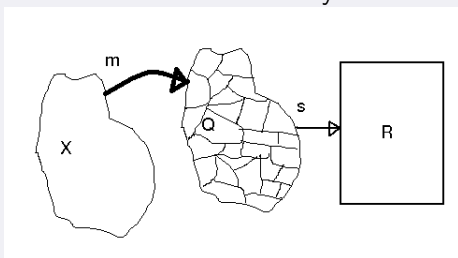
"Standardowym" modelem pomiarów niedokładnych jest model probabilistyczny, odwzorowanie "złożenia" zastąpione jest:

$$\Omega \xrightarrow{f} F \xrightarrow{m} I. \quad (42)$$

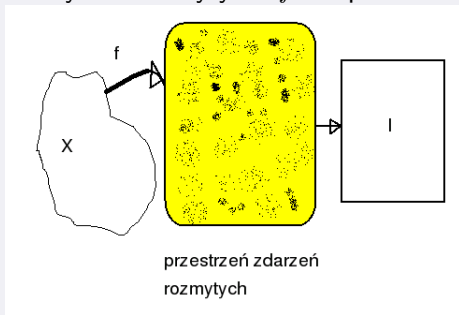
gdzie: F jest przestrzenią zmiennych losowych utożsamiana w praktyce z przestrzenią funkcji rozkładów prawdopodobieństwa.

I jest strukturą interwałów reprezentującą wynik pomiarów z niepewnością.

Pomiar dokładny



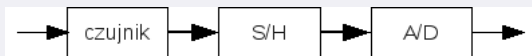
Model zjawisk przypadkowych - rozmytych. f - reprezentacja



System Pomiarowy

System pomiarowy:

wejścia: sygnały od obiektów, **wyjścia:** dane pomiarowe.



Elementy systemu pomiarowego:

- 1) czujnik wielkości mierzonej
- 2) S/H - układ próbkująco-pamiętający. Próbkuje i zapamiętuje stan własny, który odpowiada sygnałowi wejściowemu,
- 3) A/D - przetwornik analogowo-cyfrowy, wyznacza wartość wielkości poprzez porównania wzorców ze stanem układu S/H.

Zbiór stanów układu S/H jest:

- 1) zbiorem zdarzeń elementarnych Ω
- 2) wzorcowych (możliwych) Γ .

Działanie tego układu można zinterpretować jako pobieranie próby losowej, proces ten opisany jest miarą probabilistyczną P lub rozmytą Π .

Zbiory rozmyte i probabilistyka

Miary na przestrzeni zdarzeń opisują:

- 1 niepowtarzalności wyników pomiaru, rozrzut danych.
- 2 powielanie jako potarzenie pomiaru,
- 3 niehomotetyczność relacji poprzedzania \prec .

Co to jest zjawisko losowe (rozmyte): coś takiego czego nie da się opisać inaczej niż miarą losowości (rozmytości).

Dwa rodzaje miar

- 1 miary addytywne,
- 2 miary maksymtywne.

Model badanych obiektów:

$$\langle V, \prec, \circ \rangle \xrightarrow[\Phi]{} \langle \mathbf{F}, <_F, \oplus \rangle \quad (43)$$

Gdzie \mathbf{F} zbiór rozkładów reprezentujących cechy badanych obiektów, $<_F$ porządek rozkładów, \oplus dodawanie rozkładów (zmiennych losowych, funkcji przynależności)

WYBÓR MODELU POMIARU

Arytmetyka składania miar decyduje o wyborze własności modelu.
Miara μ jest \oplus -rozkładalna jeśli:

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (44)$$

gdzie $A_n \subset \Omega$ są parami rozłączne: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$.

W przypadku probabilistyki \oplus jest dodawaniem liczb rzeczywistych, w przypadku zbiorów rozmytych $x \oplus y = \max(x, y)$.

Miara jest całkowicie maksymalna jeśli jest miarą \oplus -rozkładalna dla $\oplus = \max$, dla dowolnych par niekoniecznie rozłącznych ($A_i \cap A_j \neq \emptyset$).

W zbiorach rozmytych można miarę zdefiniować ogólniej wprowadzając t-normę, która reprezentuje logiczny operator *AND*.

Miary rozmyte i probabilistyczne

Zmienna losowa	Zmienna rozmyta
Zbiór zdarzeń elementarnych Ω	Zbiór wzorców Γ
Rodzina borelowska $\mathbb{F} \subset 2^\Omega$	Rodzina borelowska $\mathbb{F} \subset 2^\Gamma$
Miara probabilistyczna $P \rightarrow [0, 1]$, addytywność, dla $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	Miara możliwości $\Pi \rightarrow [0, 1]$ maksytywność dla $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = \max(P(A), P(B))$.
Zmienna losowa: $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	Zmienna rozmyta: $\xi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$
rozkład prawdopodobieństwa μ $\mu_X(S) = P(X^{-1}(S)), S \subset \mathbb{R}$	zbiór rozmyty \bar{A} $\bar{A}(x) = \Pi(\xi^{-1}(x))$ miara punktowa
A i B są niezależne: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$	A i B są T-nieodziałujące: $\Pi(A \cap B) = T(\Pi(A), \Pi(B))$

Dystrybuanta: $F(x) = \mu_X((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x]))$

T-norma odpowiada funkcji kopuli:

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (45)$$

Zdarzenia w języku probabilistyki i zbiorów rozmytych

Ω – ontologia aktualna – to co jest.

Γ – ontologia potencjalna – to co może się wydarzyć.

Γ to obiekty idealne o dokładnie określonych wartościach wielkości i jednocześnie są to wzorce poprzez które obserwujemy świat.

Miara probabilistyczna i miara rozmyta opisują niepowtarzalność obserwacji.

Maksytywność: wybór lepszego.

T-norma – logika składania zdarzeń – reprezentacja iloczynu logicznego.

$$\Pi(A \cap B) = T(\Pi(A), \Pi(B))$$

Funkcja Kopuli: konstrukcja rozkładu dwuwymiarowego z rozkładu brzegowego.

Zasada rozszerzeń

mamy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Jak rozszerzyć f na zmienne losowe lub zmienne rozmyte i na rozkłady?

Niech $Y = f(X)$ to: $\mu_Y = \mu_X f^{-1}$

(czyli $\mu_Y(S) = \mu_X(f^{-1}(S))$ dla każdego $S \subset \mathbb{R}$).

Dla zbiorów rozmytych mamy analogiczny wzór:

$f(\bar{A}(x)) = \sup \bar{A}(f^{-1}(x))$, jeśli zbiór rozmyty zapiszemy jako:

$\bar{A} = \bigcup_x \bar{A}(x)/x$ to: $f(\bar{A}) = \bigcup_x \bar{A}(x)/f(x)$.

Funkcje dwóch zmiennych: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej

$Z = F(X, Y)$:

$$f_Z(z) = \iint_{z=g(x,y)} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy,$$

dla zbiorów rozmytych:

$$\bar{A}_\zeta(z) = \sup\{T(\bar{A}_\xi(x), \bar{A}_\eta(y)) : (x, y) \in E_1 \times E_2, z = f(x, y)\}$$

gdzie $\zeta = f(\xi, \eta)$, czyli $\bar{A}_\zeta = f(\bar{A}_\xi, \bar{A}_\eta)$

Miara całkowicie maksymalna

Niech (Ω, \mathcal{D}) będzie σ -ciałem. Miarę unormowaną $\mu : \mathcal{D} \rightarrow [0, 1]$ nazywamy **miarą maksymalną**, jeśli μ jest miarą \oplus -rozkładalną dla $\oplus = \max$.

Ponadto, jeśli dla każdej rodziny $(A_\alpha)_\alpha$ mierzalnych zbiorów takich, że:

$$A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha \in \mathcal{D} \text{ zachodzi } \mu(A) = \sup_{\alpha} \mu(A_\alpha)$$

to miarę μ nazywamy **całkowicie maksymalną**.

Brak założenia o tym, że zbiory A_α są parami rozłączne (istotnego w definicjach miar addytywnych) jest istotą definicji miary całkowicie maksymalnej.

Definicja miary możliwości

Miara całkowicie maksymalna na σ -ciele (Ω, \mathcal{D}) jest **miarą możliwości**, jeśli jest całkowicie maksymalna na wszystkich podziorach Γ . Miarę taką będziemy zazwyczaj oznaczać symbolem Π .

Pojęcia miary \oplus -rozkładalnej określa definicja

Niech \mathcal{D} będzie σ -półgrupą podziorów Ω . Funkcję $\mu: \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ nazywamy **miarą \oplus -rozkładalną**, jeśli

- 1 $\mu(\emptyset) = 0$,
- 2 dla dowolnego ciągu zbiorów $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in \mathcal{D}$ takich, że $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, zachodzi

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Zasada rozszerzeń, uzasadnienie z własności miary

Niech T będzie t -normą, a ξ i η dwoma T -nieoddziałującymi zmiennymi rozmytymi o wartościach w zbiorach E_1 i E_2 i rozkładach \bar{A}_ξ oraz \bar{A}_η odpowiednio. Niech $f: E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ będzie dowolną funkcją. Wówczas zmienna rozmyta $\zeta = f(\xi, \eta)$ ma rozkład \bar{A}_ζ dany zasadą rozszerzania Zadeha:

$$\bar{A}_\zeta(z) = \sup\{T(\bar{A}_\xi(x), \bar{A}_\eta(y)) : (x, y) \in E_1 \times E_2, z = f(x, y)\} \quad (46)$$

Dowód. Z definicji

$$\begin{aligned}\bar{A}_\zeta(z) &= \Pi(\zeta^{-1}(z)) = \\ &= \Pi(\{\omega \in \Omega : \zeta(\omega) = z\}) = \\ &= \Pi(\{\omega \in \Omega : f(\xi(\omega), \eta(\omega)) = z\}) = \\ &= \Pi\left(\bigcup_{(x,y) \in E_1 \times E_2 : z=f(x,y)} \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x, \eta(\omega) = y\}\right) = \\ &= \sup_{(x,y) \in E_1 \times E_2 : z=f(x,y)} \Pi(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x, \eta(\omega) = y\}) = \\ &= \sup_{(x,y) \in E_1 \times E_2 : z=f(x,y)} T(\Pi(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x\}), \Pi(\{\omega \in \Omega : \eta(\omega) = y\})) = \\ &= \sup\{T(\bar{A}_\xi(x), \bar{A}_\eta(y)) : (x, y) \in E_1 \times E_2, z = f(x, y)\}\end{aligned}$$

Postać zasady rozszerzania jest więc wynikiem definicji zmiennej rozmytej, zasad indukowania miar oraz założenia, że Π jest miarą maksymalną

Zasada rozszerzeń na przekrojach

Niech T będzie t-normą, a ξ i η dwoma T -nieoddziałującymi zmiennymi rozmytymi o wartościach w zbiorach E_1 i E_2 i rozkładach \bar{A}_ξ oraz \bar{A}_η odpowiednio. Niech $f: E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ będzie dowolną funkcją. Wówczas zmienna rozmyta $\zeta = f(\xi, \eta)$ ma rozkład \bar{A}_ζ :

$$[\bar{A}_\zeta]^\alpha = \bigcup_{(\xi, \eta) \in (0,1)^2: T(\xi, \eta) \geq \alpha} f([\bar{A}_\xi]^\xi, [\bar{A}_\eta]^\eta), \quad \alpha \in (0, 1) \quad (47)$$

Rodzina zgodna

Niech Ω będzie zbiorem i $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ będzie rodziną podzbiorów Ω . Rodzinę podzbiorów nazywać będziemy zgodną, jeśli:

- 1 $\mathcal{A}_\alpha \neq \emptyset$ dla każdego $\alpha \in (0, 1)$,
- 2 dla każdego $\alpha, \beta \in (0, 1)$ takiego, że $\alpha \leq \beta$ zachodzi $\mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_\alpha$.

Niech $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ będzie zgodną rodziną podzbiorów zbioru Ω . Zbiór rozmyty zdefiniowany jako:

$$\bar{A}(x) = \sup_{\alpha \in (0,1)} \{ \alpha : x \in \mathcal{A}_\alpha \} \quad (48)$$

nazwiemy zbiorem rozmytym w Ω **generowanym przez zgodną rodzinę** $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$, gdzie: \sup oznacza kres górny, przy czym $\sup \emptyset = 0$. Powyższa operację oznaczymy \mathcal{F} .

Definicja rodziny zgodnej podzbiorów.

Niech \bar{A} będzie zbiorem rozmytym na Ω . Wówczas:

- 1 α -przekroje $[\bar{A}]^\alpha$ tworzą zgodną rodzinę podzbiorów zbioru Ω ,
- 2 zbiór rozmyty wygenerowany przez rodzinę α -przekrojów zbioru \bar{A} jest zbiorem rozmytym \bar{A} , Czyli operacja \mathcal{F} jest odwrotna do operacji brania przekrojów:

$$\bar{A}(x) = \mathcal{F} \left(\{ [\bar{A}]^\alpha \}_{\alpha \in (0,1)} \right) (x) = \sup_{\alpha \in (0,1)} \{ \alpha : x \in [\bar{A}]^\alpha \}$$

Definicja:

α -przekrojem zbioru rozmytego \bar{A} (lub krótko przekrojem) nazywamy nierozmyty zbiór $[\bar{A}]^\alpha$ określony jako

$$[\bar{A}]^\alpha = \{ x \in \Omega : \bar{A}(x) \geq \alpha \} \quad (49)$$

Przedział rozmyty

Zbiór rozmyty \bar{A} jest zbiorem L - R , jeśli można go przedstawić w postaci:

$$\bar{A}(x) = \begin{cases} L(m_1 - x) & \text{dla } x \leq m_1 \\ 1 & \text{dla } m_1 < x < m_2 \\ R(x - m_2) & \text{dla } x \geq m_2 \end{cases} \quad (50)$$

gdzie L i R są funkcjami ciągłymi nierosnącymi i takimi, że

$$L(0) = R(0) = 1$$

Funkcje L i R nazywać będziemy funkcjami zboczy.

Zbiory rozmyte L - R wygodnie jest zapisywać w postaci czwórki:

$$\bar{A} = (m_1, m_2, L, R) \quad (51)$$

Rozkład zbioru rozmytego na składowe

Każdy przedział rozmyty może być przedstawiony w postaci sumy (w arytmetyce opartej na t-normach) liczby rozmytej (o punktowym rdzeniu) i funkcji charakterystycznej rdzenia przesuniętego o dowolną wartość.

Niech \bar{A} będzie przedziałem rozmytym L - R , o zboczach $L(x)$ i $R(x)$ i rdzeniu $[m_1, m_2]$. Dla każdej liczby rzeczywistej $m \in \mathbb{R}$ i każdej t-normy archimedeyjskiej:

$$\bar{A} = (m_1, m_2, L, R) = (m, m, L, R) \oplus_T (m_1 - m, m_2 - m, 0, 0) \quad (52)$$

Rozkład ten nie zależy od t-normy (zachodzi też dla t-normy min), bowiem dodawanie funkcji charakterystycznej przedziału domkniętego do liczby rozmytej nie zależy od t-normy.

Rozkład zbioru rozmytego na składowe

Zakładamy, że można wyróżnić dwie składowe błędów:
systematyczne i niesystematyczne:

$$\Delta(x) = \Delta_r(x) + \Delta_s(x)$$

Opiszemy to składaniem zbiorów rozmytych:

$$A = A_r \oplus_T A_s,$$

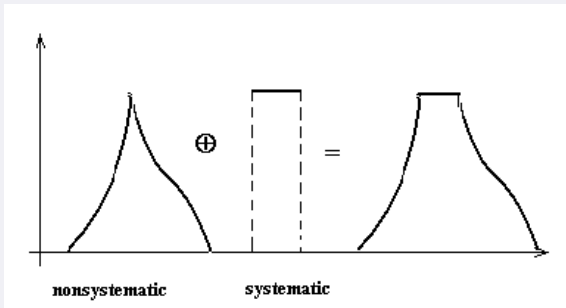
gdzie:

A_r składowa
niesystematyczna.

A_s składowa
systematyczna:
funkcja

charakterystyczna
przedziału $[-d, d]$.

Oznaczono: $d = \Delta(x)$.



Rozkład przedziału rozmytego można zapisać w postaci wygodnej do interpretacji metrologicznej:

$$\bar{A} = (m_1, m_2, L, R) = \bar{m}_0 \oplus_T (-\Delta m, \Delta m, 0, 0) \oplus_T (0, 0, L, R) \quad (53)$$

$\bar{m}_0 = (m_0, m_0, 0, 0)$ jest funkcją charakterystyczną środka rdzenia \bar{A} (punktowa liczba rozmyta)

$$m_0 = \text{Mid}(\text{Ker}(\bar{A})) = \frac{m_2 + m_1}{2}$$

gdzie $\text{Mid}(I)$ jest środkiem przedziału I .

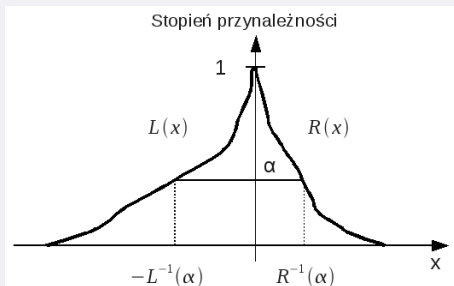
Wartość m_0 można interpretować jako estymator wartości wielkości mierzonej opisaną przedziałem rozmytym \bar{A} .

Przedział $(-\Delta m, \Delta m, 0, 0)$ opisuje błędy systematyczne, gdzie wielkość

$$\Delta m = \text{Rad}(\text{Ker}(\bar{A})) = \frac{m_2 - m_1}{2}$$

jest promieniem rdzenia \bar{A} i określa maksymalny błąd systematyczny ($\text{Rad}(I)$ jest promieniem przedziału I).

Przedział $\bar{A}_r = (0, 0, L, R)$ opisuje błędy niesystematyczne, których rozkład możliwości zadany jest przez funkcje zbroczy L i R .



Przekrój \bar{A}_r zapisać za pomocą funkcji odwrotnych zbroczy L^{-1} i R^{-1} :

$$[(0, 0, L, R)]^\alpha = [-L^{-1}(\alpha), R^{-1}(\alpha)] \quad (54)$$

wtedy przekrój \bar{A} ma postać:

$$[\bar{A}]^\alpha = m_0 \oplus [-\Delta m, \Delta m] \oplus [-L^{-1}(\alpha), R^{-1}(\alpha)] \quad (55)$$

Struktura algebraiczna zbiorów rozmytych

Strukturę empiryczną $\langle V, \circ, \prec \rangle$ modelujemy za pomocą algebraicznej struktury rozmytej:

$$\mathbb{F} = \langle \mathcal{FI}(\mathbb{R}), \oplus_T, \prec_T \rangle \quad (56)$$

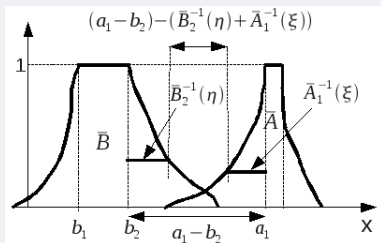
$\mathcal{FI}(\mathbb{R})$ zbiór przedziałów rozmytych $L - R$, w zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} , działanie \oplus_T i relację \prec_T zdefiniowane są z wykorzystaniem zasady rozszerzań:

$$\bar{B} \prec_T \bar{A} \Leftrightarrow [\bar{A} \ominus_T \bar{B}]^\alpha > 0 \quad (57)$$

gdzie: nierówność $[a, b] > 0$ oznacza, że wszystkie punkty przedziału $[a, b]$ leżą powyżej zera, oraz \ominus_T jest odejmowaniem wynikającym z zasady rozszerzania z t-normą T .

Warunek (57) określający porządek zapiszemy:

$$\bar{B} \prec_T \bar{A} \Leftrightarrow \min_{T(\xi, \eta) \geq \alpha} (a_1 - b_2 - (A_1^{-1}(\xi) + B_2^{-1}(\eta))) > 0 \quad (58)$$



Zaznaczono różnicę między odległością rdzeni $a_1 - b_2$ i sumą funkcji zboczy $(A_1^{-1}(\xi) + B_2^{-1}(\eta))$ dla pewnego $T(\xi, \eta) \geq \alpha$. W celu wyznaczenia kryterium porządku trzeba dobrać takie ξ i η , aby suma funkcji zboczy była maksymalna. B_2 jest prawą funkcją zbocza \bar{B} , A_1 – lewą funkcją zbocza zbioru rozmytego \bar{A}

porządek $\bar{B} \prec_T \bar{A} \Leftrightarrow [\bar{A} \ominus_T \bar{B}]^\alpha > 0$ zapiszemy przy pomocy odległości zboczy:

$$\min_{T(\xi, \eta) \geq \alpha} (A_1^{-1}(\xi) + B_2^{-1}(\eta)) < (a_1 - b_2) \quad (59)$$

Mesurand ma postać:

$$\Phi(\bar{A}) = \frac{1}{2}(a_2 + a_1)$$

na próg składa się błąd systematyczny (promieni rdzeni) i odległość zboczy (59) :

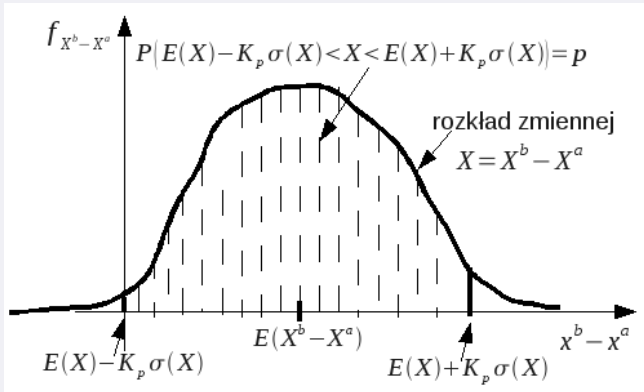
$$\delta(\bar{A}, \bar{B}) = \frac{1}{2}(b_2 - b_1) + \frac{1}{2}(a_2 - a_1) + \min_{T(\xi, \eta) \geq \alpha} (A_1^{-1}(\xi) + B_2^{-1}(\eta)) \quad (60)$$

Próg w modelu probabilistycznym

Interesuje nas weryfikacja hipotezy, że wartości oczekiwane dwóch zmiennych różnią się: $E(X^a) < E(X^b)$. Próg odróżnialności wartości oczekiwanych możemy wyrazić przez warunek, że prawdopodobieństwo zdarzeń takich, że $X^a(\omega_a) < X^b(\omega_b)$, gdzie $\omega_a \times \omega_b \in \Omega$, jest większe od wartości krytycznej p_k . Wyrażenie $P(X^a < X^b)$ zdefiniowane jest dla łącznej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa przez całkę z łącznego rozkładu $f_{a,b}$:

$$P(X^a < X^b) = P(X^a(\omega_a) < X^b(\omega_b)) = \iint_{x < y} f_{a,b}(x, y) dx dy \quad (61)$$

gdzie rozkład łączny $f_{a,b}(x, y)$ można wyznaczyć dla znanej funkcji kopuli



Rysunek: Przedział ufności dla zmiennej losowej $X = X^b - X^a$. Warunek $X^b - X^a > 0$ oznacza, że $E(X^b - X^a) - K_p \sigma(X^b - X^a) > 0$. Krzywa opisuje rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X = X^b - X^a$, a zakreślone pole – prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa $X = X^b - X^a$ znajduje się w przedziale $[E(X) - K_p \sigma(X), E(X) + K_p \sigma(X)]$

Dane wyjściowe:

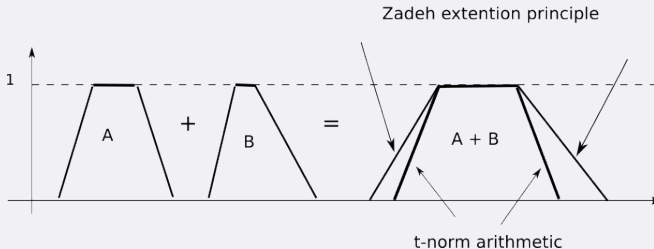
- 1 Wyniki pomiarów: seria danych $\{x_n\}_{n=1,N}$ (próby) o liczebności N .
- 2 Powtórzenia pomiarów (wiele serii). Statystyka rozmyta.
- 3 wiedza o systemie pomiarowym pozwalająca na analizie źródeł błędów i szacowanie niepełności.

t-norma zawęża przedziały

Dodawanie w \oplus_T w arytmetyce opartej o t-normy daje zawężanie α -cuts

W arytmetyce opartej o rozszerzenie Zadeha każdy α -przekrój zachowuje swoją szerokość przy uśrednianiu (jak błąd systematyczny):

$$(A \oplus_T B)(z) = \sup_{x+y=z} T(A(x), B(y)) \text{ for } z \in \mathbb{R}, \quad (62)$$



W arytmetyce opartej o t-normy mamy statystyczną redukcję niepewności

Dwa zagadnienia: konstrukcja funkcji przynależności i t-normy

Metody:

- 1 wyznaczenie funkcji przynależności z danych doświadczalnych:
Metoda zależy od modelu pomiaru:
 - przedział rozmyty A_i opisuje pojedynczy pomiar x_n .
 - przedział rozmyty A opisuje serie pomiarów $\{x_n\}_{n=1}^N$ poprzez transformację "possibility–probability" (transformacja $P - \Pi$).
- 2 drugie zagadnienie – weryfikacja hipotezy dotyczącej t-normy.
t-norma opisuje korelacje w systemie oraz własności rozkładu pomiarów. Można użyć t-norm "produkt" na zasadzie dogmatu o normalności rozkładów, ale można weryfikować empirycznie hipotezę.

Transformacja prawdopodobieństwo-możliwość

[Transformacja P – II: D. Dubois, ... Reliable Computing, 2004]:

❶ przyjmujemy założenie:

- przedział ufności $\equiv \alpha$ -cut,
- $A(\text{Med}\{x_i\}) = 1$, i.e.:

Mediana $\text{Med}\{x_i\}$ danych empirycznych $\{x_i\}_{i=1}^n$ definiuje maksimum (modę) przedziału rozmytego A .

wtedy mamy:

$$[A]^\alpha = [F^{-1}(\frac{\alpha}{2}), F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})]$$

$F(x)$ -dystrybuanta empiryczna (kumulatywna funkcja rozkładu) dla danych $\{x_n\}$.

❷ dla serii pomiarowej $\{x_n\}_{n=1}^N$ określamy α -przekrój dla

$$\alpha = \frac{2i}{n+1}:$$

$$[A]^{\frac{2i}{n+1}} = [x_i, x_{n+1-i}], \text{ (dla parzystych } n, \text{ and } i \in [1, \frac{n-1}{2}]).$$

Empiryczna funkcja przynależności \bar{A} jest jednoznacznie wyznaczona przez dane $\{x_i\}_{i=1,n}$ (metodą transformacji $P - \Pi$). Estymowana funkcja przynależności $\bar{A} = \bar{A}_n(\{x_i\}_{i=1,n})$ zależy od liczności n serii $\{x_i\}_{i=1,n}$. Funkcję przynależności konstruujemy poprzez przekroje:

$$[\bar{A}]^\alpha = [\bar{\phi}(\alpha), \underline{\phi}(\alpha)] = \hat{\phi}(\alpha) \quad (63)$$

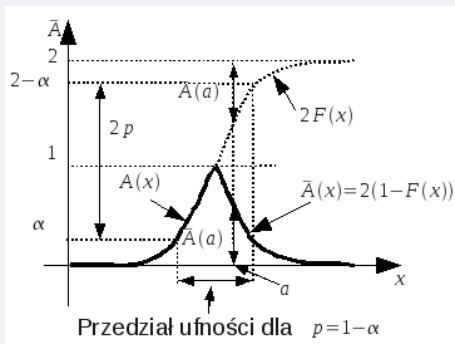
z danych empirycznych $\{x_i\}_{i=1,n}$ uporządkowanych:

$$\hat{\phi}_n(\alpha) = [x_{k(n,\alpha)}, x_{n-k(n,\alpha)}] \quad (64)$$

gdzie:

$$k(n, \alpha) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{2} \alpha \right\rceil & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \alpha \right\rceil & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases} \quad (65)$$

transformacja prawdopodobieństwo-możliwość

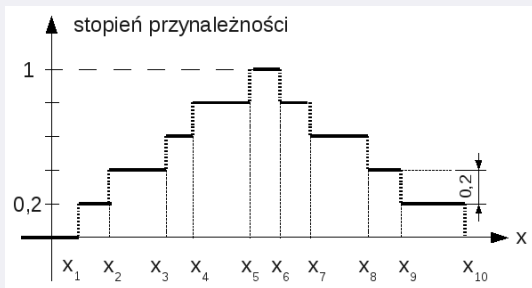


Dla danej dystrybuanty F mamy funkcję przynależności \bar{A} :

$$\bar{A}(x) = \begin{cases} 2F(x) & \text{dla } x \leq M_A \\ 2(1 - F(x)) & \text{dla } x > M_A \end{cases} \quad (66)$$

M_A mediana, (funkcja przynależności z serii pomiarowej ma jądro punktowe).

wyznaczanie funkcji przynależności z danych empirycznych



$x_1 \dots x_{10}$ - dane empiryczne uporządkowane. W każdym punkcie skok funkcji chodkowej wynosi $\frac{2}{N} = \frac{2}{10}$

Algorytm wyznaczenia wartości α -przekroju:

❶ Dane pomiarowe porządkujemy, uzyskując serię $x_1 < \dots < x_n$.

❷ Dla wartości początkowej x_1 przyjmujemy $\bar{A}(x_1) = 0$.

❸ wyznaczamy $\bar{A}(x_i)$ na podstawie wzoru rekurencyjnego:

Dla n parzystych $i = 2, \dots, \frac{n}{2}$: $\bar{A}(x_{i+1}) = \bar{A}(x_i) + \frac{2}{n}$
dla $i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$ mamy: $\bar{A}(x_{i+1}) = \bar{A}(x_i) - \frac{2}{n}$
czyli: $\bar{A}(x_{\frac{n}{2}}) = \bar{A}(x_{\frac{n}{2}+1}) = 1$.

Dla n nieparzystych: $i = 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ $\bar{A}(x_{i+1}) = \bar{A}(x_i) + \frac{2}{n}$
dla $i = \frac{n+1}{2} + 1, \dots, n$ mamy: $\bar{A}(x_{i+1}) = \bar{A}(x_i) - \frac{2}{n}$
czyli: $\bar{A}(x_{\frac{n+1}{2}}) = 1$.

❹ Dla $i = n$ mamy: $\bar{A}(x_n) = 0$.

❺ Między punktami pomiarowymi funkcje przybliżamy prostymi poziomymi i uzyskujemy funkcję schodkową. Inne sposoby interpolacji wymagają dodatkowych założeń.

TWIERDZENIE GLIWENKI-CANTELLEGO

Estymator dystrybuanty z danych empirycznych: $\{x_i\}_{i=1}^n$

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Theta(x - x_i) \quad (67)$$

gdzie Θ jest funkcją skoku jednostkowego:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad (68)$$

W dowodzie korzysta się z tego, że prawdopodobieństwo uzyskania k wyników, takich że są one mniejsze od konkretnej wartości x , ma rozkład Bernoulliego.

Dowodu tego nie można bezpośrednio przenieść na zbiory rozmyte, bowiem zdarzenie przeciwne $A' = \neg A$ do A w zbiorach rozmytych nie może być opisane przez miarę możliwości określonej jako $1 - \Pi(A)$.

TWIERDZENIE GLIWENKI-CANTELLEGO

Aby określić miarę zdarzenia „ A i $\neg A$ ”, trzeba zastosować logikę rozmytą.

Potrzebne są trzy działania logiczne: iloczyn, suma i negacja spełniające pewne ogólne reguły, np. zasady de Morgana, trójkę takich operatorów logicznych nazywamy trójką de Morgana.

Trójka de Morgana w logice rozmytej opisywana jest przez trzy operatory logiczne: sumę logiczną przez s -normę, iloczyn logiczny przez t -normę oraz negację n . Te trzy operatory spełniają warunek

$$n(S(x, y)) = T(n(x), n(y))$$

Miarą możliwości wyniku pomiaru, że uzyskamy zdarzenie A i jego zaprzeczenie $\neg A$, jest

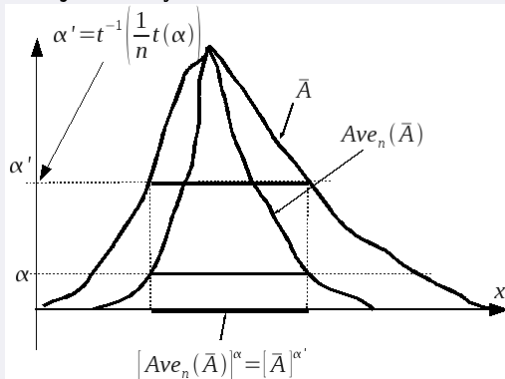
$$T(\Pi(A), n(\Pi(\neg A))).$$

Odtwarzanie t-normy na podstawie uśredniania empirycznego

t-norma opisuje zawężanie α -przekrojów w wyniku uśredniania.

$$[\text{Ave}_n(\bar{A})]^\alpha = [\bar{A}]^{(t^{[-1]}(\frac{1}{n}t(\alpha)))}$$

dla każdego $\alpha \in (0, 1]$. gdzie $\text{Ave}_n(\bar{A})$ jest średnią n -krotną funkcji przynależności \bar{A} w arytmetyce opartej na t-normie opisanej generatorem addytywnym t .



Algorytm wyznaczenia parametru rodziny t-normy

Wynik pomiaru:

- 1 wykonujemy $K \cdot N$ pomiarów w K seriach $\{x_n^k\}_{n=1, N}^{k=1, K}$ N elementowych.
- 2 z każdej serii wyliczamy funkcje przynależności średnią:

$$x_{Av}^k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^k \text{ for } k \in [1, K].$$

Z danych empirycznych mamy dwie funkcje przynależności

- 1 \tilde{A}_{Av} dla serii $\{x_{Av}^k\}_{k=1}^K$.
- 2 A uśredniona dla wszystkich danych $\{x_n^k\}_{n=1, N}^{k=1, K}$.

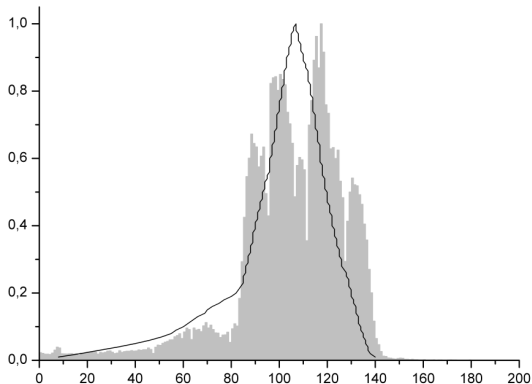
Dla rodziny t-norm: T_r wyznaczamy funkcje przynależności uśrednionego pomiaru $A_{Av}^{T_r}$ dla N fuzzy interwałów A :

$$A_{Av}^{T(r)} = \frac{1}{N} \bigoplus_{n=1}^N A \quad (69)$$

gdzie \bigoplus jest dodawaniem opartym na t-normie $T(r)$.

Dane empiryczne

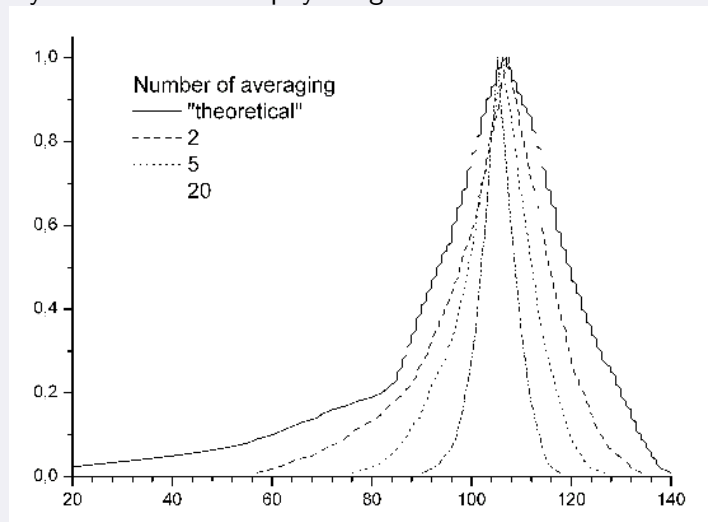
Pomiary przetwornikiem analogowo-cygowym – "samozdiełka"



linia przerywana – funkcja przynależności.

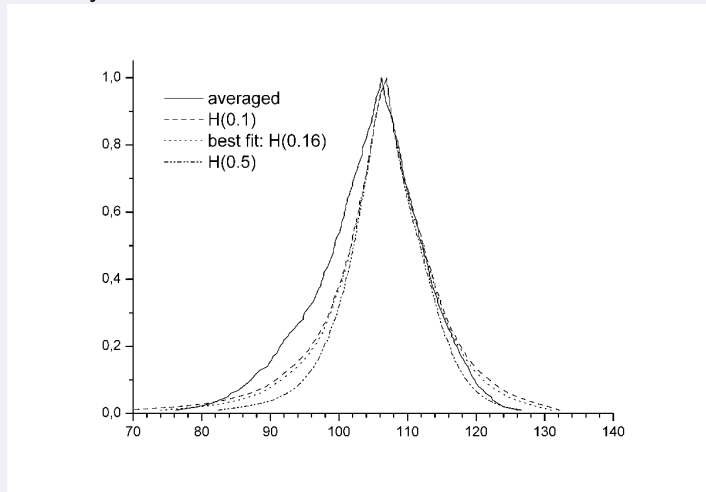
Zawężanie się funkcji przynależności

wynik uśredniania empirycznego:



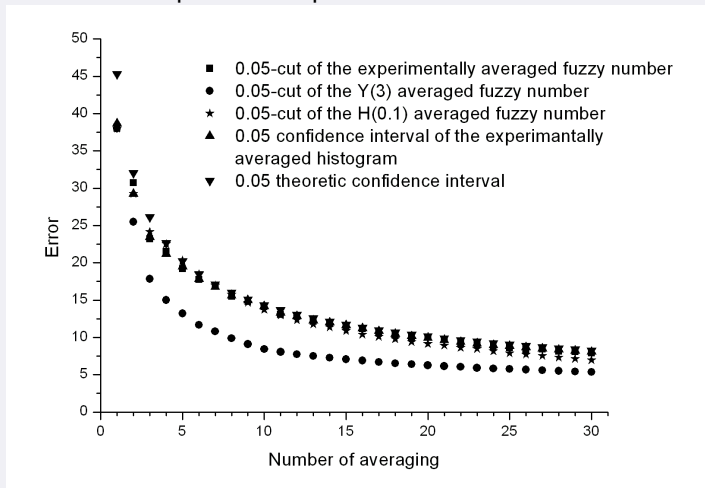
Dopasowanie t-normy

Wynik uśredniania empirycznego porównany z uśrednieniem wg. t-normy Hamahera



Obliczenia niepewności rozszerzonej

Obliczenia niepewności i porównanie z metoda GUIDE



theoretical confidence interval – wg GUIDE

Wyznaczanie t-normy z uśrednień empirycznych

- 1 Wykonujemy pomiar – $2N$ surowych wyników pomiarów $\{x_i\}_{i=1}^{2N}$.
- 2 wynieramy n elementów i tworzymy serię pomiarową $\{x_i\}_{i=1}^N$ i na jej podstawie wyznaczamy estymator funkcji przynależności \bar{A} .
- 3 wybieramy dwie serie po n elementów x_i i x'_i (łącznie tworzą serię pomiarową o licznosci $2N$).
- 4 Z dwóch serii wyznaczany jest ciąg wartości średnich

$$\text{Ave}(x_i) = \frac{1}{2}(x_i + x'_i)$$

- 5 Stosując estymator funkcji przynależności wyznacza się funkcję przynależności \bar{A}_{Ave} opisującą wartości średnie $\text{Ave}(x_i)$, oraz funkcje przynależności \bar{A} danych $\{x_i\}_{i=1}^N$

Wyznaczanie t-normy z uśrednień empirycznych

Stosując zależność

$$\bar{A}_{\text{Ave}} = [\text{Ave}_n(\bar{A})]^\alpha = [\bar{A}]^{(t^{[-1]}(\frac{1}{n}t(\alpha)))}$$

dla $n = 2$ wyznacza się numerycznie generator t-normy reprezentujący uśrednianie empiryczne.

to równanie zapisane dla zboczy ma postać:

$$L_{\text{Ave}}^{-1}(\alpha) = L^{-1}\left(t^{[-1]}\left(\frac{1}{n}t(\alpha)\right)\right) \quad \text{i} \quad R_{\text{Ave}}^{-1}(\alpha) = R^{-1}\left(t^{[-1]}\left(\frac{1}{n}t(\alpha)\right)\right) \quad (70)$$

gdzie: R i L są funkcjami zboczy zbioru rozmytego \bar{A} , a R_{Ave} i L_{Ave} są funkcjami zboczy zbioru rozmytego \bar{A}_{Ave} reprezentującego wartości uśrednione empirycznie.

Sposobów podziału serii $\{x_i\}_{i=1}^{2N}$ może być wiele i wynik uśrednień, jak i zrekonstruowane t-normy, mogą zależeć od metody podziału serii $2N$ -elementowej na dwa zbiory.

Algorytm wyznaczania niepewności

Szacowanie składowych niepewności dwiema metodami:

A. seria pomiarowa: promień przedziału opisującego przekrój liczby rozmytej $U_{\alpha}(a) = \frac{1}{2} (x_{n-k(n,\alpha)} - x_{k(n,\alpha)})$

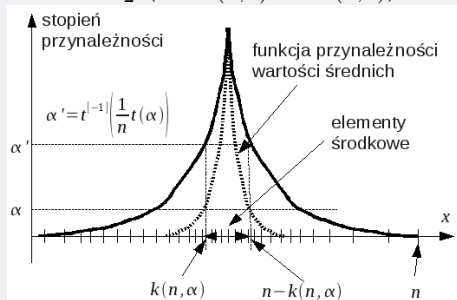
B. analiza ekspercka: składową systematyczną niepewności Δ .

Z teorii zbiorów rozmytych wynika, że składanie obu składowych niepewności polega na algebraicznym dodawaniu tych składowych.

Algorytm wyznaczania składowej A

promień przedziału opisującego przekrój liczby rozmytej

$$U_{\alpha}(a) = \frac{1}{2} (x_{n-k(n,\alpha)} - x_{k(n,\alpha)})$$



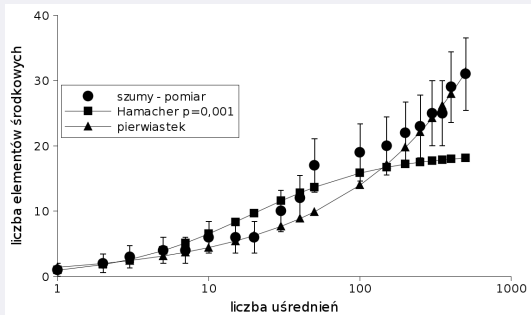
$k(n, \alpha)$ jest liczbą zależną od n i wyznaczaną wzorem

$$k(n, \alpha) = \frac{1}{2}n\alpha' = \frac{1}{2}t^{[-1]} \left(\frac{1}{n}t(\alpha) \right) n.$$

liczba elementów tworzących ten przedział:

$$K(n) = n - 2k(n, \alpha) = n \left(1 - t^{[-1]} \left(\frac{1}{n}t(\alpha) \right) \right) \quad (71)$$

Ustalanie t-normy



Liczba punktów środkowych tworzących przedział przynależności ($\alpha = 0,05$) w funkcji liczby uśrednień: dla danych pomiarowych, obliczenia dla t-normy Hamachera z parametrem $p = 0,001$, $\sqrt{2n}$.

dla małej liczby pomiarów: $K(n) = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{n}}$

dla n dużego: $K(n) = \sqrt{2n}$

Problemy

1. weryfikacja modelu FUZZY:

Nie można zweryfikować metodami probabilistycznymi bowiem: weryfikacja metodami probabilistycznymi oznacza, że metodę probabilistyczną uznajemy za nieomylną.

2. dobór statystyk:

wartość oczekiwana ma wiele wad:

- jest liniowa i w przypadku nieliniowych detektorów daje składowa systematyczna błąd (przesuwa wartość średnią).
- gdy rozkłady nie są symetryczne, szczególnie gdy szum nie ma symetrycznego rozkładu uśrednianie daje błąd (obciążenie estymacji)

Lepsze własności ma mediana ponieważ nie jest wrażliwa na nieliniowość.

3. Zbieżność statystyk fuzzy – twierdzenie Gliwienki Cantellego: pokazuje że empiryczna dystrybuanta zmierza do teoretycznej. Aby to udowodnić dla zbiorów rozmytych trzeba wprowadzić ogólniejsze reguły miar produktowych. (publikacja w przygotowaniu).

Literature:

[1] M.K.Urbański, J.Wąsowski, Algebraic approach to extensive measurement based on direct comparison, wysłane do *Measurement*.

[2] M. K. Urbański, J.Wąsowski, Fuzzy approach to the theory of measurement inexactness, *Measurement* 34(2003) 61–74.

[3] M. K. Urbański, J. Wąsowski, Fuzzy arithmetic based on boundary weak t-norms, *Internat.J.Uncertain.Fuzziness Knowledge-Based Systems* 13(2005) 27-37.

[4] M. Urbański, J. Wąsowski, Fuzzy measurement theory, *Measurement* 41(2008), 391-402.

[5] A. Bzowski M. Urbański, Convergence, Strong Law of Large Numbers, and Measurement Theory in the Language of Fuzzy Variables, arXiv:0903.0959v2 [math.PR]

[6] A. Bzowski M. Urbański, A note on Nguyen-Fuller-Keresztfalvi theorem and Zadeh's extension principle, *Fuzzy Sets and Systems*, czekamy na druga recenzję.

Dziękuję za uwagę

TEORIA BŁĘDÓW

Wynikiem pomiaru jest:

wartość $\Phi(a)$ mierzonej wielkości dla obiektu $a \in V$ i błąd (niepewność) $U(a)$,

oddzielnie wykonujemy operacje matematyczne na wartościach mierzonej wielkości, oddzielnie na niepewnościach
(arytmetyka niepewności) \equiv (propagacja błędów).

W formalnej teorii pomiarów:

dwie wielkości $[\Phi(a), U(a)]$ tworzą jeden obiekt matematyczny – przedział (interwał): $[\Phi(a) - U(a), \Phi(a) + U(a)]$.

modelem pomiaru jest odwzorowanie:

$$\Omega \xrightarrow{\Phi} \mathbb{I} \quad (72)$$

gdzie \mathbb{I} jest zbiorem interwałów z działaniem dodawania i porządkiem interwałowym.

Struktura przestrzeni interwałów $\bar{x} \in \mathbb{I}$

Arytmetyka interwałowa opisana jest operacją dodawania interwałów \boxplus :

$$\bar{a} \boxplus \bar{b} = [a_1, a_2] \boxplus [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \quad (73)$$

wynik pomiaru opisujemy jako interwał \bar{a}

$$\bar{a} = [a_0 - U(a), a_0 + U(a)] = [\Phi(a) - U(a), \Phi(a) + U(a)] \quad (74)$$

gdzie:

$\Phi(\bar{a}) = a_0 = \text{Mid}(\bar{a}) = \frac{1}{2}(a_2 + a_1)$ – środek interwału, mesurand.

$U(a) = \text{Rad}(\bar{a}) = \frac{1}{2}(a_2 - a_1)$ – promień interwału, niepewność graniczna.

propagacja niepewności

Propagacja błędów w arytmetyce interwałowej odpowiada propagacji błędów systematycznych:

$$\begin{aligned}\bar{a} \boxplus \bar{b} &= [a_0 - U(\bar{a}), a_0 + U(\bar{a})] \boxplus [b_0 - U(\bar{b}), b_0 + U(\bar{b})] = \\ &= [a_0 + b_0 - (U(\bar{a}) + U(\bar{b})), a_0 + b_0 + (U(\bar{a}) + U(\bar{b}))] = \\ &= [c_0, -U(\bar{c}), c_0, +U(\bar{c})]\end{aligned}$$

Czyli:

$$U(\bar{c}) = U(\bar{a} \boxplus \bar{b}) = U(\bar{a}) + U(\bar{b}) \quad (75)$$

oraz:

$$\Phi(\bar{a} \boxplus \bar{b}) = c_0 = a_0 + b_0 = \Phi(\bar{a}) + \Phi(\bar{b}) \quad (76)$$

Równanie:

$$U(\bar{x} \boxplus \bar{y}) = U(\bar{x}) + U(\bar{y})$$

opisuje błąd systematyczny czyli dla n powtórzeń:

$$U(n.\bar{x}) = nU(\bar{x}) \quad (77)$$

ten warunek nazywany jest w teorii pomiarów **homotetycznością**.
 $n.\bar{x}$ oznacza n krotne dodawanie \bar{x} czyli:

$$n.\bar{x} = \bar{x} \boxplus \dots \boxplus \bar{x} \quad \text{suma } n\text{-krotna.} \quad (78)$$

Dla "statystycznego" składania danych mamy:

$$U(n.\bar{x}) \leq nU(\bar{x}) \quad (79)$$

Ten warunek oznacza brak homotetyczności odwzorowania pomiarowego (**subhomotetyczność**).

Subhomotetyczność: redukcja błędu w wyniku powtarzania pomiarów.

Porządek interwałowy

Dwa interwały:

$$\bar{a} = [a_1, a_2] = [a_0 - U(\bar{a}), a_0 + U(\bar{a})]$$

$$\bar{b} = [b_1, b_2] = [b_0 - U(\bar{b}), b_0 + U(\bar{b})]$$

porządek $<$:

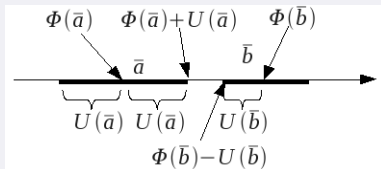
$$\bar{a} < \bar{b} \Leftrightarrow a_2 < b_1 \Leftrightarrow a_0 + U(\bar{a}) < b_0 - U(\bar{b})$$

Czyli inaczej:

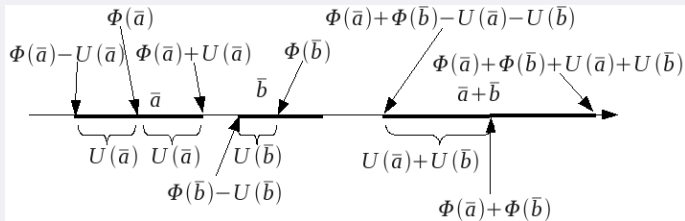
$$\bar{a} < \bar{b} \Leftrightarrow \Phi(\bar{b}) - \Phi(\bar{a}) > U(\bar{a}) + U(\bar{b}) \quad (80)$$

W modelu interwałowym próg jest równy sumie niepewności:

$$\delta(\bar{a}, \bar{b}) = U(\bar{a}) + U(\bar{b}) \quad (81)$$



Porządek: $\bar{a} < \bar{b} \Leftrightarrow \Phi(\bar{b}) - \Phi(\bar{a}) > U(\bar{a}) + U(\bar{b})$



Arytmetyka przedziałowa: $\bar{a} \boxplus \bar{b} =$
 $[\Phi(\bar{a}) + \Phi(\bar{a}) + b_0 - (U(\bar{a}) + U(\bar{b})), \Phi(\bar{a}) + \Phi(\bar{a}) + (U(\bar{a}) + U(\bar{a}))]$

Schemat blokowy pomiaru

Dwie operacje:

- 1 komparacja
- 2 powielanie