

Pomiar przewodnictwa cieplnego metali metodą Angströma

Michał Urbański

1. WPROWADZENIE

Metody pomiaru parametrów termicznych ciał (ciepła a właściwego i przewodnictwa cieplnego) można podzielić na dwie grupy: statyczne i dynamiczne. Metody statyczne polegają na doprowadzeniu do układu znanej ilości ciepła, poczekaniu aż układ znajdzie się w stanie równowagi, czyli temperatura przestanie się zmieniać. Korzystając z bilansu cieplnego wyznacza się mierzone parametry: ciepło właściwe i przewodność cieplną. Metody dynamiczne polegają na rejestrowaniu zależności temperatury od czasu podczas ogrzewania i chłodzenia układu. Korzystając z rozwiązań równań wyznacza się poszukiwane parametry badanych ciał.

W metodzie pomiaru współczynnika przewodnictwa cieplnego metodą Angströma wykonuje się pomiary temperatury w funkcji czasu przy założeniu, że moc źródła ciepła zmienia się periodycznie i ciepło rozchodzi się wzdłuż pręta tak, że można zastosować równania jednowymiarowe.

2. WPROWADZENIE TEORETYCZNE

2.1. Przewodnictwo ciepła i ciepło właściwe

Przewodnictwo cieplne

Wymiana ciepła pomiędzy ciałami może zachodzić przy pomocy różnych mechanizmów:

- 1) przewodnictwo cieplne,
- 2) konwekcja ciepła,
- 3) promieniowanie elektromagnetyczne.

Przewodnictwo ciepła polega na transporcie energii bez obserwowanego ruchu makroskopowego ciał biorących udział w przenoszeniu energii, transport energii zachodzi dzięki mikroskopowym zderzeniom cząstek.

Konwekcja polega na transporcie energii wraz z makroskopowym ruchem płynu (gazu lub cieczy). Promieniowanie elektromagnetyczne polega na transporcie energii za pośrednictwem fali elektromagnetycznej. Tą drogą przenosi się energia w próżni.

Zjawisko przewodnictwa cieplnego opisuje prawo Fouriera:

$$\Phi = -S\lambda \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} \quad (1)$$

gdzie:

Φ jest strumieniem ciepła, opisującym ilość ciepła przepływającą w jednostce czasu: $\Phi = \frac{dQ}{dt}$ przez powierzchnię

S . Jeśli ciepło pochodzi od układu grzejącego to $\frac{dQ}{dt}$ jest

mocą grzejnika czyli: $P = \frac{dQ}{dt}$.

λ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego (przewodność cieplna, przewodnictwo właściwe), równanie (1) definiuje współczynnik przewodnictwa cieplnego.

$T(t, x)$ jest temperaturą (zmiennym w czasie polem temperatury).

Prawo Fouriera opisuje liniowy związek pomiędzy strumieniem ciepła a gradientem temperatury w sytuacji gdy gradienty temperatury nie są zbyt duże (gdy gradient temperatury nie zmienia właściwości materiału) i stałe czasowe zmian pól temperatur nie są zbyt małe (nie są mniejsze od czasu zderzeń pomiędzy cząsteczką). Równanie to można nazwać równaniem dyfuzji ciepła. W ogólniejszym przypadku trzeba przyjąć, że współczynnik przewodnictwa cieplnego λ zależy od temperatury oraz należy dopisać człon odpowiedzialny za relaksację ciepła (równanie Cattaneo–Vernotte [3]):

$$\Phi(x, t) = -S\lambda \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} - \tau \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} \quad (2)$$

W modelu mikroskopowym transport ciepła następuje dzięki zderzeniom cząstek. Cząsteczki o wyższej energii (czyli o wyższej temperaturze) w wyniku zderzeń przekazują energię kinetyczną cząsteczkom o niższej energii. Szybkość tej transmisji energii zależy od częstości zderzeń mikroskopowych. Proces mikroskopowych zderzeń opisujemy stałą czasową, nazywana czasem relaksacji, opisującą osiągnięcie równowagi po pojawieniu się niejednorodności mikroskopowej. W metalach relaksacja jest bardzo szybka (stała czasowa relaksacji τ ciepła dla metali wynosi kilka razy 10^{-11} s) i zazwyczaj można pominąć człon relaksacyjny. W tym ćwiczeniu założymy liniowość i brak wpływu relaksacji.

Ciepło właściwe.

Ilość ciepła Q potrzebna do ogrzania dowolnego ciała proporcjonalna jest do masy ciała m i przyrostu temperatury ΔT :

$$Q = c_w m \Delta T \quad (3)$$

gdzie: c_w jest współczynnikiem proporcjonalności nazywanym ciepłem właściwym. Równanie powyższe jest więc definicją ciepła właściwego.

W ogólnym przypadku ciepło właściwe zależy od temperatury. Jeśli proces termodynamiczny zachodzi w stałej objętości to ciepło Q dostarczone do układu równe jest przyrostowi ΔU energii wewnętrznej: $\Delta U = Q$

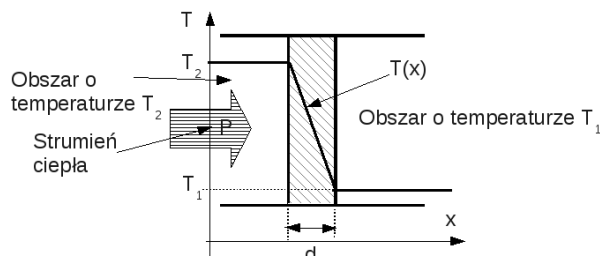
2.2. Przykłady stacjonarnego przewodzenia ciepła

W wielu zjawiskach można założyć, że źródło ciepła ma stałą moc i układ znajduje się w stanie stacjonarnym, czyli temperatury nie zmieniają się w czasie. Jeśli rozważymy układ jednowymiarowy to można przyjąć, że temperatura zmienia się liniowo z położeniem. Przykładem układu w którym temperatura zależy od jednej współrzędnej jest ściana o grubości d i polu powierzchni S (grubość jest dużo mniejsza od wymiarów poprzecznych)

umieszczona pomiędzy dwoma ośrodkami i temperaturze T_1 i T_2 . Równanie Fouriera ma wtedy postać:

$$\frac{dQ}{dt} = P = S\lambda \frac{T_2 - T_1}{d} \quad (4)$$

gdzie T_2 jest temperaturą od strony układu grzejącego, T_1 jest temperaturą od strony chłodnicy (rys 1).



Rysunek 1. Na rysunku pokazano dwa obszary: jeden o temperaturze T_1 (prawy), a drugi o temperaturze wyższej T_2 (lewy). W ścianie izolacyjnej zależność temperatury od położenia jest liniowa.

Zadania

1. Wyznacz moc pieca niezbędną do utrzymania w domu temperatury $T_w = 20^{\circ}\text{C}$ jeśli na zewnątrz jest $T_0 = -20^{\circ}\text{C}$. Przyjmij, że domek ma kształt prostopadłościenny o wymiarach $10\text{m} \times 10\text{m} \times 5\text{m}$. Dla uproszczenia załóż, że domek nie ma okien a dach jest płaski. Grubość ścian wynosi $d = 0,25\text{m}$ a przewodnictwo cieplne betonu z którego wykonano ściany i dach wynosi $\lambda_B = 1,7 \frac{\text{W}}{\text{Km}}$. Dodatkowo zakładamy, że ciepło nie ucieka przez podłogę.

2. Wylicz jaką musi być grubość izolacji wykonanej ze styropianu aby moc pieca mogła być trzy razy mniejsza. Współczynnik przewodnictwa cieplnego styropianu wynosi $\lambda_S = 0,036 \frac{\text{W}}{\text{Km}}$.

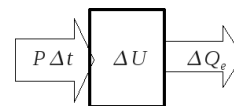
3. Co kalorymetru o masie $m = 100\text{g}$ wykonanego z aluminium wrzucono $m=200\text{g}$ nieznanego metalu o temperaturze otoczenie $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$ i następnie dolano $m=300\text{g}$ wody o temperaturze $T_W = 100^{\circ}\text{C}$. Końcowa temperatura mieszanki wynosiła $T_K = 50^{\circ}\text{C}$. Wyprowadź wzór na ciepło właściwe badanego metalu i wylicz jego wartość z niepewnością, zakładając, że niepewność pomiaru temperatur wynosi 1°C , masy $\Delta m=0,1\text{g}$, i utrata ciepła w czasie eksperymentu wynosiła 2%.

4. Kalorymetr wyposażony jest w komputerowy system rejestracji temperatury. W celu pomiaru ciepła właściwego wykonano dwa eksperymenty: zmierzono temperaturę od czasu w czasie podgrzewania znaną mocą kalorymetru z określoną ilością wody a następnie wykonano taki sam eksperyment ale z dodatkowo włożoną próbką metalu o znanej masie. Wyprowadź wzór na podstawie, którego wyznaczy się ciepło właściwe metalu.

2.3. Dynamika nagrzewania ciała

W praktycznych zastosowaniach mamy często do czynienia z sytuacją, w której nagrzewamy ciało ze stałą mocą P i czekamy, aż zostanie osiągnięta pożądana temperatura, przykładem jest czajnik elektryczny. Czajnik postawiony

na gazie należy opisać równaniami w których moc grzania zależy od temperatury. Bilans energii jest następujący:



Rysunek 2. Bilans energii układu ograniczonego. Energia dostarczona rozkłada się na dwa strumienie: podgrzewanie ciała i wymiana ciepła z otoczeniem.

energia $P\Delta t$ dostarczona w czasie Δt podgrzewa ciało o temperaturę ΔT i emituje energię ΔQ_e (rys. 2). Można to zapisać równaniem:

$$P\Delta t = \Delta U + \Delta Q_e \quad (5)$$

gdzie: $\Delta U = mc_w\Delta T$ - jest to przyrost energii wewnętrznej przy podgrzaniu o temperaturę ΔT . Jeśli ciało składa się z wielu ciał (np. woda w naczyniu) to przyrost energii wewnętrznej ma postać sumy składników $\Delta U = m_1c_1\Delta T + m_2c_2\Delta T$ (m_1 masa pierwszego ciała, c_1 ciepło właściwe pierwszego ciała i analogicznie m_2 i c_2 opisuje drugie ciało). W celu uproszczenia zapisu możemy przyrost energii wewnętrznej przedstawić jako: $\Delta U = C\Delta T$, gdzie C jest pojemnością cieplną, równą dla dwóch ciał $C = m_1c_1 + m_2c_2$.

Emisja cieplna ΔQ_e proporcjonalna jest do różnicy temperatur $T - T_0$:

$$\Delta Q_e = \alpha(T - T_0)\Delta t, \quad (6)$$

gdzie: α jest współczynnikiem opisującym przewodnictwo cieplne i konwekcję ciepła (pomijamy emisję elektromagnetyczną, promieniowanie cieplne tą drogą zależy od temperatury w potęgze czwartej). T_0 jest temperaturą otoczenia. Zakładamy, że szybkość transportu ciepła z grzanego ciała (strat ciepła) proporcjonalna jest do różnicy temperatury ciała i otoczenia $T - T_0$.

Współczynnik α proporcjonalny jest do powierzchni bocznej S_B i może być zapisany jako $\alpha = \sigma S_B$, gdzie σ charakteryzuje emisję cieplną powierzchni.

Po podstawieniu i po podzieleniu przez Δt otrzymujemy równanie różniczkowe opisujące ogrzewania ciała:

$$P = C \frac{dT(t)}{dt} + \alpha(T(t) - T_0) \quad (7)$$

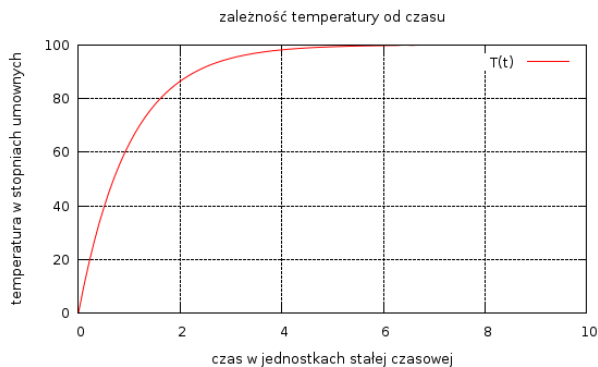
Rozwiązanie tego równania przewidujemy w postaci funkcji wykładniczej (czyli takiej która nie zmienia się przy różniczkowaniu) z dodaną stałą:

$$T(t) = Ae^{\gamma t} + D \quad (8)$$

gdzie A , γ i D są stałymi, które wyznaczymy podstawiając to rozwiązanie do równania (7) oraz wstawiając warunek początkowy $T(0) = T_0$ (temperatura przed włączeniem grzania równa była temperaturze otoczenia). Po podstawieniu do (7) mamy:

$$P = CAe^{\gamma t} + \alpha(Ae^{\gamma t} + D) \quad (9)$$

aby prawa strona była równa lewej dla każdego t musi zachodzić:



Rysunek 3. Wykres przedstawia zależność temperatury od czasu dla $T_0 = 0st$, $T_g = 100st$, gdzie stopnie st są umowne (np. $^{\circ}C$), czas wykreślono w jednostkach stałej czasowej τ .

$$C\gamma = -\alpha \text{ oraz } D = \frac{P}{\alpha} + T_0.$$

wygodnie jest stałą γ zapisać jako minus odwrotność stałej czasowej τ :

$$\tau = -\frac{1}{\gamma} = \frac{C}{\alpha} \quad (10)$$

Jeśli do równania (8) wstawimy warunek początkowy: $T(0) = A + D = T_0$, czyli $A = T_0 - D$. Po wstawieniu do (8) mamy rozwiązanie:

$$T(t) = \frac{P}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + T_0 \quad (11)$$

Dla czasu zmierzającego do nieskończoności mamy temperaturę graniczną $T_g = \frac{P}{\alpha} + T_0$. Po wstawieniu do (11) otrzymujemy:

$$T(t) = T_g - (T_g - T_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (12)$$

W celu wykreślenia tego równania wygodnie jest zapisać je w postaci: $T_g - T(t) = (T_g - T_0) e^{-\frac{t}{\tau}}$. stała czasowa τ opisuje sposób zbliżania się do temperatury granicznej i można w praktyce uznać, że po czasie $n\tau$ temperatura $T(n\tau)$ różni się od temperatury końcowej o $\delta T(n\tau) = T_g - T(n\tau) = (T_g - T_0)e^{-n}$. Jeśli założymy, dopuszczalny błąd osiągnięcia temperatury granicznej wynosi δT to trzeba czekać od włączenia grzania $n = \ln\left(\frac{T_g - T_0}{\delta T}\right)$ wielokrotności stałej czasowej τ .

Jeśli błąd osiągnięcia temperatury końcowej wynosi $\delta T = 1st$ to trzeba grzać $n = \ln(100) = 4,6$ stałych czasowych układu.

2.4. Wyznaczanie stałej czasowej na podstawie pomiarów temperatury od czasu

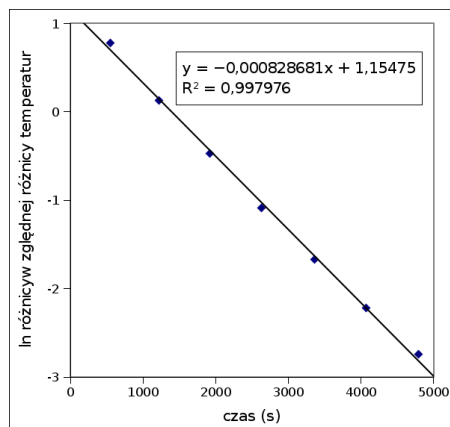
Założymy, że w wyniku pomiarów uzyskamy zależność temperatury od czasu dla ciała ogrzewanego stałą mocą. W celu wyznaczenia stałej czasowej należy wykreślić $y = \ln\left(\frac{T_g - T}{T_0}\right)$. Zgodnie z równaniem (11) mamy:

$$y = \ln\left(\frac{T_g - T}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T_g - T}{T_0}\right) - \frac{t}{\tau} \quad (13)$$

Wykres y od czasu jest linią prostą (o ile znamy T_g) o równaniu $y = \alpha x + \beta$ nachyleniu $\alpha = -\frac{1}{\tau}$. Jako przykład rozpatrzmy dane:

t (s)	T ($^{\circ}C$)
555	76,3
1225	102,3
1925	115,2
2630	122,3
3365	126
4075	128
4800	129,1

Nie znamy temperatury granicznej T_g ale można zapisać w arkuszu kalkulacyjnym wzór $y = \ln\left(\frac{T_g - T}{T_0}\right)$ (T_g wstawiamy jako wartość w jednej komórce do której się odwołujemy w równaniu) i tak dobierać wartość T_g (jest to temperatura nieco wyższa niż ostatni pomiar) aby uzyskać linię prostą. W przypadku powyższych danych najlepiej pasuje $T_g = 130,7^{\circ}C$, co ilustruje rys. 4.

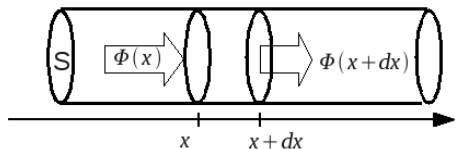


Rysunek 4. Zależność $y = \ln\left(\frac{T_g - T}{T_0}\right)$ od czasu

Współczynnik nachylenia wynosi $\alpha = -0,000829$ wobec czego $\tau = \frac{1}{\alpha} = 1207s \approx 20min$. Jeśli w eksperymencie mamy zbliżyć się do temperatury granicznej nie dalej niż na $1^{\circ}C$ to trzeba czekać ok. 90 minut.

2.5. Równanie przewodnictwa cieplnego, przewodnictwo termometryczne

Rozpatrzmy długi pręt (walec) wykonany z materiału przewodzącego ciepło o powierzchni przekroju S gęstości ρ i ciepłe właściwym c_w . Jeden z końców zetknięty jest ze źródłem ciepła o mocy zmiennej w czasie, przy czym założymy, że moc zmienia się w czasie w sposób periodyczny. Temperatura w takim przypadku jest funkcją czasu i położenia. Równanie opisujące propagację fali w ośrodku można wyprowadzić rozważając bilans energii [4]. Na rysunku fragment pręta ("plasterek") o długości Δx . Energia wchodząca do elementu o grubości Δx w czasie Δt wynosi $\Phi(x)\Delta t$, energia potrzebna do ogrzania pręta o temperaturę ΔT wynosi ΔU , oraz energia wyemitowana dalej w kierunku osi x wynosi $\Phi(x + \Delta x)\Delta t$.



Rysunek 5. Bilans energii (ciepła) przepływającej przez odcinek pręta o długości Δx .

Bilans energii w chwili t opisuje następujące równanie:

$$\Phi(t, x)\Delta t = \Delta U(t) + \Phi(t, x + \Delta x)\Delta t \quad (14)$$

Po przekształceniach mamy:

$$-(\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)) \Delta t = \Delta U \quad (15)$$

Ponieważ dla małych Δx można zapisać różnicę strumieni przez pochodną:

$$\Phi(t, x + \Delta x) - \Phi(t, x) = \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} \Delta x \quad (16)$$

więc równanie (15) przybiera postać:

$$-\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} = \frac{\Delta U(t, x)}{\Delta x \Delta t} \quad (17)$$

Przyrost energii ΔU związany jest z ogrzewaniem ciała: $\Delta U = mc_w \Delta T$, ponieważ odcinek pręta o grubości Δx ma objętość $S \Delta x$ więc masa wynosi $m = S \Delta x \rho$, tak więc:

$$\frac{\Delta U(t, x)}{\Delta x \Delta t} = S \rho c_w \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (18)$$

Ponieważ temperatura jest funkcją czasu i położenia więc iloraz $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ zapiszemy jako pochodną cząstkową $\frac{\partial T}{\partial t}$.

Strumień ciepła $\Phi(t, x)$ zgodnie z równaniem Fouriera (1) proporcjonalnie jest do pochodnej temperatury, więc po podstawieniu do (17) otrzymujemy równanie falowe opisujące propagację temperatury w warunkach dynamicznych (równanie przewodnictwa cieplnego):

$$\lambda \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} = \rho c_w \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} \quad (19)$$

Równanie to można zapisać w postaci:

$$k \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} \quad (20)$$

gdzie $k = \frac{\lambda}{\rho c_w}$, współczynnik k nazywamy współczynnikiem przewodnictwa temperaturowego (termometrycznego), jednostką jest m^2/s .

Równanie to jest równaniem różniczkowym cząstkowym i opisuje propagację temperatury przy następujących założeniach:

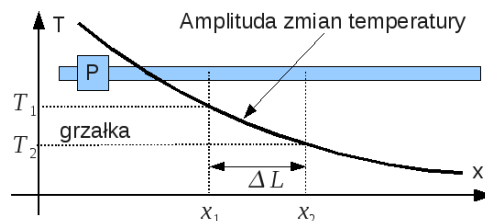
- 1) ciepło rozchodzi się tylko w jednym kierunku (zadanie jednowymiarowe) czyli pręt jest cienki i długi.
- 2) pręt znajduje się w ośrodku doskonale izolującym i ciepło nie ucieka w kierunku prostopadłym do pręta,
- 3) ciepło właściwe nie zależy od temperatury,
- 4) współczynnik przewodnictwa cieplnego λ nie zależy od temperatury.

Równanie przewodnictwa cieplnego jest jednym z równań opisujących bilans wielkości zachowawczych (ekstensywnych). Zasada zachowania masy związana jest z równaniem dyfuzji ([1] roz. 11).

3. POMIAR CIEPŁA WŁAŚCIWEGO METODĄ ANGSTRÖMA

Badanie fali temperaturowej w warunkach stacjonarnego, periodycznego rozwiązania można wykorzystać do wyznaczenia współczynnika przewodnictwa temperaturowego metalu. Aby wyznaczyć ten współczynnik należy rozwiązać równanie (20) w przypadku odpowiadającym sytuacji eksperymentalnej, wykonać pomiary temperatury w funkcji czasu w przynajmniej dwóch punktach i wstawić te pomiary do otrzymanego rozwiązania.

W Laboratorium eksperyment wykonuje się w układzie składającym się z grzałki sterowanej komputerem i długiego pręta (długość pręta $L = 1m$ jest znacznie większa od średnicy $D = 10mm$) umieszczonego w osłonie termicznej. W odległości ΔL umieszczono dwa termometry rezystancyjne (platynowe typu Pt100) pozwalające na ciągły pomiar temperatury. Temperatura rejestrowana jest cały czas przez komputer i można obserwować zależności od czasu w obu punktach pomiarowych. Źródło ciepła włączane jest i wyłączane okresowo (z okresem T). Równanie opisujące źródło ciepła powinno być opisane jako fala prostokątna, jednak założymy, że w odległości kilkunastu centymetrów od źródła ciepła, zmiany temperatury można opisać funkcjami sinusoidalnymi (następuje filtrowanie).



Rysunek 6. Układ pomiaru przewodności cieplnej. Na jednym końcu pręta znajduje się grzejnik o mocy P , w odległości x_1 i x_2 umieszczono czujniki temperatury.

3.1. Rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego w warunkach stacjonarnych

Założymy, że obserwujemy stan stacjonarny, czyli gdy fala temperatury może być opisana w każdym punkcie równaniem drgań harmonicznymi o stałej amplitudzie. W taki przypadku postulujemy, że rozwiązanie równania (20) ma postać wykładniczą:

$$T(t, x) = T_A e^{bt+ax} \quad (21)$$

gdzie T_A jest amplitudą zmian temperatury w punkcie $x = 0$, a – współczynnik opisujący zmianę amplitudy z odległością, a współczynnik b opisuje drgania, dlatego postulujemy, że stała b powinna być liczbą urojoną $b = i\omega$, gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T_C}$ jest częstością drgań (o okresie T_C wynikającym z okresu przełączania źródła ciepła). Po podstawieniu rozwiązania (21) do równania przewodzenia ciepła (20) otrzymujemy $ka^2 = b$. Ponieważ $b = i\omega$ więc:

$$a = \pm \sqrt{\frac{b}{k}} = \pm \sqrt{\frac{i\omega}{k}} \sqrt{i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\omega}{2k}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) \quad (22)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$.

Po podstawieniu a i b do (21) mamy:

$$T(t, x) = T_A e^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2k}} x} e^{i(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2k}} x + \omega t)} \quad (23)$$

Ponieważ fala powinna zanikać więc w równaniu (23) wybieramy znak „-” i jako rozwiązanie przyjmujemy część rzeczywistą ($Re(e^{ix}) = \cos x$):

$$T(t, x) = T_A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}} x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2k}} x\right) \quad (24)$$

Wynikim pomiarów są przebiegi zależności temperatury w dwóch punktach odległych o ΔL zarejestrowane przez komputer. Dwa uzyskane wykresy temperatury w funkcji czasu mają różną amplitudę i przesunięte są w czasie o ΔT . Najprostszym sposobem wyznaczania stałej k jest skorzystanie z informacji zawartej w amplitudzie zmian temperatur. W wyniku pomiaru odczytujemy amplitudę drgań w punktach x_1 i x_2 odległych o $\Delta L = x_2 - x_1$, po wstawieniu do równania (24) mamy:

$$\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \Delta L \quad (25)$$

Z tego równania można wyznaczyć współczynnik k , dla zmierzonych amplitud temperatur T_1 i T_2 :

$$k = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\Delta L}{\ln \frac{T_1}{T_2}} \right)^2 = \frac{\Pi}{T_C} \left(\frac{\Delta L}{\ln \frac{T_1}{T_2}} \right)^2 \quad (26)$$

gdzie $\omega = \frac{2\Pi}{T_C}$, jest częstotliwością zmian źródła ciepła.

W skrypcie zamieszczonym na stronie CLF opisano metodę wykorzystującą informacje zawartą również w przesunięciu fazowym obu przebiegów.

Wynikiem obliczeń dla uzyskanych danych pomiarowych jest współczynnik k , przewodność cieplną wyliczamy dla znanych wartości ciepła właściwego i gęstości. Analizę niepewności przeprowadzimy więc dla współczynnika k .

Wartość k wyznaczona z równania (26) obarczona jest niepewnością wynikającą z dwóch źródeł:

- 1) błędy pomiaru wielkości wchodzących do równania (26),
- 2) błędy modelu spowodowane założeniami, przy których wyprowadzono równanie (24).

Mierzymy: amplitudy temperatur T_1 i T_2 , okres zmian źródła ciepła T_C , oraz odległość czujników temperatury. W celu wyznaczenie niepewności pochodzącej od tych składowych należy wyznaczyć różniczkę zupełną równania (26), a następnie wyliczyć pierwiastek z sumy kwadratów składowych. Można pokazać (należy to wykazać w sprawozdaniu), że o wartości niepewności k decyduje (jest największy) człon związany jest z błędem pomiaru temperatury. Człon ten jest tym mniejszy im mniejsza jest amplituda T_2 zmian temperatury. Amplituda ta jest tym mniejsza im mniejszy jest okres przełączania źródła ciepła T_C (pokażemy to dalej), dlatego ta składowa niepewności jest tym mniejsza im większy jest okres T_C .

Na błędy modelu składają się dwa założenia:

- 1) ciepło nie jest emitowane jest w kierunku prostopadłym do pręta,
- 2) osiągamy stan stacjonarny.

O niepewnościach decyduje założenie pierwsze, związane z emisją ciepła prostopadle do pręta (z „uciekaniem” ciepła), pokażemy dalej, że ta składowa niepewności jest tym mniejsza im mniejszy jest okres przełączania ciepła T_C .

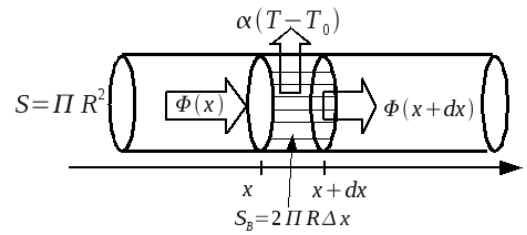
Mamy więc sytuację, że niepewność związana z pomiarem temperatury maleje ze wzrostem okresu T_C , natomiast niepewność wynikająca z błędu modelu rośnie ze wzrostem T_C . Niezbędne jest więc wyznaczenie wartości optymalnej, gdy obie składowe niepewności są identyczne. Niezbędne jest więc opracowanie modelu uwzględniającego straty ciepła oraz modelu pokazującego jak zależy amplituda temperatury od okresu przełączania źródła ciepła.

Równanie (25) można zapisać: $\ln \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\tau_L \omega}$, gdzie zdefiniowaliśmy stałą czasową $\tau_L = \frac{\Delta L^2}{2k}$, stała ta opisuje szybkość relaksacji temperatury na długości ΔL . Oznaczenie to wykorzystane będzie w rozdziale 3.4

3.2. Równanie przewodnictwa z uwzględnieniem strat ciepła

Aby wyznaczyć niepewność wynikającą ze strat ciepła wzdłuż pręta rozpatrzmy transport ciepła wzdłuż pręta przy założeniu, że w kierunku prostopadłym do pręta emitowane jest ciepło opisane równaniem (6) [2]. Równanie bilansu (14) musi być uzupełnione o człon $\alpha(T - T_0)\Delta t$

$$\Phi(t, x)\Delta t = \Delta U(t) + \alpha(T - T_0)\Delta t + \Phi(t, x + \Delta x)\Delta t \quad (27)$$



Rysunek 7. Transport ciepła wzdłuż pręta z uwzględnieniem strat. Przez ścianę boczną w czasie Δt „ucieka” ciepło o wartości proporcjonalnej do powierzchni bocznej: $\alpha(T - T_0) = S_B \sigma(T - T_0)$. Powierzchnia boczna S_B jest powierzchnią walca o długości Δx i promieniu R .

Ponieważ człon $\alpha(T - T_0)\Delta t$ proporcjonalny jest do powierzchni bocznej więc zapiszemy współczynnik α jako $\alpha = S_B \sigma = 2\Pi R \sigma \Delta x$, gdzie R jest promieniem pręta, a σ jest współczynnikiem opisującym szybkość emisji ciepła z jednostki powierzchni. Dzielicz równanie przez pole powierzchni $S = \Pi R^2$ otrzymujemy równania analogiczne do równania (19):

$$\lambda \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} = \rho c_w \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} + 2 \frac{\sigma}{R} (T(t, x) - T_0) \quad (28)$$

po podzieleniu przez ρc_w otrzymujemy równanie fali temperaturowej:

$$k \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} + \sigma' (T(t, x) - T_0) \quad (29)$$

gdzie: $\sigma' = \frac{2\sigma}{R\rho c_w}$, wielkość ta ma wymiar odwrotności czasu możemy więc zapisać ją jako odwrotność stałej czasowej $\tau' = \frac{1}{\sigma'}$, dalej pokażemy, że ta stała czasowa równa jest stałej czasowej (10) charakteryzującej równanie (7) opisujące ogrzewanie ciała.

Rozwiązanie równania (28) przewidujemy w postaci analogicznej do (21), ale z dodatkową stałą niezbędną aby człon $\sigma' T_0$ został uwzględniony w tym rozwiązaniu:

$$T(t, x) = T_A e^{bt+ax} + D \quad (30)$$

gdzie jak poprzednio założymy: $b = i\omega$ Po podstawieniu do równania (29) otrzymujemy:

$$a = \sqrt{\frac{i\omega + \sigma'}{k}} = \sqrt{\frac{\omega}{k}} \sqrt{i + \frac{\sigma'}{\omega}} \quad (31)$$

Jak poprzednio a jest liczbą zespoloną $a = a_r + ia_i$, czyli część rzeczywista temperatury w rozwiązaniu (30) będzie miała postać:

$$T(t, x) = T_A e^{-a_r x} \cos(\omega t - a_i x) + D \quad (32)$$

Równanie to interpretujemy tak, że rozchodzi się fala o amplitudzie:

$$T_a(x) = T_A e^{(-a_r x)} \quad (33)$$

Gdy nie było strat energii, czyli gdy $\sigma = 0$ to część rzeczywista a wynosiła $a_r = -\sqrt{\frac{\omega}{2k}}$. Wynikało to z tego, że $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$. Teraz trzeba wyliczyć pierwiastek z liczby $i + \frac{\sigma'}{\omega}$. Wykonamy to w przybliżeniu zakładając, że $\frac{\sigma'}{\omega} \ll 1$. Po rozwinięciu w szereg otrzymamy w przybliżeniu:

$$\text{Re} \left(\sqrt{i + \frac{\sigma'}{\omega}} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\sigma'}{\omega} \right) \quad (34)$$

czyli część rzeczywista stałej a wynosi:

$$a_r = -\sqrt{\frac{\omega}{2k}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\sigma'}{\omega} \right) \quad (35)$$

Jeśli jak poprzednio pomiary amplitud temperatur w punkcie x_1 i x_2 wynosiły $T_1 = T_a(x_1)$ i $T_2 = T_a(x_2)$ więc korzystając z (32) i (33) mamy:

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{a_r \Delta L} \quad (36)$$

gdzie $\Delta L = x_2 - x_1$.

Po podstawieniu (35) do (36) mamy przybliżony wzór dla k (ta wartość k oznaczmy z primem):

$$k' = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\Delta L}{\ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)} \right)^2 \left(1 + \frac{\sigma'}{\omega} \right) \quad (37)$$

Czyli błąd względny spowodowany stratami ciepła wynosi:

$$\frac{k - k'}{k} = \frac{\sigma'}{\omega} \quad (38)$$

W celu wyznaczenia σ' można posłużyć się rozwiązaniem równania opisującego grzewanie ciała (12). Stała czasowa tego procesu dana jest równaniem (10):

$$\tau = \frac{C}{\alpha} = \frac{m c_w}{S_B \sigma} = \frac{\Pi R^2 l \rho c_w}{2 \Pi R l \sigma} = \frac{R \rho c_w}{2 \sigma} \quad (39)$$

gdzie wstawiono: $m = \Pi R^2 l \rho$ (l - długość pręta, R - promień pręta), oraz pole powierzchni bocznej $S_B = 2 \Pi R l$.

Ponieważ $\sigma' = \frac{2\sigma}{R\rho c_w}$ więc $\sigma' = \frac{1}{\tau}$, tak więc błąd względny wyznaczenia stałej k spowodowany ucieczką ciepła przez ścianę boczną można w przybliżeniu wyrazić jako:

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{k - k'}{k} = \frac{\sigma'}{\omega} = \frac{1}{\tau \omega} \quad (40)$$

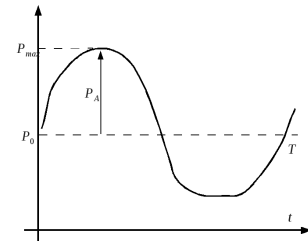
Wartość częstości znamy bowiem znany jest okres T zmian źródła ciepła: $\omega = \frac{2\Pi}{T}$. Stałą czasową wyznaczmy wykreślając zależność temperatury maksymalnej od czasu jak to pokazano w rozdziale 2.4.

3.3. Zależność amplitudy zmian temperatury od okresu przełączania źródła ciepła

Zgodnie z równaniem (24) wzdłuż pręta amplituda fali temperaturowej zmienia się z odległością wykładniczo. W celu wyznaczenia zależności amplitudy temperatury od okresu T_C przełączania źródła ciepła należy rozważyć grzanie ciała przy założeniu, że moc źródła ciepła zmienia się okresowo. W przybliżeniu założymy, że źródło ciepła zmienia moc sinusoidalnie i do równania (7) wstawimy:

$$P(t) = P_0 + P_A e^{i\omega t} \quad (41)$$

Gdzie P_A jest amplitudą zmian mocy, a P_0 - wartość mocy wokół, której są drgania, czyli średnia moc grzania (rys.8). Jeśli sygnał mocy zmienia się od zera do wartości maksymalnej P_{max} to $P_0 = \frac{1}{2} P_{max}$ i $P_A = \frac{1}{2} P_{max}$.



Rysunek 8. Zależność mocy grzania od czasu. T jest okresem generatora sterującego grzaniem. Moc średnia P_0 , amplituda składowej zmiennej P_A .

Równanie (7) opisujące nagrzewanie ciała ma więc teraz postać:

$$P_0 + P_A e^{i\omega t} = C \frac{dT(t)}{dt} + \alpha(T(t) - T_0) \quad (42)$$

gdzie współczynnik α jest proporcjonalny do powierzchni S_B przez którą następuje emisja ciepła:

$\alpha = \sigma S_B$, S_B , i jak poprzednio σ jest współczynnikiem opisującym szybkość emisji ciepła z jednostki powierzchni.

Rozwiązanie tego równania jest sumą dwóch składowych:

- 1) składowa wymuszona opisująca okresową zmianę temperatury:

$$T_w(t) = T_A(\omega)e^{i(\omega t + \Delta\phi)} \quad (43)$$

gdzie $T_A(\omega)$ jest amplitudą zmian temperatury, a $\Delta\phi$ opisuje przesunięcie fazowe temperatury w stosunku do sygnału mocy $P(t)$.

- 2) składowa opisująca stopniowe nagrzewania ciała (identyczna jak równaniem (12))

$$T_s(t) = T_g - (T_g - T_0)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (44)$$

Po wstawieniu do równania (42) rozwiązania w postaci: $T(t) = T_w(t) + T_s(t)$ otrzymamy:

- 1) stałą czasową procesu: $\tau = -\frac{1}{\gamma} = \frac{C}{\alpha}$
- 2) temperaturę graniczną: $T_g = \frac{P}{\alpha} + T_0$.
- 3) zależność amplitudy T_A temperatury od częstości ω :

$$T_A(\omega) = \frac{T'_g}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} \quad (45)$$

T'_g jest temperaturą graniczną wynikającą z amplitudy składowej zmiennej:

$$T'_g = \frac{P_A}{\alpha} = \frac{P_A}{\sigma S_B}$$

Wyznaczone wartości stałej czasowej τ i temperatury granicznej T_g są zgodnie z obliczeniami w rozdziale 2.3, ponieważ składowe $T_w(t)$ i $T_s(t)$ są niezależnymi rozwiązaniami.

3.4. Składowa niepewności wyznaczenia stałej k wynikająca z błędu pomiaru temperatury

Wartość stałej przewodnictwa temperaturowego k wyznaczamy ze wzoru (26): $k = \frac{\omega}{2} (\Delta L)^2 \left(\ln \frac{T_1}{T_2}\right)^{-2}$. Założymy, że niepewność wyznaczenia temperatury T_1 i T_2 wynoszą ΔT_1 i ΔT_2 , dalej założymy, że są takie same i wynoszą ΔT . W celu wyznaczenia niepewności wyliczymy pochodne:

$$\frac{\partial k}{\partial T_1} = 2\frac{\omega}{2} \frac{(\Delta L)^2}{\left(\ln \frac{T_1}{T_2}\right)^3} \frac{1}{T_2} = 2k \frac{1}{\ln \frac{T_1}{T_2}} \frac{1}{T_2} \quad (46)$$

analogicznie mamy:

$$\frac{\partial k}{\partial T_2} = 2\frac{\omega}{2} \frac{(\Delta L)^2}{\left(\ln \frac{T_1}{T_2}\right)^3} \frac{1}{T_2} = 2k \frac{1}{\ln \frac{T_1}{T_2}} \frac{1}{T_1} \quad (47)$$

Z poprzednich równań mamy: $\ln \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \Delta L = \sqrt{\omega\tau_L}$, gdzie $\tau_L = \frac{\Delta L^2}{2k}$. Niepewność wyznaczamy wykorzystując składanie niepewności zgodne ze składaniem odchyłań standardowych:

$$\Delta k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial T_1} \Delta T_1\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T_2} \Delta T_2\right)^2} \quad (48)$$

Ponieważ zakładamy, że $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$ oraz $T_1 \gg T_2$ to otrzymujemy:

$$\frac{\Delta k}{k} = 2 \frac{\Delta T}{\sqrt{\omega\tau_L}} \frac{1}{T_2} = 2 \frac{\Delta T}{\sqrt{\omega\tau_L}} T_A^{-1} e^{\sqrt{\omega\tau_L} \frac{x}{\Delta L}} \quad (49)$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że $T(x) = T_A e^{\sqrt{\frac{\omega}{2k}} x} = T_A e^{\sqrt{\omega\tau_L} \frac{x}{\Delta L}}$. Jeśli podstawimy to do wzoru (45) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta k}{k} &= 2 \frac{\Delta T}{T'_g} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau^2}{\omega\tau_L}} e^{\sqrt{\omega\tau_L} \frac{x}{\Delta L}} \approx \\ &\approx 2 \frac{\Delta T}{T'_g} \sqrt{\frac{\omega\tau^2}{\tau_L}} e^{\sqrt{\omega\tau_L} \frac{x}{\Delta L}} \end{aligned} \quad (50)$$

gdzie wykorzystaliśmy założenie, że $\omega\tau \ll 1$.

Powyższy wzór wykorzystamy do analizy optymalnej wartości okresu źródła ciepła. Do obliczenia niepewności wielkości k należy skorzystać ze wzoru (48) do którego podstawimy pochodne, ale bez wstawiania zależności amplitud temperatur T_1 i T_2 od położenia, a wstawiając dane pomiarowe. Niepewność względna wyznaczenia k wynosi więc:

$$\frac{\Delta k}{k} = 2\Delta T \left(\ln \frac{T_1}{T_2}\right)^{-1} \sqrt{\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}} \quad (51)$$

3.5. Dobór okresu zmian źródła ciepła minimalizujący niepewność wyznaczenia stałej k

Jak widać z otrzymanych wzorów składowa niepewności k związana z błędami pomiaru amplitud temperatur szybko rośnie z częstością zmian grzania ω , natomiast składowa niepewności związana ze stratą ciepła maleje z omega $\frac{\Delta k}{k} = \frac{1}{\omega\tau}$. Minimalizację niepewności uzyskamy jeśli obie składowe będą miały podobne wartości. Należy więc dobrać tak częstość źródła ciepła ω aby:

$$\frac{\Delta T}{T'_g} \sqrt{\frac{\omega\tau^2}{\tau_L}} e^{\sqrt{\omega\tau_L} \frac{x}{\Delta L}} \approx \frac{1}{\omega\tau} \quad (52)$$

Równanie to należy rozwiązać graficznie podstawiając dane o układzie pomiarowym. Wykres dla $\Delta T = 0,1K$, $x = 0,15m$ (odległość grzejnika od drugiego czujnika temperatury), $T'_g = 100K$ (amplituda temperatury grzejnika), $\tau = 1100s$ i $\tau_L = 72s$ przedstawia rys. 9.

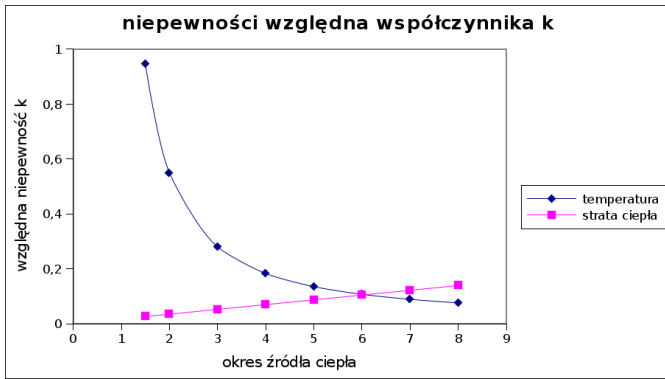
Wykres ten należy traktować jako przykład, dla każdego stanowiska pomiarowego należy zdobyć odpowiednia dane i wykonać wykres opisujący badany przypadek.

4. POMIARY I OPRACOWANIE DANYCH

4.1. Pomiary

Po włączeniu grzania i włączeniu rejestracji danych (pomiar) należy odczekać ponad 90 min w celu zapewnienia równowagi termicznej z otoczeniem (stan stacjonarny).

Zapisać położenie (współrzędną czasową i wartość temperatury) wszystkich zaobserwowanych maksimów i minimumów krzywej dla obu czujników temperatury. W tym celu przekopiować obie krzywe (w całości) do górnego okna i najężdżając kursorem odczytać minima i maksima (czas i temperaturę). Dwa ostatnie maksima i minima obu krzywych zmierzyć dokładniej, tj. na zakończenie pomiarów



Rysunek 9. Składowa niepewności $\frac{\Delta k}{k}$ spowodowana błędami pomiaru temperatury (zgodnie ze wzorem (50)) oraz niepewność spowodowana stratami ciepła $\frac{\Delta k}{k} = \frac{1}{\omega\tau}$. Widać że optymalny okres sygnału sterującego mocą grzałki wynosi (dla danych przykładowych) ok. $T = 6s$.

przekopiować przebiegi z dwoma ostatnimi minimami i maksimami i ustalić możliwie dokładnie wartości czasu i temperatury (użyć powiększenia, przy którym widać rozdzielczość).

Zapisać rodzaj materiału i dane materiału (zapisane są pod podstawką pręta), z którego wykonany jest pręt.

4.2. Opracowanie danych

Wykonać następujące wykresy i obliczenia:

- 1) Dla wszystkich maksimów i minimów temperatury, dla pomiarów z obu czujników (bliższego o dalszego od grzejnika), narysować zależność $\ln \frac{T_g - T(t)}{T_0}$ w funkcji czasu t (cztery krzywe). Tak dobrać T_g aby wykresy były prostą (dla każdej serii danych oddzielnie dobrać T_g). Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć nachylenie prostej i wyliczyć stałą czasową τ (z niepewnością) narastania temperatury (równanie (12)) jak to opisano w punkcie 2.4.
- 2) **Wyznaczyć współczynnik k dwoma metodami:** ze wzoru (26) (metodą opisaną powyżej) i metodą opisaną w skrypcie dostępnym w internecie na stronie CLF, ze wzoru $k = \frac{\Pi(\Delta L)^2}{\Delta\phi T \ln \frac{T_1}{T_2}}$, gdzie $\Delta\phi = \frac{2\Pi}{T} \Delta t$, T - okres sygnału mocy grzałki, Δt przesunięcie czasowe sygnałów z obu czujników.
- 3) Porównać tak wyznaczone wartości k (dla obu metod) z obliczoną na podstawie tablicowych przewodności cieplnej, gęstości i ciepła właściwego.
- 4) Okres przełączania grzejnika należy wyznaczyć na podstawie wykresu temperatury od czasu (okres zmian temperatury).

Analiza niepewności:

- 1) Wypisać wszystkie założenia teorii niezbędne do wprowadzanie wzoru (25).
- 2) Wyznaczyć stałą czasową osiągnięcia równowagi z otoczeniem całego układu i przedyskutować pytanie: po jakim czasie można uznać, że osiągnęliśmy stan stacjonarny. W celu wyznaczenia stałej czasowej wykreśl zależność $\ln(T_g - T)$ od czasu i tak dobrać T_g aby uzyskany wykres najlepiej pasował do prostej.

- 3) Opisać źródła błędów wyznaczenia współczynnika k , oszacować składowe niepewności pochodzące od różnych czynników:

- błędy pomiaru czasu, długości i temperatury
- błędów modelu matematycznego. Wypisać założenia modelu matematycznego i spróbować oszacować wpływ poszczególnych założeń.

Należy umieścić następujące obliczenia:

- a) Oszacować błąd względny wyznaczania stałej k przewodnictwa temperaturowego spowodowany stratami ciepła, zgodnie z zależnością (40).
- b) Oszacować niepewność związaną z błędem pomiaru temperatury zgodnie z równaniami (51).
- c) Niepewność pomiaru temperatury określić na podstawie niepewności pomiaru rezystancji. Temperatura mierzona jest przetwornikiem rezystancyjnym Pt100, rezystancja przetwornika zależy od temperatury liniowo:

$$R(T) = R_0 (1 + \alpha(T - T_0)) \quad (53)$$

gdzie, dla platyny $\alpha = 0,00347 \frac{1}{K}$, oraz $R_0 = 100\Omega$. Niepewność pomiaru temperatury można wyznaczyć różniczkując wzór (53): $\Delta R = R_0 \alpha \Delta T$. ΔR wyznacza się jako błąd kwantowania przyrządu cyfrowego i wynosi trzy kwanty rozdzielczości (sprawdź dane miernika).

- d) Oszacować niepewność wyznaczenia k spowodowaną błędem pomiaru odległości czujników temperatury. Przyjmując niepewność pomiaru odległości $U(\Delta L) = 1mm$.
- e) Oszacować niepewność spowodowaną niedokładnością pomiaru okresu źródła ciepła T_C , przyjmując niepewność pomiaru czasu 5s.
- f) Ustalić, największe składowe niepewności.
- g) Oszacować całkowitą niepewność wyznaczenia stałej przewodnictwa temperaturowego k

4.3. Zadanie domowe (rozwiązania indywidualnie)

Zaprojektować ocieplenia domku wykonanego z cementu, wyliczyć jaka musi być warstwa styropianu aby uzyskać n krotny spadek poboru mocy grzania? Domek ma wymiary $a \times b \times c$ gdzie a =liczba liter imienia, b =liczba liter nazwiska, $c = 3m$, n =część całkowita $\frac{ab}{a+b}$.

LITERATURA

- [1] Astachow A.W. Kurs Fizyki T.1. Mechanika i teoria kinetyczna, WNT, Warszawa 1988.
- [2] Cutler, M. Cheney G.T. Heat-Wave Methods for the Measurement of Thermal Diffusivity, Journal of Applied Physics, 7 (1963) 1902.
- [3] Malinowski L.: Przewodzenie ciepła. Model hiperboliczny i relaksacyjny. Wydawnictwo Uczelniane Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie. Szczecin 2009.
- [4] Szczeniowski S. Fizyka doświadczalna, cz.II, Ciepło i fizyka drobinowa, PWN, Warszawa, 1964.