

Zasady opracowywania danych doświadczalnych na przykładzie pomiaru rezystancji i grubości.

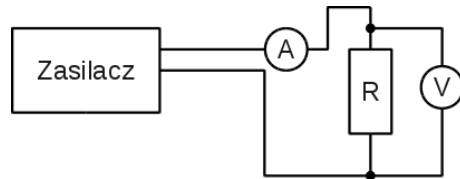
Michał Urbański

Ćwiczenie ma dwie części:

- Pomiar zależności prądu I od napięcia U dla wybranego rezystora.
- Pomiar średnicy pręta (spinacza, rurki) lub grubości blachy w N ($N > 50$) różnych miejscach przy pomocy mikrometru lub suwmiarki. Wyznaczenie wartości średniej i niepewności oraz narysowanie histogramu.

POMIAR REZYSTANCJI

W układzie jak na rys.: wykonać pomiary z woltomierzem analogowym i amperomierzem cyfrowym.



Celem ćwiczenia jest wyznaczenie rezystancji metodą najmniejszych kwadratów i określenie składowych niepewności wynikających z różnego rodzaju błędów:

- rozrzut wokół prostej uzyskanej metodą najmniejszych kwadratów, wyrażony przez odchylenie standardowe współczynnika nachylenia.
- niepewności związane z efektami systematycznymi opisanymi wzorami podanymi przez producenta (błąd graniczny),
- błąd związany przepływem prądu przez woltomierz.

oraz obserwacja „efektu dekadowego” związanego z różnicą wskazań przyrządów przy zmianie zakresu.

Wykonać 3 serie pomiarów każda po minimum 12 pomiarów dla każdego zakresu: dla trzech zakresów woltomierza analogowego: 1V, 3V i 10V.

Wartości napięcia tak dobrać, aby dla każdego z zakresów woltomierza nie zmieniać zakresów amperomierza. Punkty pomiarowe dla każdego zakresu tak dobrać, aby wartość mierzona nie była mniejsza od 1/3 zakresu (dla przykładu: na zakresie 1V wykonać pomiary w przedziale 0,3V-1V). W trakcie pomiarów zrobić wykres na papierze w kratkę.

Opracowanie pomiarów zależności napięcia od natężenia prądu:

I) dla każdej serii pomiarowej (dla każdego zakresu osobno, czyli dla 3 serii) wykreślić zależność $I = f(U)$, na wykresie zaznaczyć punkty ze słupkami błędów (niepewnością graniczną wyznaczoną na podstawie danych dla przyrządów), narysować prostą

$y = ax + b$ dopasowaną metodą najmniejszych kwadratów. Dla każdej serii wyznaczyć współczynnik nachylenia a oraz wyraz wolny b wraz z odchyleniami standardowymi tych współczynników (czyli podać $s(a)$ i $s(b)$, s oznacza estymator odchylenia standardowego)

II) dla każdej serii wyznaczyć rezystancję i jej niepewność dwoma metodami:

- metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć parametry prostej (nachylenie i punkt początkowy), i wyznaczyć niepewności tych parametrów jako odchylenie standardowe współczynnika nachylenia (opisać program z którego się korzysta),
- metodą niestatystyczną na podstawie zastosowania wzoru $R=U/I$ przy maksymalnej wartości napięcia dla danego zakresu (danej serii) i określić niepewność złożoną wynikająca z błędów aparaturowych.

Porównać wyniki rezystancji uzyskane z każdej serii i zaobserwować efekt dekadowy.

III) Wyznaczyć błąd spowodowany przepływem prądu przez woltomierz, (amperomierz mierzy sumę prądów płynących przez mierzony rezystor i woltomierz) dla każdej serii pomiarowej.

IV) Porównać dwie metody wyznaczania rezystancji i uzasadnić kiedy stosuje się metodę najmniejszych kwadratów, a kiedy metodę wyznaczania rezystancji na podstawie pomiaru napięcia dla jednej wartości prądu.

V) Zebrać wszystkie obliczenia w tabelce i przedyskutować wszystkie rodzaje błędów.

Obliczenia błędów i niepewności

Błąd spowodowany prądem woltomierza

Przyjmujemy, że błąd pomiaru prądu jest równy prądowi woltomierza I_V : tj.: $\Delta I = I_V$, ponieważ $R = U/I$ więc: $\Delta R = \frac{U}{I^2} \Delta I = R \frac{\Delta I}{I}$. Ponieważ prąd woltomierza wynosi: $I_V = \frac{U}{R_V}$ (R_V – rezystancja wewnętrzna woltomierza), więc mamy:

$$\frac{\Delta_V R}{R} = \frac{R}{R_V} \text{ czyli } \Delta_V R = \frac{R^2}{R_V} \quad (1)$$

UWAGA Wyprowadzić wzór na błąd pomiaru oporu spowodowany przez woltomierz z definicji błędu jako różnicy pomiędzy wartością prawdziwą $R_0 = U/I$ a wartością zmierzoną $R = \frac{U}{I_A}$, gdzie prąd amperomierza $I_A = I + I_V$, gdzie I jest prądem płynącym przez mierzony opornik, a I_V – prąd płynący przez woltomierz. Błąd pomiaru rezystancji $\Delta R = R - R_0$. W przybliżeniu otrzymujemy wzór (1).

Niepewność związana z rozrzutem przypadkowym pomiarów

Wykonujemy wykres natężenia prądu I w funkcji napięcia elektrycznego U . Przyjmujemy założenie, że zależność ta opisana jest równaniem $I = aU + b$. Metodą najmniejszych kwadratów wyznacza się współczynniki a i b oraz niepewności standardowe tych współczynników $s(a)$ i $s(b)$. Rezystancję wylicza się jako $R = 1/a$. Niepewności standardowa opisująca rozrzut danych $u(R)$ równa jest odchyleniu standardowemu rezystancji $\sigma(R)$. Ponieważ $dR = \frac{dR}{da} da = -\frac{dR}{a^2} da$, więc niepewność rezystancji wynosi $s_r(R) = \frac{1}{a^2} s(a)$.

Wzory dla metody najmniejszych kwadratów, nieuwzględniające niepewności punktów pomiarowych (np. wbudowane do arkusza kalkulacyjnego), opisują jedynie składową

przypadkową niepewności, czyli są miarą rozrzutu danych pomiarowych wokół prostej. Tak obliczone odchylenie standardowe nie uwzględnia błędów systematycznych.

Obliczenia błędów granicznych związanych z przyrządem pomiarowym. Oznaczmy wynik pomiaru przez x , w celu obliczenia niepewności $u(x)$ wyznaczmy najpierw błędy graniczne:

Przyrząd analogowy - błąd graniczny: $\Delta_s x = \gamma_k x_z$,
gdzie: γ_k - klasa przyrządu, x_z - zakres pomiarowy.

Przyrząd cyfrowy - błąd graniczny: $\Delta_s x = \gamma x + \Delta_q x$, gdzie: γ - błąd graniczny względny, $\Delta_q x$ - składowa addytywna błędu granicznego. $\Delta_q x = n \Delta_{roz}$, gdzie: Δ_{roz} - rozdzielczość (wartość odpowiadająca ostatniej cyfrze wyświetlacza), n - liczba cyfr podana przez producenta.

Niepewność standardową $u(x)$ pomiaru wielkości x opisującą składową związaną z przyrządem, dla którego błąd graniczny wynosi $\Delta_s x$, wyznaczmy jako odchylenie standardowe rozkładu równomiernego o promieniu $\Delta_s x$: $u(x) = \frac{\Delta_s x}{\sqrt{3}}$.

Niepewność rezystancji wyznaczonej z pojedynczego pomiaru Załóżmy, że wyliczymy rezystancję na podstawie jednego pomiaru napięcia U i natężenia prądu I , ze wzoru $R = \frac{U}{I}$. Błąd $\Delta_S R$ wyznaczenia rezystancji opisany jest w przybliżeniu różniczką:

$$\Delta_S R = \frac{\Delta U}{I} - \frac{U}{I^2} \Delta I \quad (2)$$

Niepewność równa jest odchyleniu standardowemu błędu: $u(R) = \sigma(\Delta_S R)$. Korzystając z właściwości odchylenia standardowego sumy zmiennych losowych mamy niepewność aparaturową:

$$u_i(R) = \sqrt{\left(\frac{u(U)}{I}\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2} u(I)\right)^2} \quad (3)$$

gdzie $u(U) = \frac{\Delta_s U}{\sqrt{3}}$ i $u(I) = \frac{\Delta_s I}{\sqrt{3}}$, są niepewnościami standardowymi U i I , oraz $\Delta_s U$ i $\Delta_s I$ są błędami granicznymi aparaturowymi pomiaru napięcia i natężenia prądu wyznaczonymi zgodnie ze specyfikacją przyrządu.

Podsumowanie i wnioski

Zamieścić tabelkę zbiorczą wszystkich obliczeń zawierającą dla każdej serii osobno i dla wszystkich wyników razem:

1. Wartość rezystancji obliczoną metoda najmniejszych kwadratów (MKM) jako nachylenie prostej $U=U(I)$ (lub odwrotność nachylenia jeśli wykreślono $I=I(U)$).
2. Niepewność rezystancji obliczoną metodą najmniejszych kwadratów (MKM) wyznaczona na podstawie odchylenie standardowe współczynnika nachylenia.
3. Rezystancję wyliczoną jako $R = U/I$ z jednego punktu pomiarowego dla największych wartości napięcia (dla wszystkich mierzonych zakresów)
4. Niepewność $u_A(R)$ wyznaczenia rezystancji (zgodnie z punktem 3) związaną z błędami przyrządów pomiarowych ze wzoru (3).
5. Błąd spowodowany rezystancja woltomierza (wzór (1)).

6. Niepewność standardową złożoną (całkowitą) uwzględniającą trzy czynniki:

$$u(R) = \sqrt{s^2(R) + u_i^2(R) + \frac{1}{3} (\Delta_V R)^2}.$$

Wyliczyć należy również niepewność rozszerzoną złożoną na poziomie $p=0,95$. Tabela powinna mieć postać:

nr	wielkość	serial	seria2	...	całość
1	rezystancja z MNK
2	niepewność rezystancji z MNK
3	rezystancja $R=U/I$
4	niepewność aparaturowa
5	niepewność od rezystancji woltomierza
6	niepewność całkowita, złożona

We wnioskach porównać składowe niepewności (opisane powyżej dla różnych źródeł błędów) dla wszystkich zmierzonych zakresów (serii pomiarowych) i określić czynnik dominujący. Pokazać na czym polega efekt dekadowy (zmiana wyznaczonej rezystancji przy zmianie zakresu), podać różnice wyznaczonych rezystancji dla różnych zakresów. Sprawdzić czy różnice wartości rezystancji uzyskane dla poszczególnych zakresów mieszczą się w granicach błędów granicznych aparaturowych.

W opracowaniu napisać z jakiego programu do wyznaczania współczynników równania prostej metoda najmniejszych kwadratów się korzystało.

Przykładowe pytania kontrolne

1. Zaprojektuj woltomierz na zakres 10V wykorzystując amperomierz na zakres 0,1mA i odpowiedni rezystor (oblicz wartość rezystora i określ sposób połączenia).
2. Narysuj układ do pomiaru małych i dużych rezystancji. Uzasadnij wybór układu pomiarowego w zależności od mierzonej rezystancji.
3. Wyprowadź wzór na błąd pomiaru rezystancji spowodowany prądem woltomierza.
4. Wylicz wartość bocznika jaki trzeba podłączyć do amperomierza mającego zakres 1mA i rezystancję 1000Ω aby uzyskać amperomierz na zakres 1A.
5. W celu wyznaczenia rezystancji przewodnika metalowego wykonano pomiary natężenia prądu miernikiem analogowym klasy 2% na zakresie 20mA i napięcia miernikiem cyfrowym na zakresie 2V o względnej niepewności 1% i rozdzielczości 0,01V. Wylicz rezystancję i niepewność rezystancji jeśli wyniki pomiaru wynoszą: natężenie prądu $I = 10,0mA$, napięcie elektryczne $U = 1,10V$. Niepewność przyrządu cyfrowego wynosi 1% wskazania + 2 razy rozdzielczość (1% rdg+2 digits).
6. W wyniku pomiaru prądu elektrycznego miernikiem analogowym klasy 2% na zakresie 50mA uzyskano następujące wyniki (w mA): 24 16 23 17 22 18. **Wyznacz:** a) wartość średnią, b) estymator odchylenia standardowego (odchylenie standardowe próby), c) estymator odchylenia standardowego wartości średniej, d) niepewność rozszerzoną złożoną (całkowitą) dla poziomu ufności 0,95.