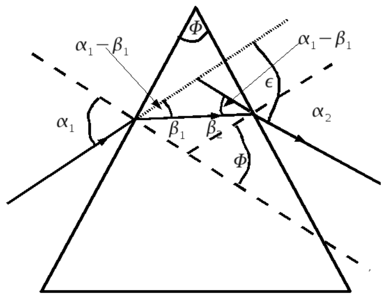
1. ĆWICZENIE 34 WYZNACZANIE DYSPERSJI OPTYCZNEJ PRYZMATU METODĄ POMIARU KĄTA NAJMNIEJSZEGO ODCHYLENIA

Zasady wyznaczania niepewności pomiaru współczynnika załamania.

Pomiar polega na wyznaczeniu kąta załamania wiązki światła o określonym kolorze w warunkach gdy pryzmat tak ustawimy, że kąt załamania jest najmniejszy. Żródłem niepewności są błędy pomiaru kąta łamiącego pryzmatu, kąta załamania oraz błąd ustawienia pryzmatu w pozycji gdy kąt załamania jest minimalny (niepewność ustawienia pryzmatu wyznczamy na podstanie wielkości "obszaru martwy„). Aby wyznaczyć składowe niepewności trzeba wyprowadzić zależność współczynnika załamania od tych trzech zmiennych: kąta łamiącego pryzmatu Φ, kąta załamania ϵ i kąta ustawienia pryzmatu α. Wzór ma opisywać sytuację ogólniejszą niż przypadek gdy α jest minimalne.



Rysunek 1: Bieg promieni w pryzmacie.

Z rysunku widać (dla kątów zewnętrznych trójkątów):

$$\Phi = \beta_1 + \beta_2 \text{ oraz } \epsilon = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \text{ czyli } \Phi = \alpha_1 + \alpha_2 - \epsilon. \tag{1}$$

Współczynnik załamania:

$$n = \frac{sin(\alpha_1)}{sin(\beta_1)} \quad \text{oraz} \quad n = \frac{sin(\alpha_2)}{sin(\beta_2)} \tag{2}$$

W sytuacji gdy kąt załamania jest najmniejszy ($\epsilon = min$) mamy $\alpha_1 = \alpha_2$ (dowód jest w instrukcji do ćwiczenia), ale w rzeczywistości zawsze jest jakaś asymetria. Oznaczymy błąd wyznaczenia wartości minimalnej jako $\Delta\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$, wtedy mamy: $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\Phi + \epsilon) + \Delta\alpha$. Podobnie, jeśli błąd wartości kąta β wynosi $\Delta\beta = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$ to mamy: $\beta_1 = \frac{1}{2}\Phi + \Delta\beta$. Współczynnik załamania w ogólnym przypadku ustawienia pryzmatu można wyliczyć ze wzoru:

$$n(\Phi, \epsilon, \Delta\alpha) = \frac{sin\left(\frac{\Phi+\epsilon}{2} + \Delta\alpha\right)}{sin\left(\frac{\Phi}{2} + \Delta\beta\right)} \tag{3}$$

$\Delta\beta$ można wyliczyć mając $\Delta\alpha$, z równań $n = \frac{sin\alpha_1}{sin\beta_1}$ i $n = \frac{sin\alpha_2}{sin\beta_2}$ mamy $sin\alpha_1 - sin\alpha_2 = n(sin\beta_1 - sin\beta_2)$, jeśli założymy, że kąty α i β są małe (wtedy: $sin\alpha \simeq \alpha$) to:

$$\Delta\beta = \Delta\alpha \frac{1}{n} \frac{cos\left(\frac{\Phi+\epsilon}{2}\right)}{cos\left(\frac{\Phi}{2}\right)} \tag{4}$$

Niepewność można policzyć wyznaczając składowe niepewności związane z poszczególnymi źródłami błędów poprzez wyznaczenie poszczególnych różniczek (ze wzoru na różniczkę zupełną).

Składowa związana z niepewnością $\Delta\Phi$ kąta łamiącego:

$$\Delta_\Phi n = \left|\frac{dn}{d\Phi}\Delta\Phi\right|_{\Delta\alpha=0} = \frac{1}{2}\frac{sin\frac{\epsilon}{2}}{sin^2\frac{\Phi}{2}}\Delta\Phi \tag{5}$$

Składowa związana z niepewnością $\Delta\epsilon$ pomiaru kąta załamania:

$$\Delta_\epsilon n = \left|\frac{dn}{d\epsilon}\right|_{\Delta\alpha=0}\Delta\epsilon = \frac{1}{2}\frac{cos\frac{\Phi+\epsilon}{2}}{sin\frac{\Phi}{2}}\Delta\epsilon \tag{6}$$

Dla składowej $\Delta_\alpha n$ związanej z niepewnością $\Delta\alpha$ ustawienia kąta minimalnego, wartość niepewności ustalamy na podstawie obserwacji obszaru martwego: $\Delta\alpha = \frac{1}{2}$"obszar martwy„. Ponieważ pierwsza pochodna współczynnika załamania względem kąta $\Delta\alpha$ jest równa zeru (taka jest zasada pomiaru metodą najmniejszego kąta) więc do obliczeń niepewności metodą różniczki niezbędne jest wyznaczenie drugiej pochodnej, :

$$\Delta_\alpha n = \left|\frac{dn}{d\alpha}\right|_{\Delta\epsilon=0}\Delta\alpha + \frac{1}{2}\left|\frac{d^2n}{d^2\alpha}\Delta^2\alpha\right|_{\Delta\epsilon=0} = \frac{1}{2}\left|\frac{d^2n}{d^2\alpha}\Delta^2\alpha\right|_{\Delta\epsilon=0} \tag{7}$$

Ponieważ wyrażenie na drugą pochodną jest skomplikowane więc łatwiej jest wyliczyć $\Delta_\alpha n$ jako różnicę wartości dla $\Delta\alpha = 0$ i zaobserwowanego jako promień obszaru martwego $\Delta\alpha$: $\Delta_\alpha n = |n(\Phi, \epsilon, \Delta\alpha) - n(\Phi, \epsilon, \Delta\alpha = 0)|$

Podkreślmy, że niepewności $\Delta\epsilon$ i $\Delta\Phi$ są ok. kilku minut a $\Delta\alpha$ ok. pół stopnia, ale wkład do całkowitej niepewności składowej związanej z błędem ustawienia pryzmatu może być mniejszy od pozostałych składników.

Całkowita niepewność:

$$u(n) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\Delta_\alpha n)^2 + (\Delta_\epsilon n)^2 + (\Delta_\Phi n)^2} \tag{8}$$

Zadania:

1. Udowodnij, że z warunku $\frac{dn}{d\alpha} = 0$ wynika $n = \frac{sin\left(\frac{\Phi+\epsilon}{2}\right)}{sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$.
2. Wyprowadź wzory 6 i 5.