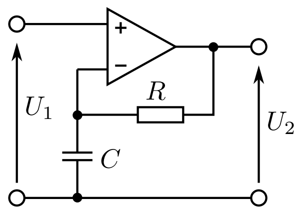
Rozwiązania zadań z kol. 3 z 8 stycznia 2015 r.

Michał Urbański, Daniel Kowalski

1. Wyznacz zależność wzmocnienia napięciowego od częstotliwości układu z rys 1. Załóż, że charakterystyka częstotliwościowa wzmacniacza opisana jest równaniem

$$A(f) = \frac{A_0}{1 + j\frac{f}{f_g}} \tag{1}$$

gdzie $f_g = 10$ Hz. Dane są: $A_0 = 10^6$, $R = 1\text{M}\Omega$, $C = \frac{1}{2\pi}\mu\text{F}$. Wykonaj obliczenia i narysuj zależność modułu wzmocnienia od częstotliwości w skali logarytmicznej. Wzmocnienie napięciowe definiujemy jako $K_u = \frac{U_2}{U_1}$.



Rysunek 1. Układ do zadania 2

W rozwiązaniu przdestawimy rowania w funkcji częstości $\omega = 2\Pi f$, wtedy równanie opisujące wzmacniacz operacyjny zapiszemy w postaci:

$$A(f) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} \tag{2}$$

Zaczynamy od równania na napięcie wyjściowe wzmacniacza operacyjnego w zależności od różnicy napięć wejściowych

$$U_2 = A(U_+ - U_-) \tag{3}$$

gdzie U_+ i U_- są napięciami na wejściach odpowiednio nieodwracającym i odwracającym i wynoszą (przez Z oznaczamy impedancję kondensatora $Z = \frac{1}{j\omega C}$):

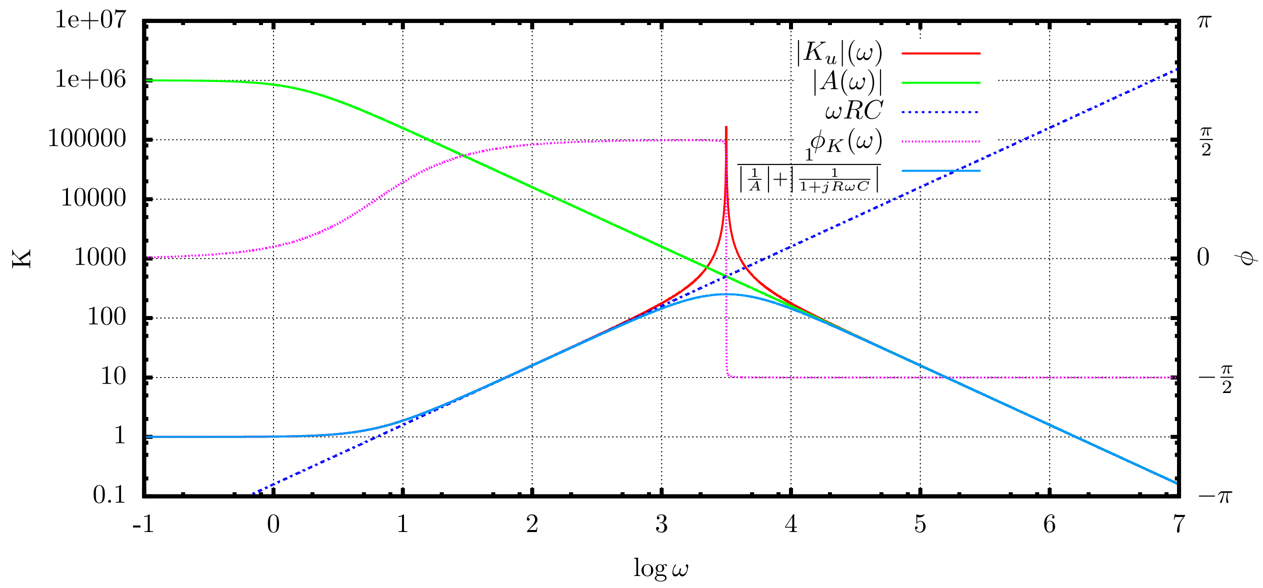
$$U_+ = U_1 \tag{4}$$

$$U_- = U_2 \frac{Z}{Z + R} \tag{5}$$

Po wstawieniu powyższych równań do 3:

$$U_2 = A\left(U_1 - U_2\frac{Z}{Z+R}\right) \tag{6}$$

$$U_2\left(1 - \frac{AZ}{Z+R}\right) = AU_1 \tag{7}$$



Rysunek 2. Wykres zależności modułu i fazy transmitancji. Linia czerwona - zależności modułu $|K(\omega)|$ zgodnie z dokładnym wzorem (10), linia zielona - $|A(\omega)|$ ze wzoru (11), linia przerywana niebieska - charakterystyka sprzężenia zwrotnego w równaniu (14) - przypadek środkowy, linia niebieska ciągła - równanie (15), dla trzech przypadków, rysunek uzyskano wykreślając wzór (12). Faza narysowana jest linią przerywaną, podziałka wykresu fazy jest na prawej osi. Dla częstości ω_1, dla której obserwujemy maksimum transmitancji, występuje skok fazy z $\Pi/2$ na $-\Pi/2$.

Wzmocnienie wyliczamy jako stosunek napięć U_2 i U_1:

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{A}{1 + \frac{AZ}{Z+R}} \tag{8}$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez A:

$$K(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{Z}{Z+R}} \tag{9}$$

$$K(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}+R}} = \frac{1}{\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}{A_0} + \frac{1}{1+j\omega RC}}$$

$$K(\omega) = \frac{1}{\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}{A_0} + \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}} \tag{10}$$

Mianownik ostatniego równania składa się z 2 członów $\frac{1}{A}$ i $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$, gdzie $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ jest częstością charakterystyczną dla filtru RC. Człon pierwszy $\frac{1}{A}$ będzie dominować w zakresie wysokich częstotliwości, gdy wzmocnienie wzmacniacza operacyjnego A przestaje być duże, natomiast drugi człon – w zakresie niższych częstotliwości.

Powyżej częstości granicznej ω_g moduł wzmocnienia wzmacniacza $|A|$ można przybliżyć jako $\frac{A_0\omega_g}{\omega}$

$$|A| = \left|\frac{A_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}\right| = \begin{cases} A_0 & \text{dla } \omega \ll \omega_g \\ \frac{A_0\omega_g}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_g \end{cases} \tag{11}$$

Jedynkę w mianowniku drugiego członu można zaniedbać gdy $\omega RC \gg 1$, czyli gdy $\omega \gg \frac{1}{RC} = \omega_0$.

Przejście między członami następuje przy częstości ω_1 dla której ich moduły są równe, więc:

$$\omega_1 RC = \frac{A_0\omega_g}{\omega_1} \tag{12}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A_0\omega_g}{RC}} = \sqrt{10^7}\frac{1}{s} = 10^{3,5}\frac{1}{s} = 3,16\ 10^3\frac{1}{s} \tag{13}$$

Poniżej częstości ω_0 pierwszy człon jest mały, drugi jest z dobrym przybliżeniem równy 1, pomiędzy ω_0 a ω_1 drugi człon dominuje i otrzymujemy $K_u = \omega RC$, natomiast powyżej ω_1 wzmocnienie równe jest $A = \frac{A_0\omega_g}{\omega}$

$$|K| = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 = \frac{1}{RC} \\ \omega RC & \text{dla } \omega_0 \ll \omega \ll \omega_1 = \sqrt{\frac{A_0\omega_g}{\omega}} \\ \frac{A_0\omega_g}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_1 \end{cases} \tag{14}$$

Jeśli pominąć efekt gwałtownej zmiany fazy dla $\omega = \omega_1$ równanie (14) można przybliżyć równaniem:

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\left|\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}{A_0}\right| + \left|\frac{1}{1+j\omega RC}\right|} \tag{15}$$

Jeśli zbadać zachowanie się równania (10) dla $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{A_0\omega_g}{\omega}}$ to okazuje się, że pojawia się pik w ω_1 o wysokości zależnej od proporcji częstości ω_0 i ω_1. Z równania (10):

$$K(\omega) = A_0\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_g}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)+A_0} =$$

$$A_0\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}{A_0+1-\frac{\omega^2}{\omega_0\omega_g}+j\left(\frac{\omega}{\omega_g}+\frac{\omega}{\omega_0}\right)} =$$

$$= A_0\frac{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(A_0+1-\frac{\omega^2}{\omega_0\omega_g}-j\left(\frac{\omega}{\omega_g}+\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)}{\left(A_0+1-\frac{\omega^2}{\omega_0\omega_g}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_g}+\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{16}$$

Po podstawieniu ω_1, które spełnia równanie $A_0 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0\omega_g}$, A_0 skraca się z $\frac{\omega_1^2}{\omega_0\omega_g}$, pomijamy w mianowniku i liczniku jedynkę ($1 \ll \frac{\omega_1}{\omega_g} + \frac{\omega_1}{\omega_0}$) i otrzymujemy:

$$K(\omega_1) = -jA_0\frac{\left(1+j\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)\left(\frac{\omega_1}{\omega_g}+\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_g}+\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} \tag{17}$$

ponieważ $1 \ll \frac{\omega_1}{\omega_g}$ i $1 \ll \frac{\omega_1}{\omega_0}$, otrzymujemy:

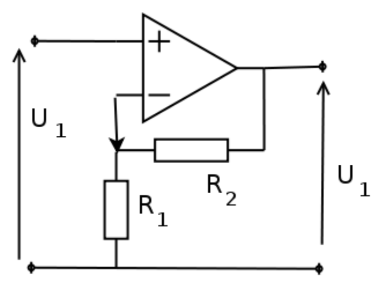
$$|K(\omega_1)| \simeq \frac{A_0}{1+\frac{\omega_0}{\omega_g}} \tag{18}$$

Równanie (18) jest równaniem przybliżonym przy założeniu, że $\omega_1 \gg \omega_0, \omega_g$. Dla danych $\omega_0 = 2\Pi\frac{1}{s}$ oraz $\omega_g = 20\Pi\frac{1}{s}$, mamy więc:

$$|K(\omega_1)| \simeq \frac{A_0}{1+\frac{2\Pi}{20\Pi}}\frac{A_0}{1+0,1} \simeq 0,9A_0 = 9\ 10^5 \tag{19}$$

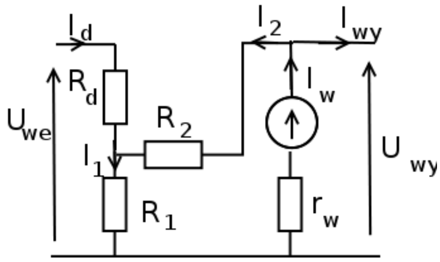
Wartość K dla częstości ω_1 przedstawiona jest na rys 2.

2. Wyznacz rezystancję wyjściową dla małych sygnałów, układu zakładając, że wzmocnienie wzmacniacza operacyjnego wynosi $A = 10^5$, rezystancja pomiędzy wejściami $R_d = 105k\Omega$, rezystancja wyjściowa $\frac{1}{h_{22}} = 1k\Omega$. Dane są rezystory $R_1 = 1k\Omega$ i $R_2 = 100k\Omega$.



Rysunek 3. Wzmacniacz niedwracający fazy

Schemat zastępczy wzmacniacza ma postać źródła napięciowego sterowanego napięciowo. Rezystancja źródła napięciowego wynosi $r_w = \frac{1}{h_{22}}$.



Rysunek 4. Schemat zastępczy wzmacniacza z rys.3. Zaznaczono prąd wejściowy I_d, który wynosi w praktyce zero ponieważ rezystancja wejściowa wzmacniacza R_d jest bardzo duża (w porównaniu do pozostałych rezystancji), jednak napięcie na rezystancji wejściowej wzmacniacza R_d wynosi U_d i musi być uwzględnione w równaniach

Równania Kirchhoffa składają się z bilansu natężeń prądów i napięć. Bilans prądów ma postać:

$$I_2 = I_1 + I_d \tag{20}$$

$$I_w = I_2 + I_{wy} \tag{21}$$

Ponieważ R_d jest bardzo duże w porównaniu do R_1 więc $I_D = 0$ i $I_1 = I_2$. Równania bilansu napięć:

$$U_{we} = U_d + I_1 + R_1 \tag{22}$$

$$AU_d = I_1(R_1 + R_2) + I_w r_w \tag{23}$$

$$U_{wy} = (R_1 + R_2)I_1 \tag{24}$$

Ostatnie równanie można zapisać w postaci $U_{wy} = AU_d - r_w I_w$ ale postać (24) jest wygodniejsza do dalszych obliczeń.

Celem przekształceń jest uzyskanie równania o postaci:

$$U_{wy} = K_U U_{we} - I_{wy} R_{wy} \tag{25}$$

Z równania (23) wyznaczamy $U_d = U_{we} - I_1 R_1$. Do równania (23) wstawiamy U_d i I_w (z równania (21)):

$$A(U_{we} - I_1 R_1) = I_1(R_1 + R_2 + r_w) + I_{wy} r_w \tag{26}$$

z powyższego równania wyznaczamy I_1:

$$I_1 = \frac{AU_{we}}{R_1 + R_2 + r_w + AR_1} - \frac{r_w I_{wy}}{R_1 + R_2 + r_w + AR_1}$$

Wstawiamy to do (24):

$$U_{wy} = \frac{A(R_1 + R_2)U_{we}}{R_1 + R_2 + r_w + AR_1} - \frac{r_w(R_1 + R_2)I_{wy}}{R_1 + R_2 + r_w + AR_1}$$

Ponieważ w mianowniku czynnik AR_1 jest dużo większy od pozostałych więc mamy:

$$U_{wy} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{we} - \frac{R_1 + R_2}{AR_1} r_w I_{wy} \tag{27}$$

Tak więc porównując z (25) rezystancja wyjściowa wynosi

$$R_{wy} = \frac{R_1 + R_2}{AR_1} r_w = r_w \frac{K_U}{A} \tag{28}$$

gdzie zgodnie z (27) $K_U = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$.

Podstawiając dane mamy:

$$R_{wy} = \frac{1k\Omega + 100k\Omega}{10^5 k\Omega} 1k\Omega = 1,01\Omega \simeq 1k\Omega \tag{29}$$