

Rozwiązania zadań z kol.3 pop.

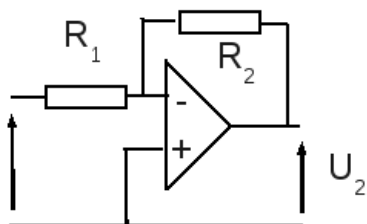
Michał Urbański

UWAGA,

W przypadku znalezienia błędów proszę o maila.

Zadanie 1.

Wyznacz wzmocnienie napięciowe układu jak na rys.1 dla małych częstotliwości. Dane są rezystory $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 1000k\Omega$ oraz wzmocnienie wzmacniacza operacyjnego w otwartej pętli $A_0 = 10^5$.



Należy wyprowadzić wzór na wzmocnienie wzmacniacza dla dowolnego wzmocnienia w otwartej pętli A_0 , a następnie pokazać, że wzór przybliżony jest taki jak dla A_0 nieskończonego.

Ponieważ prąd wejściowy wzmacniacza jest zero więc $I_1 = -I_2$, wobec tego:

$$\frac{U_1 - U_-}{R_1} = \frac{U_- - U_2}{R_2} \quad (1)$$

Ponieważ $U_+ = 0$ więc $U_- = -\frac{U_2}{A_0}$. Po podstawieniu tego do (1) mamy: $\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{A_0 R_1} = -\frac{U_2}{A_0 R_2} - \frac{U_2}{R_2}$ a z tego otrzymujemy:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{A_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_2}{A_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

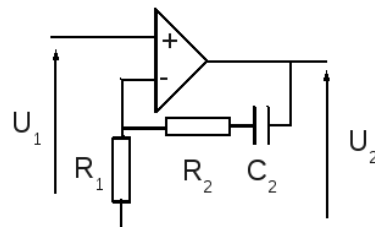
Jeśli $\frac{R_2}{A_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \ll 1$ to: wzmocnienie wynosi $K_U = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1}$.

Po podstawieniu danych $K_U = -1000$ oraz sprawdzamy czy nierówność powyższa jest spełniona:

$$\frac{R_2}{A_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1000k\Omega}{10^5} \left(\frac{1}{1k\Omega} + \frac{1}{1000k\Omega} \right) \approx \frac{1000k\Omega}{10^5} \left(\frac{1}{1k\Omega} \right) = 10^{-2} \ll 1$$

Zadanie 2. Wyznacz charakterystykę częstotliwościową (zależność wzmocnienia od częstotliwości) układu z rys.2. Wykonaj obliczenia dla wzmacniacza opisanego równaniem: $A(f) = \frac{A_0}{1 + j\frac{f}{f_0}}$. Wykonaj wykres w skali logarytmicznej dla danych: $A_0 = 10^6$,

$f_g = 10Hz$, $R_1 = 10k\Omega$, $R_2 = 1000k\Omega$, $C = \frac{1}{2\pi}nF$. Wyznacz maksymalną wartość wzmocnienia.



Oznaczmy szeregowe połączenie R_2 i C jako $Z_2 = R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}$, ponadto napięcie wejściowe $U_1 = U_+$. Wykorzystując dzielnik Z_2 i R_1 mamy: $U_- = U_2 \frac{R_1}{R_1 + Z_2}$.

Ponieważ $U_2 = A(\omega)(U_1 - U_-)$ więc:

$$\frac{U_2}{A(\omega)} = U_1 - U_2 \frac{R_1}{R_1 + Z_2}$$

Tak więc wzmocnienie napięciowe wynosi:

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\frac{1}{A(\omega)} + \frac{R_1}{R_1 + Z_2}}$$

wzór ten celowo nie został przekształcony do postaci ułamków niepiętyrowych ponieważ w tej postaci widać konieczność rozpatrzenia dwóch zakresów: gdy dominuje w mianowniku człon $\frac{1}{A(\omega)}$ i gdy dominuje człon

$\frac{R_1}{R_1 + Z_2}$. Mamy więc:

$$K_U = \begin{cases} A(\omega) & \text{dla } \frac{1}{A(\omega)} \gg \frac{R_1}{R_1 + Z_2} \\ \frac{R_1 + Z_2}{R_1} & \text{dla } \frac{1}{A(\omega)} \ll \frac{R_1}{R_1 + Z_2} \end{cases} \quad (2)$$

Warunek

$$\frac{1}{A(\omega)} \gg \frac{R_1}{R_1 + Z_2} \quad (3)$$

oznacza, że wzmocnienie opisane równaniem $\frac{R_1 + Z_2}{R_1}$ musi leżeć pod polem wzmocnienia opisanym $A(\omega)$. Warunek ten jest spełniony dla dużych małych częstotliwości (wyniknie z dalszych obliczeń).

Wzmocnienie $\frac{R_1 + Z_2}{R_1} = \frac{R_1 + Z}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{j\omega R_1 C_2}$ opisane w drugiej części równania opisuje wzmacniacz nazywany idealnym (gdy $A(\omega)$ jest bardzo duże). Ponieważ $Z_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C_2}$ ma części rzeczywistą i urojoną zależną od częstotliwości więc ta część wzmocnienia też musi być podzielona na dwa obszary:

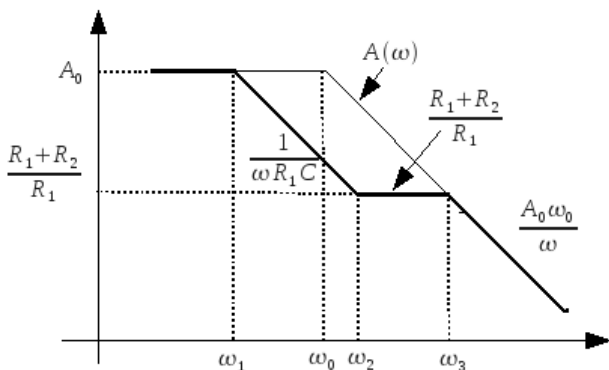
$$K_U = \begin{cases} \frac{R_1 + R_2}{R_1} & \text{dla } R_2 + R_1 \gg \frac{1}{\omega C_2} \\ \frac{1}{j\omega R_1 C_2} & \text{dla } R_2 + R_1 \ll \frac{1}{\omega C_2} \end{cases} \quad (4)$$

Częstość dla której zachodzi równość $R_2 = \frac{1}{\omega C_2}$ wynosi $\omega_2 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C_2}$, dla częstości $\omega \ll \omega_2$ wzmocnienie jest odwrotnie proporcjonalne do częstości: $K_U = \frac{1}{j\omega R_1 C_2}$, natomiast dla $\omega \gg \omega_2$ wzmocnienie jest stałe i wynosi $\frac{R_1 + R_2}{R_1}$. Częstotliwość f_2 rozgraniczająca oba obszary wynosi $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 1000\text{Hz}$. Oczywiście od strony niskich i wysokich częstotliwości zależność wzmocnienia od częstotliwości ograniczone są warunkiem (3). Miejsca przecięcia wzmocnienia opisanego wzorem (4) ze wzmocnieniem $A(\omega)$ wyznaczają obszar, w którym obowiązuje wzór (4). Równanie $\frac{R_1 + Z_2}{R_1} = A(\omega)$ zapiszemy w dwóch przypadkach, ponieważ $A(\omega)$ ma postać:

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ \frac{A_0 \omega_0}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_0 \end{cases} \quad (5)$$

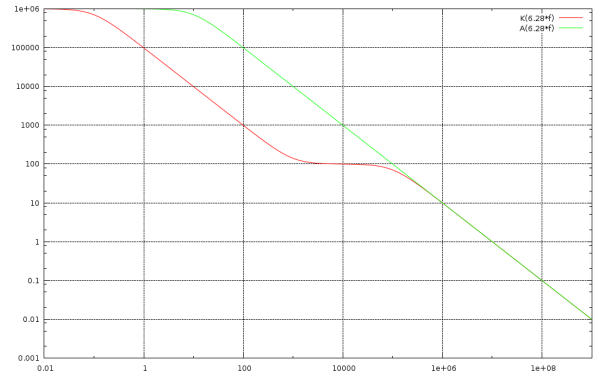
więc dla niskich częstości mamy: $\frac{1}{\omega_1 R_1 C_2} = A_0$ i z tego mamy $\omega_1 = \frac{1}{A_0 R_1 C_2} = 2\pi \cdot 0,1\text{Hz}$, czyli $f_1 = 0,1\text{Hz}$. Dla dużych częstości mamy $\frac{A_0 \omega_0}{\omega_3} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$, na tej podstawie $\omega_3 = A_0 \omega_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ czyli $f_3 = A_0 f_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10^5\text{Hz}$. Czyli częstotliwości większych od f_3 o wzmocnieniu decyduje charakterystyka wzmacniacza operacyjnego.

Schematyczny wykres poszczególnych odcinków przedstawiony jest poniżej (w skali logarytmicznej)



Maksymalne wzmocnienie mamy dla niskich częstotliwości i wynosi A_0 .

Wyniki obliczeń wg wzoru ogólnego wykreślone programem gnuplot przedstawione są poniżej.



Zadanie 3.

Udowodnij, że rezystancja wejściowa układu z zadania 1 wynosi w przybliżeniu R_1 . Wyprowadź dokładny wzór zakładając, że wzmocnienie wzmacniacza operacyjnego wynosi $A = 10^5$, a rezystancja pomiędzy wejściami + i - wynosi $R_d = 10^6 \Omega$. Wypisz równania Kirchoffa i podaj sposób wyprowadzenia wzoru na rezystancję wejściową.

Zadanie to jest rozwiązane w pliku „Rezystancja wejściowa wzmacniacza operacyjnego”.

Jeśli pominiemy rezystancję wyjściową to rozwiązanie jest krótkie.

Z praw Kirchoffa (rys do zadania 1.):

$$U_1 = I_1 R_1 + U_d = I_1 R_1 + I_d R_d \quad (6)$$

$$U_2 = I_2 R_2 + U_d \quad (7)$$

$$I_d = I_1 + I_2 \quad (8)$$

$$U_2 = -A U_d = -A I_d R_d \quad (9)$$

gdzie U_d jest napięciem pomiędzy wejściem - a wejściem +, R_d jest rezystancją wejścia wzmacniacza operacyjnego. Z pierwszego z tych równań (z (6)):

$$R_{wej} = \frac{U_1}{I_1} = R_1 + \frac{I_d}{I_1} R_d \quad (10)$$

z pozostałych równań wyznaczamy stosunek $\frac{I_d}{I_1}$. Wstawiamy do równania (7) pozostałe równania:

$$-A I_d R_d = (I_d - I_1) R_d + I_d R_d \quad (11)$$

z czego mamy:

$$\frac{I_d}{I_1} = \frac{R_2}{R_d(1 + A) + R_2} \quad (12)$$

czyli:

$$\frac{U_1}{I_1} = R_1 + \frac{R_2}{R_d(1 + A) + R_2} R_d \approx R_1 + \frac{R_2}{1 + A} \quad (13)$$

Uwaga. Ponieważ $U_d + I_2 R_2 = -A U_d$ tak więc

$U_d = -\frac{I_2 R_2}{1 + A} \ll I_1 R_1$ co oznacza, że we wzorze (10) dominuje człon R_1 .