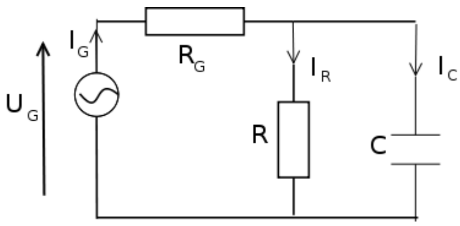
Rozwiązania zadań z kol.2 z 2014r

Zadanie 1. Układ równoległy RC podłączono do generatora. Różnica faz pomiędzy prądem I_G generatora a prądem w rezystorze I_R wynosi $\Phi = \Pi/6$ ($\mathrm{tg}(\Pi/6) = 1/\sqrt{3}$, $\sin(\Pi/6) = 1/2$) pojemność kondensatora wynosi $C = 10$ nF, rezystancja wewnętrzna generatora $R_G = 100\Omega$. Częstotliwość generatora wynosi $f = \frac{10}{2\Pi} kHz$ a prąd rezystora wynosi $(I_R)_{RMS} = 1mA$. Oblicz: wartość rezystora R, wartość skuteczną prądu generatora $(I_G)_{RMS}$ i napięcia na generatorze $(U_G)_{RMS}$



Z danych zadania obliczmy częstość $\omega = 2\Pi f = 10^4 \frac{1}{s}$, natomiast pojemność kondensatora $C = 10^{-8}F$.

Prądy I i napięcia U opisujemy liczbami zespolonymi. Moduł liczby zespolonej opisuje amplitudę sygnału, wartość skuteczna równa jest wartości amplitudy podzielonej przez $\sqrt{2}$, tak więc wartość skuteczna prądu rezystora R opisana jest równaniem:

$$(I_R)_{RMS} = \frac{|I_R|}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

Gdzie $|I_R|$ jest modułem prądu I_R, czyli jest to amplitudą prądu I_R. Amplituda prądu rezystora R wynosi więc $|I_R| = \sqrt{2}(I_R)_{RMS}$. Trzeba tu pamiętać, że prąd zespolony $I = |I|e^{j\Phi}$ jest symbolicznym zapisem sygnału $i(t) = |I|\cos(\omega t + \Phi)$.

Równania Kirchhoffa zapisane dla prądów i napięć opisanych liczbami zespolonymi. Dodawanie liczb zespolonych nie może być zastąpione dodawaniem liczb rzeczywistych, bowiem liczba zespolona ma amplitudę (długość) i fazę (kąt kierunkowy na płaszczyźnie zespolonej).

Prąd generatora I_G rozpływa się na dwa prądy (połączenie równolegle rezystora i kondensatora): prąd rezystora I_R i prąd pojemności I_C:

$$I_G = I_R + I_C \tag{2}$$

gdzie:

$$I_R = \frac{U_R}{R} \text{ i } I_C = j\omega C U_C = j\omega C U_R \tag{3}$$

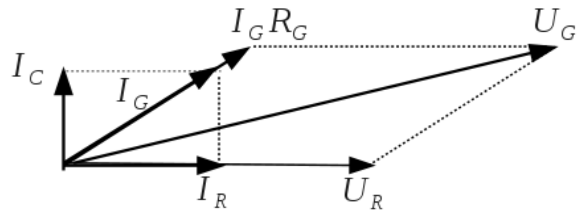
w tym wzorze uwzględniono, że $U_C = U_R$.

Prądy I_R i I_C są przesunięte w fazie o kąt $\Pi/2$, czyli są prostopadłe.

Napięcie generatora równe jest sumie napięć:

$$U_G = I_G R_G + I_R R = I_G R_G + U_R \tag{4}$$

Dodawanie prądów i napięć geometrycznie reprezentuje wykres wskazowy przedstawiony na rysunku 1.



Rysunek 1: Wykres wskazowy reprezentujący dodawanie napięć i prądów. Prąd generatora I_G (wzór (2)) równy jest sumie prądu rezystancji I_R i kondensatora I_C, te dwa prądy są reprezentowane przez prostopadłe wskazy ponieważ przesunięcie fazowe pomiędzy tymi prądami wynosi $\Pi/2$ (wzór (3).

Ponieważ prąd kondensatora I_C jest prostopadły do prądu rezystora I_R a kąt pomiędzy prądem generatora $I_G = I_R + I_G$ (równanie (2)) wynosi Φ więc amplituda prądu kondensatora równa się:

$$|I_C| = |I_R|\,\mathrm{tg}(\Phi) \tag{5}$$

Zgodnie z równaniem (1) amplituda prądu rezystora wynosi $|I_R| = \sqrt{2}mA$, wobec tego $|I_C| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}mA$.

Napięcie na kondensatorze wynosi $U_C = \frac{I_C}{j\omega C}$, moduł tego napięcia wyniesie $|U_C| = \frac{|I_C|}{\omega C}$. Podstawiając wartości liczbowe: $|U_C| = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\omega C} = \sqrt{\frac{2}{3}}10^4 V$, dla wartości skutecznej mamy $(U_C)_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{3}}10^4 = 577V$.

Rezystancja wynosi:

$$R = \frac{|U_R|}{|I_R|} = \frac{|U_C|}{|I_R|} = \frac{|I_C|}{\omega C}\frac{1}{|I_R|} = \mathrm{tg}(\Phi)\frac{1}{\omega C} = \\ = \frac{10^4}{\sqrt{3}}\Omega = 5773\Omega$$

Prąd generatora jest sumą prądów rezystora i kondensatora (równanie (2)) i może być wyliczony z twierdzenia Pitagorasa $|I_G| = \sqrt{|I_R|^2 + |I_C|^2}$ lub z trójkąta: $|I_G| = \frac{|I_G|}{\cos(\Phi)}$. Dla wartości skutecznej mamy: $(I_G)_{RMS} = \frac{(I_G)_{RMS}}{\sqrt{3}} = 1,15mA$

W celu wyznaczenia wartości napięcia generatora U_G opisanego równaniem (4) musimy wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną tego napięcia.

$Re(U_G) = Re(I_G R_G + U_R) = Re(I_G R_G) + Re(U_R) = R_G Re(I_G) + Re(U_R)$, ponieważ $Re(I_G) = |I_R|$ i $Re(U_R) = |U_R|$ mamy: $Re(U_G) = R_G |I_R| + R|I_R| = |I_R|(R_G + \frac{\text{tg}(\Phi)}{\omega C}$.

Część urojona napięcia U_G:

$Im(U_G) = Im(I_G R_G + U_R) = Im(I_G R_G) + Im(U_R) = R_G Im(I_G) + Im(U_R)$, ponieważ $Im(I_G) = |I_C|$ i $Im(U_R) = 0$ mamy: $Im(U_G) = R_G |I_C| = |I_R| \,\text{tg}(\Phi) R_G$.

Czyli mamy:

$$|U_G| = \sqrt{(Re(U_G))^2 + (Im(U_G))^2} = \sqrt{\left(|I_R|\left(R_G + \frac{\text{tg}(\Phi)}{\omega C}\right)\right)^2 + (|I_R|\,\text{tg}(\Phi) R_G)^2} = |I_R|\sqrt{\left(R_G + \frac{\text{tg}(\Phi)}{\omega C}\right)^2 + (\text{tg}(\Phi) R_G)^2} \quad (6)$$

Dla wartości skutecznej:

$$(U_G)_{RMS} = (I_R)_{RMS}\sqrt{\left(R_G + \frac{\text{tg}(\Phi)}{\omega C}\right)^2 + (\text{tg}(\Phi) R_G)^2}$$

Po podstawieniu danych można zauważyć, że $R_G \ll \frac{\text{tg}(\Phi)}{\omega C}$ i mamy przybliżony wynik:

$(U_G)_{RMS} = (I_R)_{RMS} \frac{\text{tg}(\Phi)}{\omega C} = \frac{10^4}{\sqrt{3}} mA$

Równanie to można wyprowadzić czysto algebraicznie na liczbach zespolonych.

Zgodnie z prawami Kirchhoffa dla obwodu z rys. (równanie (4)

$$U_G = I_G R_G + I_R U_R \quad (7)$$

$$I_R = \frac{1}{j\omega C} I_C \text{ czyli } I_C = I_R (j\omega C) R \quad (8)$$

$$I_G = I_C + I_R \quad (9)$$

Po wstawieniu równania (8) i (9) do (7) mamy:

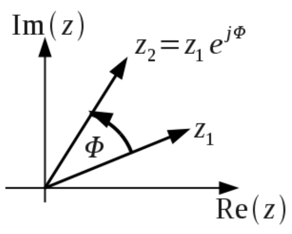
$$U_G = I_R (R_G + R + j\omega C R R_G) \quad (10)$$

Zapiszemy prąd generatora (9) w postaci:

$$I_G = I_R + j\omega C R I_R = I_R(1 + j\omega C R) = = I_R \sqrt{1 + (\omega C R)^2} e^{j\Phi} \quad (11)$$

Kąt pomiędzy prądem I_R i I_G jest fazą czynnika $(1 + j\omega C R)$, czyli tangens kąta Φ równy jest:

$$\text{tg}(\Phi) = \frac{Im(1 + j\omega C R)}{Re(1 + j\omega C R)} = \omega C R \quad (12)$$



Rysunek 2: Obrót liczby zestoponej z_1 o kąt Φ

Uwaga 1 Równanie (11) **ma postać** $z_1 = z_2 e^{j\Phi}$**, mnożenie przez czynnik** $e^{j\Phi}$ **daje obrót liczby zespolonej** z_2 **o kąt** Φ**, czyli pomiędzy liczbami zespolonymi** z_1 **i** z_2 **jest kąt** Φ **(patrz rys 2).**

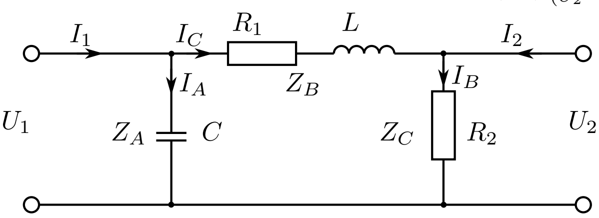
Po podstawieniu (12) do (10) otrzymujemy równanie:

$$U_G = I_R\left(R_G + \frac{\text{tg}\,\Phi}{\omega C} + j\,\text{tg}(\Phi) R_G\right) \quad (13)$$

Moduł (wartość bezwzględna) napięcia U_C (liczby zespolonej U_C) daje równanie (6).

Zadanie 2.

Wyznacz parametry macierzy h układu. Narysuj zależność od częstotliwości wartości bezwzględnej i fazy transmitancji $Z(f) = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{(I_2=0)}$. Dane są $R_1 = 200\Omega, R_2 = 800\Omega, C = 10nF, L = 10mH$. Zapisz równania wynikające z praw Kirchhoffa oraz wylicz elementy macierzy h korzystając z równań typu $h_{11} = \left(\frac{U_1}{I_1}\right)_{(U_2=0)}$



Impedancje w poszczególnych gałęziach można zapisać jako:

$$Z_C = R_1 + j\omega L, \quad Z_B = R_2, \quad Z_A = \frac{1}{j\omega C}$$

Równania z praw Kirchhoffa (Pierwsze dwa na rozpływ prądów, pozostałe trzy typu prąd w danej gałęzi = spadek napięcia podzielony przez impedancję). Po przekształceniu otrzymujemy równania na prądy I_1, I_2:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_C + I_A \\ I_2 &= I_B - I_C \\ I_A &= \frac{U_1}{Z_A} \\ I_B &= \frac{U_2}{Z_B} \\ I_C &= \frac{U_1 - U_2}{Z_C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{Z_A} + \frac{U_1 - U_2}{Z_C} \\ I_2 &= \frac{U_2}{Z_B} - \frac{U_1 - U_2}{Z_C} \end{aligned}\right\}$$

Metoda1:
przekształcić układ równań do postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Zaczynamy od równań na prądy zapisanych wcześniej.

$$\begin{cases} I_2 = U_2\left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}\right) - \frac{U_1}{Z_C} \\ I_1 = U_1\left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_C}\right) - \frac{U_2}{Z_C} \end{cases}$$

Przekształcamy równania tak aby wyciągnąć U_1, I_2 na lewą stronę.

$$U_1 = \frac{I_1}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_C}} + U_2 \frac{\frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_C}}$$

$$I_2 = U_2 \left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \right) - I_1 \frac{\frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_C}} - \frac{1}{Z_C} \frac{\frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_C}} U_2$$

$$I_2 = -I_1 \frac{\frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_C}} + U_2 \left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} - \frac{\frac{1}{Z_C^2}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_C}} \right)$$

$$I_2 = -I_1 \frac{Z_A}{Z_A + Z_C} + U_2 \left(\frac{Z_B + Z_C}{Z_A Z_C} - \frac{\frac{Z_A}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_C}} \right)$$

$$I_2 = -I_1 \frac{Z_A}{Z_A + Z_C} + U_2 \frac{(Z_A + Z_C)(Z_A + Z_C) - Z_A Z_B}{Z_B Z_C (Z_A + Z_C)}$$

$$I_2 = -I_1 \frac{Z_A}{Z_A + Z_C} + U_2 \frac{Z_A Z_C + Z_C Z_B + Z_C^2}{Z_B Z_C (Z_A + Z_C)}$$

$$I_2 = -I_1 \frac{Z_A}{Z_A + Z_C} + U_2 \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{Z_B (Z_A + Z_C)}$$

$$U_1 = I_1 \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_C} + U_2 \frac{Z_A}{Z_A + Z_C}$$

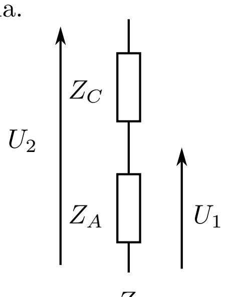
Gdy równania mają właściwą postać spisujemy współczynniki:

$$h = \begin{bmatrix} \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_C} & \frac{Z_A}{Z_A + Z_C} \\ -\frac{Z_A}{Z_A + Z_C} & \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{Z_B (Z_A + Z_C)} \end{bmatrix}$$

Metoda 2: Użyć równań typu $h_{11} = \left(\frac{U_1}{I_1}\right)_{U_2=0}$ Liczymy h_{11} przy założeniu że $U_2 = 0$, czyli przy zwartym Z_B. h_{11} jest wtedy impedancją zastępczą obwodu widzianą z zacisków wejściowych, która jest równa równoległemu połączeniu Z_A i Z_C.

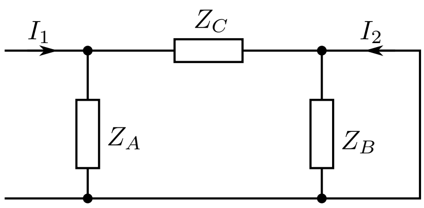
$$h_{11} = \left(\frac{U_1}{I_1}\right)_{U_2=0} = Z_A || Z_C = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_C}$$

Obliczając h_{12} zakładamy $I_1 = 0$ (brak prądu wejściowego), co oznacza że przez Z_A i Z_C płynie taki sam prąd. Impedancje Z_A i Z_C tworzą wtedy dzielnik napięcia.



$$U_1 = U_2 \frac{Z_A}{Z_A + Z_C} \quad \Rightarrow \quad h_{12} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)_{I_1=0} = \frac{Z_A}{Z_A + Z_C}$$

Obliczamy h_{21} zakładając $U_2 = 0$, czyli zwarte Z_B



Wtedy Z_A oraz Z_C tworzą dzielnik prądu (z punktu widzenia zacisków wejściowych)

$$I_2 = I_1 \frac{-Z_A}{Z_A + Z_C} \quad \Rightarrow \quad h_{21} = \left(\frac{I_2}{U_1}\right)_{U_2=0} = \frac{-Z_A}{Z_A + Z_C}$$

Prąd I_2 zapisujemy z przeciwnym znakiem dlatego, że płynie w odwrotnym kierunku niż został zastrzałkowany.

h_{22} jest odwrotnością impedancji zastępczej widzianej z zacisków wyjściowych, przy braku prądu wejściowego $I_1 = 0$ (Prąd płynący przez Z_A i Z_C jest taki sam), czyli:

$$h_{22} = \left(\frac{I_2}{U_2}\right)_{I_1=0} = \frac{1}{Z_B || (Z_A + Z_C)} = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{Z_B (Z_A + Z_C)}$$

Transmitancja Transmitancję liczymy jako stosunek napięcia wyjściowego do wejściowego przy braku obciążenia na wyjściu ($I_2 = 0$).

$$K_u = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0}$$

Założenie $I_2 = 0$ powoduje, że prąd płynący przez Z_B i Z_C jest taki sam i tworzą one dzielnik napięcia:

$$K_u = \frac{Z_C}{Z_C + Z_B} = \frac{R_2}{R_2 + R_1 + j\omega L} = \frac{\frac{R_2}{R_2 + R_1}}{1 + j\frac{\omega}{\frac{R_2 + R_1}{L}}}$$

Z powyższego wzoru wynika, że transmitancja ma postać funkcji jednobiegunowej z biegunem w częstości $\omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{L}$, natomiast płaska część funkcji (dla małych częsości) jest na poziomie $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

$$K_u = \begin{cases} \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ \frac{R_2}{j\omega L} & \text{dla } \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

Przesunięcie fazowe ma postać $\phi(\omega) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Im(K_u)}{Re(K_u)}\right)$. Dla małych ω, K_u jest rzeczywiste, dla dużych ω, K_u jest urojone więc przesunięcie fazowe wynosi odpowiednio 0 i $-\frac{\pi}{2}$. Dla pośrednich częstości wykres ma kształt funkcji arcus tangens (zgodnie ze wzorem).

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ \frac{-\pi}{4} & \text{dla } \omega = \omega_0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{dla } \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$