

Rozwiązania zadań z kol.2 z dnia 24.11.2011

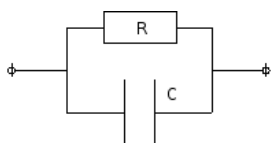
Michał Urbański

UWAGA,

W przypadku znalezienia błędów proszę o maila.

Zadanie 1.

Wyznacz impedancję zastępczą układu równoległego RC (rys obok). Naszkicuj zależność modułu impedancji i fazy od częstotliwości w skali logarymicznej. Dane są $R=1k\Omega$, $C=1nF$.



Impedancja wynosi:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

gdzie $\omega_1 = \frac{1}{RC} = 10^6 \frac{1}{s}$. Impedancja jest liczbą zespoloną o

$$\text{module } |Z| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

i fazie $\Delta\Phi$: $\text{tg } \Delta\Phi = -\omega RC$.

Funkcja $Z(\omega)$ może być przybliżona dwoma funkcjami granicznymi dla dużych i małych częstotliwości.

$$Z(\omega) = \begin{cases} R & \text{dla } \omega \ll \omega_1 \\ \frac{1}{j\omega C} & \text{dla } \omega \gg \omega_1 \end{cases} \quad (1)$$

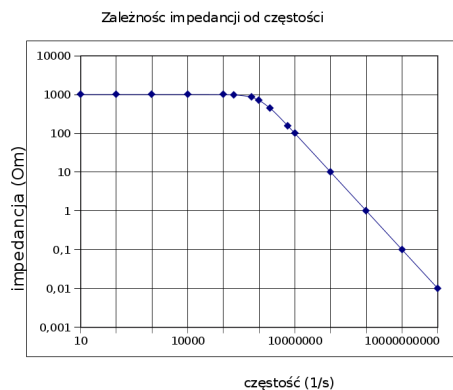
po zlogarytmowaniu otrzymujemy dwa obszary, w których wykres w skali logarymicznej można przedstawić jako dwie proste przybliżony:

$$\lg |Z(\omega)| = \begin{cases} \lg R & \text{dla } \omega \ll \omega_1 \\ -\lg \omega + \lg C & \text{dla } \omega \gg \omega_1 \end{cases} \quad (2)$$

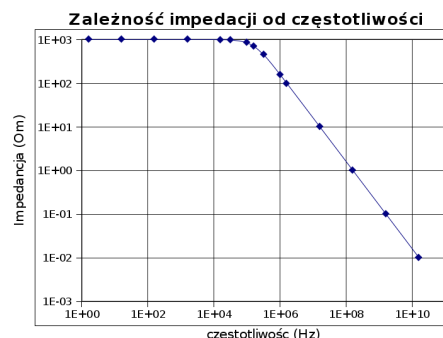
W celu wykonania wykresu warto zrobić tabelkę:

częstość($\frac{1}{s}$)	częstotliwość	impedancja(Ω)	$\lg Z $
10^2	$1,6 \cdot 10^1 \text{ Hz}$	1000	3
10^3	$1,6 \cdot 10^2 \text{ Hz}$	1000	3
10^4	$1,6 \cdot 10^3 \text{ Hz}$	1000	3
10^5	$1,6 \cdot 10^4 \text{ Hz}$	1000	3
10^6	$1,6 \cdot 10^5 \text{ Hz}$	700	2,85
10^7	$1,6 \cdot 10^6 \text{ Hz}$	100	2
10^8	$1,6 \cdot 10^7 \text{ Hz}$	10	1
10^9	$1,6 \cdot 10^8 \text{ Hz}$	1	0
10^{10}	$1,6 \cdot 10^9 \text{ Hz}$	0,1	-1

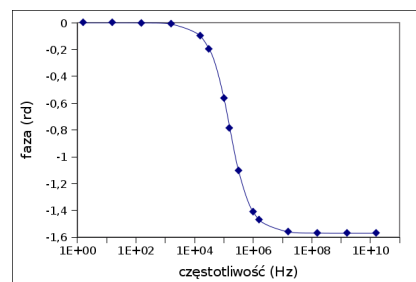
Wykres w skali logarymicznej zależności impedancji od częstotliwości ma postać:



Wykres od częstotliwości ma postać:



Wykres fazy od logarytmu częstotliwości ma postać:

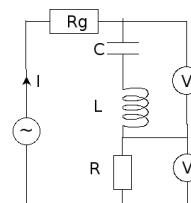


Zależność $\lg(|\text{tg}(\Delta\Phi)|)$ od częstotliwości jest liniowa:

$$\lg(|\text{tg}(\Delta\Phi)|) = \lg(\omega) + \lg(RC)$$

Zadanie 2.

Różnica faz pomiędzy napięciem $V = V_1 + V_2$ na napięciem V_2 w układzie, jak na rysunku obok, wynosi $\Delta\Phi$. Wyznacz stosunek napięć. Wykonaj wykres wskazowy i zrób obliczenie dla $\Delta\Phi = 45^\circ$. Wyznacz częstotliwość generatora jeśli rezystancja opornika wynosi $R=10k\Omega$, indukcyjność $L=0,01H$, a pojemności kondensatora $C=20nF$.



Napięcie V_2 i V_2 mają postać:

$$V_1 = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I \text{ oraz}$$

$V_2 = R I$, gdzie I jest prądem płynącym przez cały układ szeregowy (pomijamy prądy woltomierzy). Napięcie na układzie szeregowym R L C wynosi:

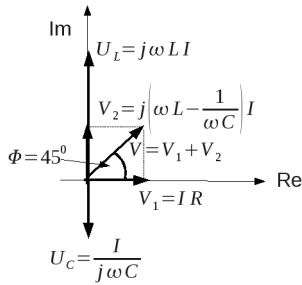
$$V = V_1 + V_2 = I \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) = I R \left(1 + j \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) = I R \left(1 + j \frac{V_1}{V_2} \right).$$

Napięcie V jest liczbą zespoloną o module $|V| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$

i fazie $\Delta\Phi$ (fazie wyznaczonej względem prądu I):

$$\text{tg}(\Delta\Phi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{V_1}{V_2}, \text{ z tego mamy } \frac{V_1}{V_2} = \text{tg} 45^\circ = 1.$$

Wszystkie obliczenia można przeprowadzić graficznie na rysunku wskazowym:



Z rysunku widać, że jeśli $\Delta\Phi = 45^\circ$ to $V_1 = V_2$.

W celu wyznaczenia częstotliwości generatora należy skorzystać z tego, że $V_1 = V_2$:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R \Rightarrow \omega^2 - \omega \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} = 0 \quad (3)$$

Należy więc rozwiązać równanie kwadratowe. Wygodnie jest wprowadzić zmienne: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\omega C}}$ oraz $\Gamma = \frac{R}{L}$.

Z danych zadania $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} 10^5 \frac{1}{s}$ oraz $\Gamma = 10^6 \frac{1}{s}$.

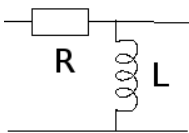
Równanie kwadratowe (3) ma postać: $\omega^2 - \omega\Gamma - \omega_0^2 = 0$.

Po rozwiązaniu otrzymujemy:

$$\omega = \frac{1}{2}\Gamma + \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \approx \Gamma = 10^6 \frac{1}{s}, \text{ czyli częstotliwość } f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1,610^5 \text{ Hz} = 160 \text{ kHz}.$$

Zadanie 3.

Wyznacz parametry macierzy h dla układu R-L.

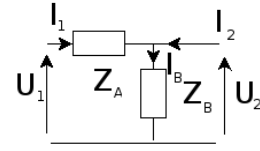


Dane są $R=10\text{k}\Omega$, $L=100\text{mH}$. Zapisz ogólne wzory i wykonaj obliczenia dla częstotliwości $f = 2\text{MHz}$. Uzasadnij obliczenia.

Z definicji szukamy równań o postaci:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Wygodnie jest rozważyć zadanie ogólniejsze, gdzie postawimy $Z_A = R$ i $Z_B = j\omega L$.



Korzystając z praw Kirchoffa:

$$U_1 - U_2 = I_1 Z_A \quad (5)$$

$$U_2 = I_B Z_B = (I_1 + I_2) Z_B \quad (6)$$

po przekształceniach:

$$U_1 = I_1 Z_A + U_2 \quad (7)$$

$$I_2 = -I_1 + \frac{1}{Z_B} U_2 \quad (8)$$

czyli mamy:

$$h_{11} = Z_A = R = 10\text{k}\Omega, \quad h_{12} = 1, \quad h_{21} = -1, \quad h_{22} = \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -j 0,0025 \frac{1}{\Omega} = -j 2,5 \text{ mS}.$$

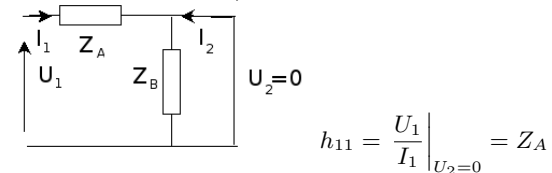
w zapisie macierzowym:

$$h = \begin{bmatrix} Z_A & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 1 \\ -1 & \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\text{k}\Omega & 1 \\ -1 & -j 2,5 \text{ mS} \end{bmatrix}$$

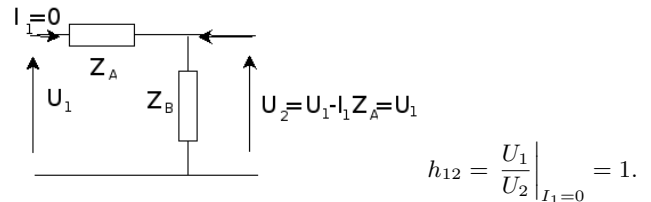
Metoda 2

Elementy macierzy h można wyliczyć korzystając ze wzorów opisujących elementy macierzone jako pochodne dla zerującej się drugiej zmiennej.

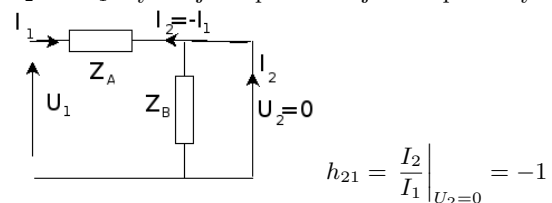
h_{11} jest impedancją wejściową wyznaczoną gdy $U_2 = 0$ (element Z_B jest zwarty), pokazuje to rysunek:



h_{12} opisuje odwrotność „wzmocnienia napięciowego” gdy $I_1 = 0$, wtedy $U_1 = U_2$, co pokazuje rysunek:



h_{21} opisuje przepływ prądu (wzmocnienie prądowe) gdy wyjście U_2 jest zwarte i przez Z_B nie płynie prąd, wtedy $I_2 = -I_1$. Sytuacja ta pokazana jest na poniższym rysunku:



h_{22} jest admitancją wyjściową gdy wejście jest rozwarte ($I_1 = 0$ tj $I_B = I_1$ i $U_2 = I_2 Z_B$), pokazuje to rysunek:

