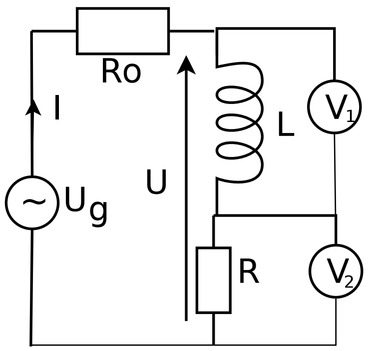
# Rozwiązania zadań z kol.2 z dnia 1.12.2016

Michał Urbański, Daniel Kowalski

**Zadanie 1.** Układ składa się z szeregowego połączenia generatora, rezystora $R_0 = 5k\Omega$ indukcyjności $L = 3mH$ i rezystora $R = 4k\Omega$. Napięcie skuteczne na indukcyjności wynosi $V_1 = 3V$ a na rezystorze $V_2 = 4V$. **Wyznacz** napięcie $U$ i $U_g$, kąt fazowy pomiędzy napięciem $U$ a prądem $I$, oraz częstotliwość generatora.




Rysunek 1: Schemat do zadania 1

Rozwiąż zadanie na liczbach zespolonych oraz na wykresie wskazowym.

**Rozwiązanie**

$V_1$ jest napięciem skutecznym na indukcyjności

$$V_1 = (U_L)_{RMS} = \frac{|U_L|}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

gdzie $|U_L|$ jest modułem napięcia na indukcyjności:

$$U_L = j\omega L I = j\omega L\ |I|e^{j\phi_0} \tag{2}$$

Gdzie $I$ natężenie prądu płynącego w obwodzie, ma ono postać $I = |I|e^{j\phi)}$, gdzie $\phi_0$ jest fazą prądu (nie znamy tej fazy, ale faza ta nie ma wpływu na rozwiązanie).

**UWAGA 1.** Napięcie $V_1 \neq \frac{U_L}{\sqrt{2}}$. $V_1$ jest liczbą rzeczywistą proporcjonalną do amplitudy zespolonego napięcia $U_L$ (równanie (1)).

$V_2$ jest napięciem skutecznym na rezystorze $R$: $V_2 = (U_R)_{RMS} = \frac{|U_R|}{\sqrt{2}}$, gdzie $|U_L|$ jest modułem (czyli amplitudą) napięcia na rezystorze:

$$U_R = I\ R = R\ |I|e^{j\phi_0} \tag{3}$$

Moduły napięć na indukcyjności $|U_L|$ i rezystorze $|U_R|$ nie zależą od fazy $\phi_0$:

$$|U_L| = \omega L\ |I|, \quad \text{oraz} \quad |U_R| = R\ |I| \tag{4}$$

Napięcie na układzie szeregowym R L wynosi:

$$U = U_L + U_R = j\omega L\ |I|e^{j\phi_0} + R\ |I|e^{j\phi_0} = \tag{5}$$

$$= e^{j\phi_0}\left(j\omega L\ |I| + R\ |I|\right) \tag{6}$$

Wstawiamy (4) do (6):

$$U = e^{j\phi_0}\left(j|U_L| + |U_R|\right) \tag{7}$$

Napięcie $U$ jest wielkością zespoloną o module (czyli amplitudzie):

$$|U| = \sqrt{|U_R|^2 + |U_L|^2} \tag{8}$$

Wartość skuteczna równa jest:

$$U_{RMS} = \frac{|U|}{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\frac{|U_R|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|U_L|}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \sqrt{(3V)^2 + (5V)^2} = 5V \tag{9}$$

**UWAGA 2.** Z równania (5) wynika, że
$|U| \neq |U_L| + |U_R|$.
Czyli moduł sumy amplitud zespolonych nie jest równy sumie modułów. Tak samo jest dla wektorów: długość sumy wektorów nie jest równa sumie długości. Amplituda zespolona jest wektorem na płaszczyźnie zespolonej.

W celu wyznaczenia przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem $U$ a prądem $I$ należy wyrazić napięcie $U$ poprzez prąd $I$. Ze wzoru (6) mamy:

$$U = e^{j\phi_0}\left(j\omega L\ |I| + R\ |I|\right) = |I|e^{j\phi_0}R(1 + j\frac{\omega L}{R}) \tag{10}$$

Dzieląc napięcia dane równaniami (4) mamy:

$$\frac{|U_L|}{|U_R|} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega L}{R} \tag{11}$$

Ponieważ $I = |I|e^{j\phi_0}$ równanie (10) ma postać:

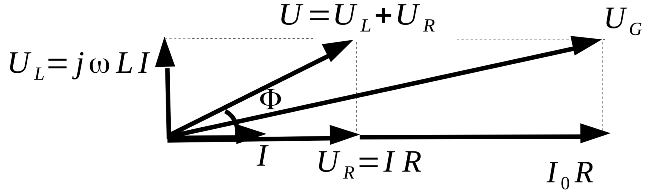
$$U = I\ R\left(1 + j\frac{V_1}{V_2}\right) = IR\sqrt{1 + \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2}e^{j\Delta\phi} \tag{12}$$

gdzie przesunięcie fazowe

$$tg(\Delta\phi) = \frac{V_1}{V_2} \tag{13}$$

W równanie (12) widać, że prąd $I$ pomnożony jest przez liczby rzeczywiste ($R$ i $R\sqrt{1 + \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2}$) oraz przez liczbę zespoloną $e^{j\Delta\phi}$ o module 1. Interpretujemy ten iloczyn tak, że czynnik $e^{j\Delta\phi}$ odpowiedzialny jest za przesunięcie fazowe pomiędzy napięciem $U$ a natężeniem prądu $I$. Przesunięcie fazowe $\Delta\phi$ jest kątem fazowym pomiędzy prądem a napięciem.

Wszystkie obliczenia można przeprowadzić graficznie na wykresie wskazowym, pokazującym amplitudy zespolone napięć i prądów jako wektory na płaszczyźnie zespolonej. Wykres wskazowy reprezentujący dodawanie napięć opisane w równaniu (6) pokazuje rysunek.




Rysunek 2: Wykres wskazowy napięć. $U = U_L + U_R$ i napięcie generatora $U_G = U + R_0 I$

Układ z rys. 1 jest układem szeregowym więc napięcie na generatorze wynosi:

$$U_G = I\ R_0 + j\omega L\ I + I\ R \tag{14}$$

W układzie szeregowym natężenie prądu płynącego przez wszystkie elementy jest takie samo, więc natężeni prądu wyznaczymy jak natężenie płynące przez rezystor $R$, wartość skuteczna wynosi więc:

$$I_{RMS} = \frac{V_2}{R} = \frac{4V}{4k\Omega} = 1mA \tag{15}$$

Amplituda (moduł) wartości prąd wynosi:

$$|I| = \frac{V_2}{R}\sqrt{2} = I_{RMS}\sqrt{2} \tag{16}$$

Napięcie generatora wynosi więc:

$$U_G = I(R_0 + R) + j\omega L\ I \tag{17}$$

ponieważ $|U_L| = \omega L\ |I|$ więc:

$$|U_G| = \sqrt{(|I|(R_0 + R))^2 + |U_L|^2} \tag{18}$$

W celu wyznaczenia wartości skutecznej $U_G$ dzielimy równanie (18) przez $\sqrt{2}$ i korzystając z (1) mamy:

$$(U_G)_{RMS} = \sqrt{((I)_{RMS}(R_0 + R))^2 + V_1^2} = \tag{19}$$

$$= \sqrt{(1mA\ 9k\Omega)^2 + (3V)^2} = \sqrt{90}V \approx 9,49V \tag{20}$$

W celu wyznaczenia częstotliwości generatora należy skorzystać z tego, że dane są napięcia $V_1$ i $V_2$ oraz wartości $R$ i $L$:

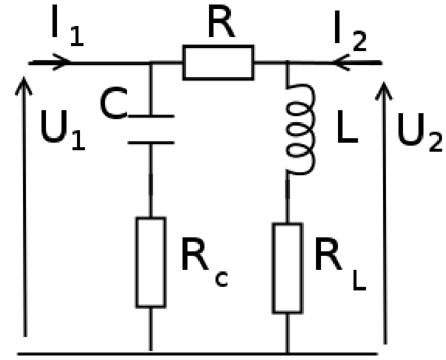
$$V_1 = \omega\ L\ I_{RMS} \ \text{ oraz } V_2 = R\ I_{RMS}$$

$$\text{dzieląc stronami: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\omega L}{R}$$

$$\text{i z tego: } \omega = \frac{V_1}{V_2}\frac{R}{L} = \frac{3V}{4V}\frac{4k\Omega}{3mH} = 10^6\frac{1}{s} \tag{21}$$

Częstotliwość wynosi więc: $f = \frac{\omega}{2\Pi} \approx 160kHz$.

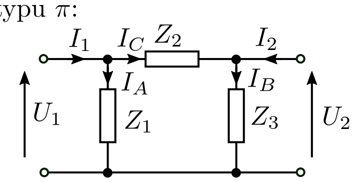
**Zadanie 2.** Wyznacz dla czwórnika Π parametry macierzy h oraz transmitancję $K_U = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{I_2=0}$, wykonaj wykres $K(f)$ w skali logarytmicznej.




Dane: $R = 10k\Omega$, $R_C = 1k\Omega$, $R_L = 10\Omega$, $C = 0,5nF$. Zapisz ogólne wzory i uzasadnij obliczenia.

**Metoda 1** - Elementy macierzy $h$ można wyliczyć korzystając ze wzorów opisujących elementy macierzowe jako pochodne dla zerującej się drugiej zmiennej.

Wygodniej jest rozważać ogólny schemat czwórnika typu $\pi$:




Impedancje w poszczególnych gałęziach można zapisać jako:

$$Z_3 = R_L + j\omega L, \quad Z_2 = R, \quad Z_1 = \frac{1}{j\omega C} + R_C$$

$$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0} = Z_1||Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Licząc $h_{11}$ zakładamy $U_2 = 0$, czyli można pominąć $Z_3$ (zastępując go zwarciem), wtedy $h_{11}$ jest impedancję widzianą z wejścia równą równoległamu połączeniu $Z_1$ i $Z_2$.

$$h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Tutaj zakładamy $I_1 = 0$, czyli brak prądu wejściowego, co powoduje że przez $Z_1$ i $Z_2$ płynie taki sam prąd. Napięcie $U_1 = \frac{U_2 Z_1}{Z_1 + Z_2}$ wyliczamy z dzielnika napięciowego stworzonego przez $Z_1$ i $Z_2$.

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0} = -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Sytuacja jest analogiczna do powyższej, tylko zakładamy $U_2 = 0$ (zastąpienie $Z_3$ zwarciem), wtedy prąd $I_2 = -I_1 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$ wyliczamy z dzielnika prądowego. Minus pojawia się dlatego, że strzałka prądu $I_2$ na schemacie jest narysowana w przeciwnym kierunku do $I_1$.

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{Z_3||(Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_3(Z_1 + Z_2)}$$

Zakładamy $I_1 = 0$, czyli brak prądu wejściowego - prąd płynący przez $Z_1$ i $Z_2$ jest taki sam. Wtedy $I_2$ można policzyć jako iloraz napięcia $U_2$ i imedancji zastępczej układu widzianej z wyjścia (równej równoległemu połączeniu $Z_3$ i $Z_1 + Z_2$)

**Metoda2**:
przekształcić układ równań do postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Równania z praw Kirchoffa (Pierwsze dwa na rozpływ prądów, pozostałe trzy typu prąd w danej gałęzi = spadek napięcia podzielony przez impedancję). Po przekształceniu otrzymujemy równania na prądy $I_1, I_2$:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_C + I_A \\ I_2 &= I_B - I_C \\ I_A &= \frac{U_1}{Z_1} \\ I_B &= \frac{U_2}{Z_3} \\ I_C &= \frac{U_1 - U_2}{Z_2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_1 - U_2}{Z_2} \\ I_2 &= \frac{U_2}{Z_3} - \frac{U_1 - U_2}{Z_2} \end{aligned}\right\}$$

Zaczynamy od równań na prądy zapisanych wcześniej.

$$\begin{cases} I_2 = U_2\left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}\right) - \frac{U_1}{Z_2} \\ I_1 = U_1\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) - \frac{U_2}{Z_2} \end{cases}$$

Przekształcamy równania tak aby wyciągnąć $U_1, I_2$ na lewą stronę.

$$U_1 = \frac{I_1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} + U_2 \frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$$

$$I_2 = U_2\left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}\right) - I_1 \frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} - \frac{1}{Z_2}\frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} U_2$$

$$I_2 = -I_1 \frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} + U_2\left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2} - \frac{\frac{1}{Z_2^2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}\right)$$

$$I_2 = -I_1 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} + U_2\left(\frac{Z_3 + Z_2}{Z_1 Z_2} - \frac{\frac{Z_1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}\right)$$

$$I_2 = -I_1 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} + U_2 \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_1 + Z_2) - Z_1 Z_3}{Z_3 Z_2 (Z_1 + Z_2)}$$

$$I_2 = -I_1 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} + U_2 \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_2^2}{Z_3 Z_2 (Z_1 + Z_2)}$$

$$I_2 = -I_1 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} + U_2 \frac{Z_1 + Z_3 + Z_2}{Z_3 (Z_1 + Z_2)}$$

$$U_1 = I_1 \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + U_2 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Gdy równania mają właściwą postać spisujemy współczynniki:

$$h = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1 + Z_3 + Z_2}{Z_3 (Z_1 + Z_2)} \end{bmatrix}$$

**Transmitancja**

Transmitancję liczymy jako stosunek napięcia wyjściowego do wejściowego przy braku obciążenia na wyjściu ($I_2 = 0$).

$$K_u = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2 = 0}$$

Założenie $I_2 = 0$ powoduje, że prąd płynący przez $Z_2$ i $Z_3$ jest taki sam i tworzą one dzielnik napięcia:

$$K_u = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_2} = \frac{R_L + j\omega L}{R + R_L + j\omega L}$$

Dla małych $\omega$ ($j\omega L \ll R_L$) można pominąć impedancję cewki (zostaje tylko $R_L$), wtedy wzór na wzmocnienie upraszcza sie do postaci $\frac{R_L}{R + R_L} = \frac{10\Omega}{10\Omega + 10k\Omega} \approx 0.001$. Częstość graniczną $\omega_0$ można policzyć z zależności $\omega_0 L = R$, i wynosi ona:

$$\omega_0 = \frac{R_L}{L} = \frac{10\ \Omega}{10\ \text{mH}} = 1\ \text{kHz}$$

Dla dużych częstości $\omega L$ jest znacznie większe od $R_L$ i $R$ i całe wyrażenie redukuje się do jedności. Przejście następuje przy częsości

$$\omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{10\ \text{K}\Omega}{10\ \text{mH}} = 1\ \text{MHz}$$

Dla częstości pośrednich możemy pominąć $R_L$ bo jest znacznie mniejsze od $\omega L$ i $R$, natomiast $R$ zostaje, wtedy otrzymujemy wzór postaci funkcji jednobiegunowej, moduł można przybliżyć do $\frac{\omega}{\omega_1}$.

$$K_u = \begin{cases} \frac{R_L}{R_L + R} & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_1}{\omega}} & \text{dla } \omega_0 < \omega < \omega_1 \\ 1 & \text{dla } \omega \gg \omega_1 \end{cases}$$

Przesunięcie fazowe ma postać $\phi(\omega) = \text{atan}\left(\frac{\Im(K_u)}{\Re(K_u)}\right)$, dla małych $\omega$, $K_u$ jest rzeczywiste, dla dużych $\omega$ też. Dla pośrednich częsości (w liniowym odcinku charakterystyki) (Matematycy niech oślepną na chwilę) $K_u \approx j\frac{\omega}{\omega_1}$, czyli mamy przesunięcie fazowe $\frac{pi}{2}$ .

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ \approx \frac{\pi}{2} & \text{dla } \omega_0 \ll \omega \ll \omega_1 \\ 0 & \text{dla } \omega \gg \omega_1 \end{cases}$$