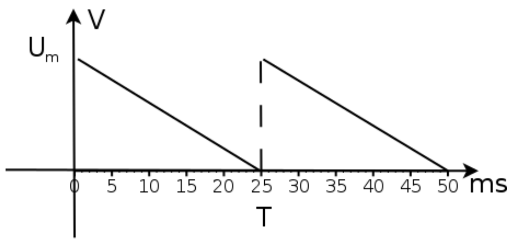
Rozwiązania zadań z kol.1 z dnia 27.10.2011

Michał Urbański, Daniel Kowalski

Zadanie 1.

Sygnał ma kształt trójkątny (rys.1) o amplitudzie $U_m = 1V$. Wyznacz:
1. wartość średnią, średnią wyprostowaną i skuteczną sygnału napięcia przedstawionego na rysunku 1.
2. wartość napięcia jaką wskaże przyrząd wyskalowany dla napięcia sinusoidalnego i działające na zasadzie średniej wyprostowanej.

Podaj definicje, wykonaj obliczenia na wzorach i wylicz wartości liczbowe.



Rysunek 1: sygnał do zadania 1

Rozwiązanie sygnał zapiszemy w postaci:

$$u(t) = -U_m \frac{t}{T} + U_m = U_m \left(1 - \frac{t}{T}\right) \tag{1}$$

Definicje:
wartość średnia:

$$U_{Av} = \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T+t_0} u(t)dt \tag{2}$$

średnia wyprostowana

$$U_{Av} = \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T+t_0} |u(t)|dt \tag{3}$$

wartość skuteczna sygnału napięcia

$$U_{RMS}^2 = \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T+t_0} (u(t))^2 dt \tag{4}$$

Dla wyliczenia wartości średniej (4) należy wyliczyć pole trójkąta co równe jest jedna druga wysokości razy podstawa. Pole wynosi $\frac{1}{2}U_m T$ więc $U_{Av} = \frac{1}{2}U_m$, w celu wyliczenia napiszemy:

$$U_{Av} = \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} (-U_m \frac{t}{T} + U_m)dt = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{T} \left(-\frac{U_m}{T}\frac{T^2}{2} + U_m T\right) = \frac{U_m}{2} = 0,5V \tag{6}$$

Wartość średnia wyprostowana równa jest wartości średniej ponieważ $|u(t)| = u(t)$.

Wartość skuteczną wyliczymy całkując zgodnie z (4). Wygodnie jest wykonać całkowanie zamieniając zmienne:
$u = U_m(1 - \frac{t}{T}$ czyli $du = -U_m \frac{dt}{T}$ i $dt = -\frac{T}{U_m}du$:

$$U_{RMS}^2 = \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} u^2(t)dt = \frac{1}{T} \int\limits_{u(0)}^{u(T)} u^2 \left(-\frac{T}{U_m}du\right) =$$

$$= \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{U_m}\right) \int\limits_{u(0)}^{u(T)} u^2 dt = \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{U_m}\right) \left(\frac{u^3(T)}{3} - \frac{u^3(0)}{3}\right) =$$

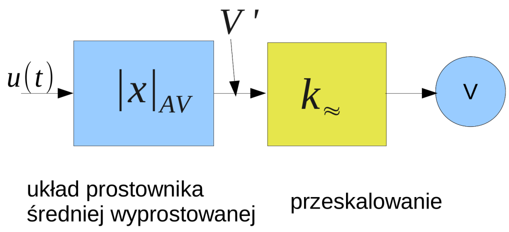
$$\frac{U_m^2}{3} = \frac{1}{3}V^2$$

gdzie: $U(0) = U_m$ i $u(T) = 0$.

Mamy więc $U_{RMS} = \frac{\sqrt{3}}{3}V$

Część druga - wyznacz wartość napięcia jaką wskaże przyrząd wyskalowany dla napięcia sinusoidalnego i działające na zasadzie średniej wyprostowanej.

Schemat układu pomiarowego - miernik średniej wyprostowanej wyskalowany w wartości skutecznej napięcia sinusoidalnego. Układ składa się układu całkującego sygnał wyprostowany, wyznaczającego wartość średnią wyprostowana oraz mnożnika przeskalowującego (definiującego współczynnik kształtu) tak aby uzyskać wartość skuteczną sygnału sinusoidalnego.



Rysunek 2: Schemat miernika uproszczonego wartości skutecznej

V' - napięcie średnie z sygnału wyprostowanego:

$$V' = |u|_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)|dt \tag{7}$$

Współczynnik przeskalowania $k_{\approx}$ (współczynnik kształtu) tak dobrany aby miernik wskazywał wartość skuteczną dla sygnału sinusoidalnego. Pierwsza część tego fragmentu zadania polega więc na wyznaczeniu współczynnika kształtu dla sygnału sinusoidalnego.

Wartość średnia wyprostowana:

$$V' = |U|_{AV} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T |A\sin(\omega t)|dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} |A\sin(\omega t)|dt = A\frac{2}{\Pi}$$

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (A\sin(\omega t))^2\, dt} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Współczynnik przeskalowania $k_{\approx}$ (współczynnik kształtu) jest tak dobrany aby $V = X_{RMS}$ dla sygnału sinusoidalnego.

$$V = k_{\approx} V' = X_{RMS} \tag{8}$$

podstawiając mamy współczynnik kształtu:

$$V = k_{\approx}|U|_{AV} = U_{RMS} \text{ czyli}$$

$$k_{\approx} = \frac{U_{RMS}}{|U|_{AV}} = \frac{\Pi}{2\sqrt{2}}$$

Gdy na wejście układu podamy sygnał trójkątny pierwszy człon układu da wartość:

$$V'_{troj} = \frac{U_m}{2} \tag{9}$$

ponieważ współczynnik przeskalowania jest $k_{\approx}$, czyli właściwy dla sygnału sinusoidalnego więc na wyjściu uzyskamy (będzie to wartość odczytana z przyrządu):

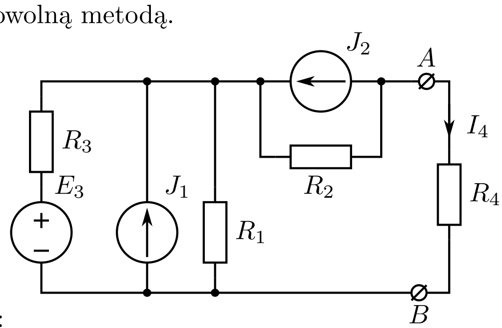
$$V_{troj} = k_{\approx} V'_{troj} = \frac{\Pi}{2\sqrt{2}}\frac{U_m}{2} = \frac{\Pi}{4\sqrt{2}}U_m \approx 0,555V \tag{10}$$

Współczynnik kształtu dla sygnału trójkątnego:

$$k_{troj} = \frac{U_{RMS}}{|U|_{AV}} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{3}}}{\frac{U_m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{11}$$

UWAGA Pomysł aby wynik pomiaru wynosił $U_m\frac{k_{\approx}}{k_{troj}}$ jest błędny.

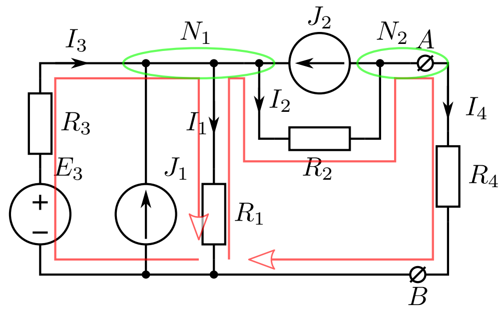
Zadanie 2.
Wyznacz wartość prądu I_4, oraz parametry prądowego źródła zastępczego widzianego z zacisków AB. Dane są: $J_1 = 30$mA, $J_2 = 100mA$, $E_3 = 1V$, $R_1 = 200\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $R_4 = 100\Omega$. Zapisz równania Kirchhoffa i wykonaj obliczenia I_4, źródło zastępcze wyznacz dowolną metodą.



Schemat:

Część pierwsza - zapisz równania Kirchhofa

Strzałkujemy prądy (I_1, I_2, I_3) i wybieramy oczka.

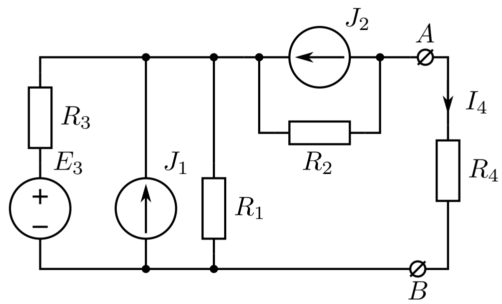


Mamy 4 niewiadome (I_1, I_2, I_3, I_4) więc potrzebujemy 4 równań, dwa równania zapisujemy używając wybranych oczek, pozostałe dwa uzyskujemy stosując pierwsze prawo Kirchhoffa do wybranych węzłów (Oznaczonych na schemacie jako N_1 i N_2).

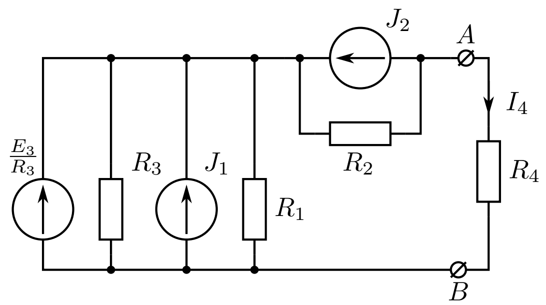
$$\begin{cases} 0 = E_3 - I_3R_3 - I_1R_1 \\ 0 = I_1R_1 - I_2R_2 - I_4R_4 \\ 0 = J_2 - I_2 - I_1 + J_1 + I_3 \\ 0 = I_2 - I_4 - J_2 \end{cases}$$

Część druga - parametry źródla zastepczego

Zaczynamy od obwodu przedstawionego na poniższym schemacie

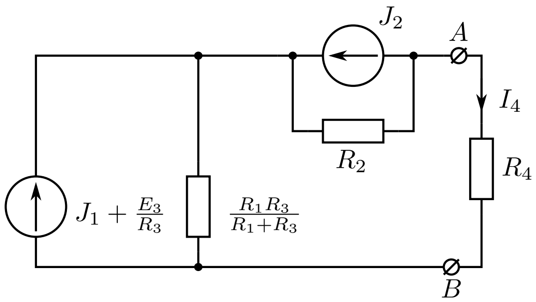


Zamieniamy źródło napięciowe E_3 z opornikiem R_3 na źródło prądowe. Otrzymane źródło ma wydajność $\frac{E_3}{R_3} = \frac{1\text{ V}}{50\ \Omega} = 20$ mA



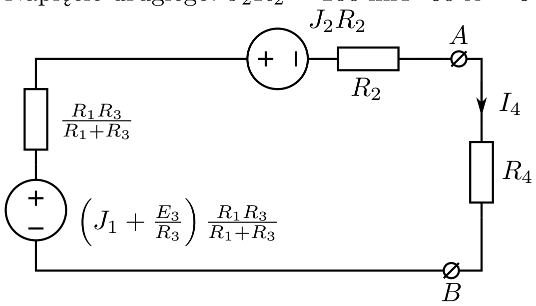
Mamy teraz dwa źródła pądowe połączone równolegle, zamieniamy je na jedno (przy połączeniu równoległym wydajności źródeł prądowych dodają się), łączymy również równolegle opory R_3 i R_1.

$R_1 \mid\mid R_3 = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} = 40\ \Omega$, Wydajność otrzymanego źródła: $\frac{E_3}{R_3} + J_1 = 20\text{ mA} + 30\text{ mA} = 50\text{ mA}$

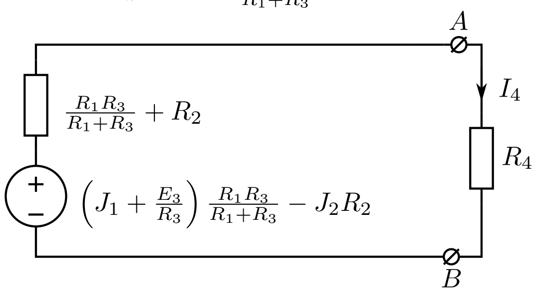


Otrzymujemy szeregowe połączenie dwóch źródeł prądowych, zamieniamy oba na źródła napięciowe. Napięcie pierwszego źródła wynosi: $\left(\frac{E_3}{R_3} + J_1\right)\frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} = 50\ \text{mA} \cdot 40\ \Omega = 2\ \text{V}$.

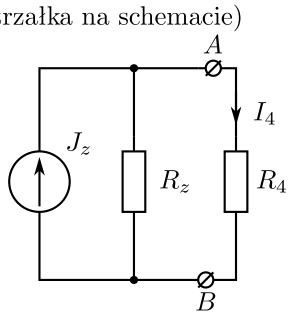
Napięcie drugiego: $J_2 R_2 = 100\ \text{mA} \cdot 60\ \Omega = 6\ \text{V}$



Mamy szeregowe połączenie dwóch źródeł napieciowych, dodajemy napięcia, oraz opory. Znak minus jest w równaniu dlatego, że drugie źródło było włączone do obwodu przeciwnie do źródła wynikowego. Czyli otrzymujemy $E_z = \left(\frac{E_3}{R_3} + J_1\right)\frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} - J_2 R_2 = 2\ \text{V} - 6\ \text{V} = -4\ \text{V}$ oraz $R_z = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} = 60\ \Omega + 40\ \Omega = 100\ \Omega$



Zamieniamy otrzymane źródło napięciowe na prądowe. $J_z = \frac{E_z}{R_z} = \frac{-4\ \text{V}}{100\ \Omega} = -40\ \text{mA}$ (Minus oznacza że prąd płynie w przeciwnym kierunku niż pokazuje strzałka na schemacie)



Pozostaje obliczyć prąd I_4 - możemy skorzystać np. z równania dzielnika prądowego $I_4 = J_z \frac{R_z}{R_z+R_4} = -40\ \text{mA} \cdot \frac{100\ \Omega}{100\ \Omega+100\ \Omega} = -20\ \text{mA}$, lub podzielić wydajność zastępczego źródła napięciowego przez opór widziany z jego zacisków (szeregowe połączenie R_z i R_4). $I_4 = \frac{E_z}{R_z+R_4} = \frac{-4\ \text{V}}{100\ \Omega+100\ \Omega} = -20\ \text{mA}$