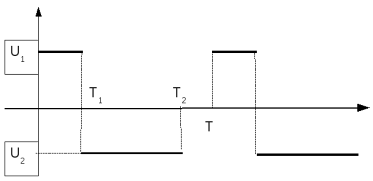
Rozwiązania zadań z kol.1 z dnia 27.10.2011

Michał Urbański

UWAGA,
W przypadku znalezienia błędów proszę o maila.

Zadanie 1.
1. Wyznacz wartość średnią, średnią wyprostowaną i skuteczną sygnału napięcia przedstawionego na rysunku.1. Dane są napięcia U_1, U_2, T_1, T_2 i okres sygnału T. Wykonaj obliczenia dla $U_1 = U_0$, $U_2 = -1/2U_0$, $T_1 = 1/4T$, $T_1 = 3/4T$.



Wartość średnia $U_{Av} = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T+t_0} U(t)dt$, ponieważ $U(t)$ jest przedziałami stałe więc:

$$U_{Av} = \frac{1}{T}\left(\int\limits_0^{T_1} U(t)dt + \int\limits_{T_1}^{T_2} U(t)dt\right) = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{T}\left(U_1T_1 + U_2(T_2 - T_1)\right) = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{T}\left(U_0\frac{T}{4} - \frac{U_0}{2}\frac{T}{2}\right) = 0 \tag{3}$$

Wartość średnia wyprostowana: $U_{Av} = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T+t_0} |U(t)|dt$, ponieważ $U(t)$ jest przedziałami stałe więc:

$$|U|_{Av} = \frac{1}{T}\left(\int\limits_0^{T_1} |U(t)|dt + \int\limits_{T_1}^{T_2} |U(t)|dt\right) = \tag{4}$$

$$= \frac{1}{T}\left(U_1T_1 + |U_2|(T_2 - T_1)\right) = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{T}\left(U_0\frac{T}{4} + \frac{U_0}{2}\frac{T}{2}\right) = \frac{U_0}{2} \tag{6}$$

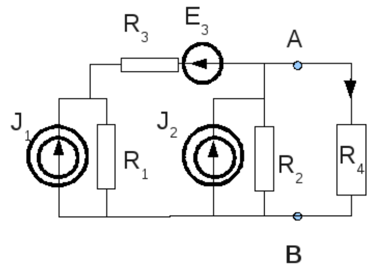
Wartość skuteczna U_{sk} opisana jest wzorem: $U_{sk}^2 = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{T+t_0} (U(t))^2dt$, analogicznie mamy:

$$U_{sk}^2 = \frac{1}{T}\left(\int\limits_0^{T_1} U^2(t)dt + \int\limits_{T_1}^{T_2} U^2(t)dt\right) = \tag{7}$$

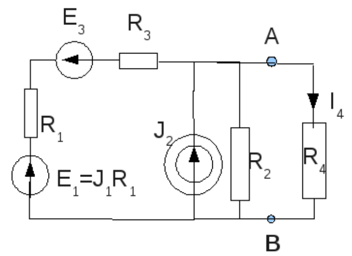
$$= \frac{1}{T}\left(U_1^2T_1 + U_2^2(T_2 - T_1)\right) = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{T}\left(U_0^2\frac{T}{4} + \frac{U_0^2}{4}\frac{T}{2}\right) = \frac{3}{8}U_0^2 \tag{9}$$

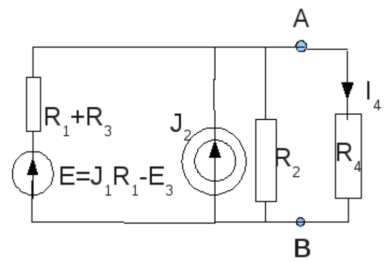
Zadanie 2
Wyznacz wartość prądu I_4, oraz parametry prądowego źródła zastępczego widzianego z zacisków AB. Dane są: $J_1 = 3mA$, $J_2 = 3mA$, $E_3 = 2V$, $R_1 = 2k\Omega$, $R_2 = 4k\Omega$, $R_3 = 2k\Omega$, $R_4 = 2k\Omega$,. Podaj wynik ogólny (wzór) i liczbowy.



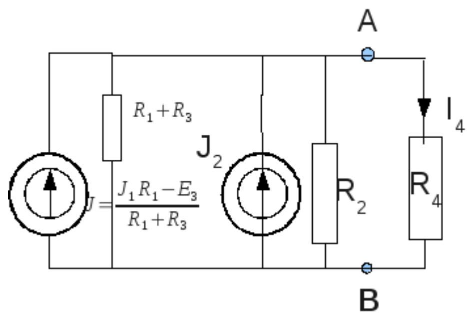
Metoda 1. Wyznaczamy parametry źródła zastępczego. Zaczynamy od zamiany źródła prądowego J_1 na napięciowe o sile elektromotorycznej $E_1 = J_1R_1$.



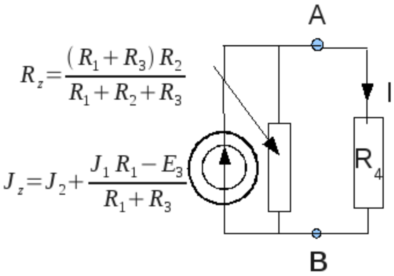
dalej mamy:



po zamianie na źródła prądowe:



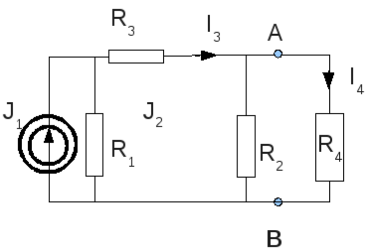
ostatecznie mamy:



po podstawieniach: $J_z = 4mA$, $R_z = 2k\Omega$ i $U_z = J_zR_z = 8V$. Z dzielnika prądowego: $I_4 = J_z\frac{R_z}{R_z+R_4} = 4mA\frac{2k\Omega}{2k\Omega+2k\Omega} = 2mA$

Metoda 2. Zasada superpozycji (obliczenie prądu I_4).

Prąd pochodzący od źródła J_1

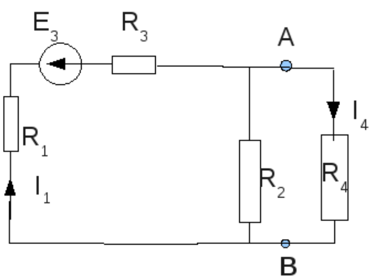


Prąd I_3 obliczymy stosując dzielnik prądowy: prąd J_1 rozpływa się na dwie skałdowe, składowa I_3 wynosi: $I_3 = J_1\frac{R_1}{R_3+R_1+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}}$ prąd I_3 rozpływa się na I_4 i prąd płynący w rezystorze R_2:

$$I_4' = I_3\frac{R_2}{R_2+R_4} = J_1\frac{R_1}{R_3+R_1+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}}\frac{R_2}{R_2+R_4} = \frac{J_1R_1R_2}{(R_2+R_4)(R_3+R_1)+R_2R_4}$$

Po wstawieniu danych: $I_4' = \frac{3}{4}mA$.

Składowa pochodząca od źródła napięciowego E_3.

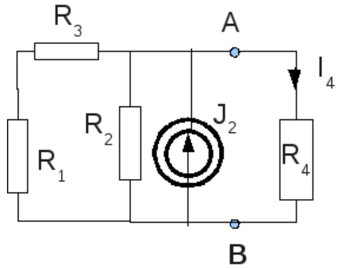


Prąd płynący przez R_1: $I_1 = -\frac{E_3}{R_3+R_1+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}}$, prąd ten rozpływa się na rezystory R_2 i R_4, przez rezystor R_4 popłynie prąd:

$$I_4'' = I_1\frac{R_2}{R_2+R_4} = -\frac{E_3}{R_3+R_1+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}}\frac{R_2}{R_2+R_4} = \frac{-E_3R_2}{(R_2+R_4)(R_3+R_1)+R_2R_4}$$

Po wstawieniu danych: $I_4'' = -\frac{1}{4}mA$.

Składowa od źródła prądowego J_2.



Prąd źródła J_2 rozpływa sie na I_4 i prąd płynący przez rezystory R_1, R_3 i R_2:

$$I_4''' = J_2\frac{\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}}{R_4+\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3}} = J_2\frac{R_2(R_1+R_3)}{R_4(R_1+R_2+R_3)+R_2(R_1+R_3)} = J_2\frac{R_2(R_1+R_3)}{(R_2+R_4)(R_3+R_1)+R_2R_4}$$

Po wstawieniu danych: $I_4''' = \frac{3}{2}mA$.

Całkowity prąd $I_4 = \frac{1}{2}mA - \frac{1}{4}mA + \frac{3}{2}mA = 2mA$

Zastępcze źródło prądowe wyznaczy się metoda suprepozycji jeśli wyliczyć prąd I_4 gdy $R_4 = 0$:

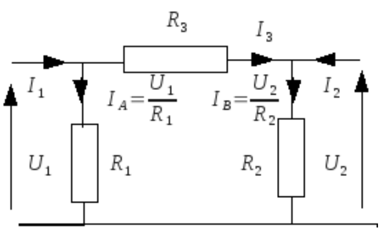
$$I_4' = J_1\frac{R_1}{R_1+R_3}$$
$$I_4'' = -\frac{E_3}{R_1+R_3}$$
$$I_4''' = J_2$$

Zadanie 3.

Wyznacz macierz impedancyjną z oraz mieszaną h, układu na rys. Dane są rezystory: $R_1 = 2k\Omega$, $R_2 = 4k\Omega$, $R_3 = 6k\Omega$. Oblicz prąd I_2 dla $U_1 = 4V$ i $U_2 = -2V$. Podaj wynik wzorami i liczowy.

Macierz z można wyznaczyć na trzy sposoby.

Metoda 1



Z praw Kirchoffa:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_2}{R_3} \quad (10)$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_1 - U_2}{R_3} \quad (11)$$

W celu wyznaczenia elementów macierzy z. Trzeba to równanie przekształcić w celu wyliczenia napięć. Po pomnożeniu stronami przez R_1R_3:

$$(R_1 + R_3)U_1 - R_1U_2 = R_1R_3I_1$$
$$-R_2U_1 + (R_2 + R_3)U_2 = R_1R_3I_2$$

Wyznacznik tego równania
$W = (R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_1R_2 = R_3(R_1 + R_2 + R_3)$,
czyli w zapisie macierzowym:

$$U_1 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} R_1R_3I_1 & -R_1 \\ R_1R_3I_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$U_2 = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & R_1R_3I_1 \\ -R_2 & R_1R_3I_2 \end{vmatrix} \quad (13)$$

ostatecznie:

$$U_1 = I_1\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} + I_2\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (14)$$

$$U_2 = I_1\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + I_2\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (15)$$

Tak więc macierz Z ma postać:

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix} = \quad (16)$$

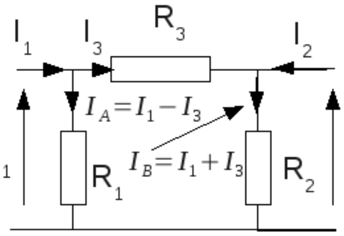
$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} k\Omega$$

Metoda 2 A
Prawa Kirchoffa można zapisać w postaci:

$$U_1 = (I_1 - I_3)\,R_1 \quad (17)$$

$$U_2 = (I_1 + I_3)\,R_2 \quad (18)$$

$$(I_1 - I_3)\,R_1 = (I_1 + I_3)\,R_2 + I_3R_3 \quad (19)$$



Z równania (19) mamy:

$$I_3\frac{I_1R_1 - I_2R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (20)$$

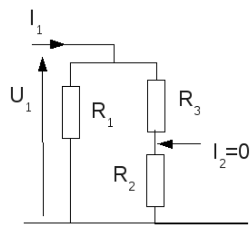
po wstawieniu do równań (17) i (18)mamy:

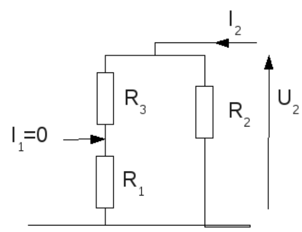
$$U_1 = I_1\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} + I_2\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (21)$$

$$U_2 = I_1\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + I_2\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (22)$$

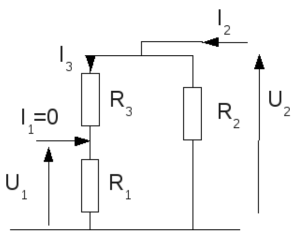
A z tego mamy macierz (16).

Metoda 2
Elementy macierzy z uzyskujemy jako odpowiednie pochodne cząstkowe (zapisane jako ilorazy):
z_{11} jest równoległym połączeniem R_1 i $R_2 + R_3$:
$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = R_1||(R_2 + R_3) = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$
i analogicznie z_{22} jest równoległym połączeniem R_2 i $R_1 + R_3$:
$z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = R_2||(R_1 + R_3) = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$
Obliczenia powyższe ilustrują poniższe schematy:





Dla elementów mieszanych mamy:
$z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$
$z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$
Obliczenia dla z_{12} wyjaśnia rysunek:



Przez rezystor R_3 płynie prąd: $I_3 = I_2\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$, wtedy napięcie na rezystorze R_1 wynosi $U_1 = R_1I_3$. Analogiczne rozumowanie należy przeprowadzić dla z_{21}.

Metoda 3
Korzystamy z transformacji trójkąt – gwiazda:

$$R_A = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_B = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (23)$$

$$R_C = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (24)$$

Dla układu gwiazdy parametry macierzy z jest łatwo zapisać korzystając z definicji opisanej o pochodne cząskowe:

$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = R_A + R_C \tag{25}$$

$$z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = R_C \tag{26}$$

$$z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = R_C \tag{27}$$

$$z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = R_B + R_C \tag{28}$$

po podstawieniu uzyskamy elementy macierzowe jak w (16).

Macierz mieszaną uzyskamy na dwa sposoby:
Metoda 1

Prawa Kirchoffa w postaci (10) i (11) sa wygodna do wyznaczenia macierzy mieszanej h, U_1 wyznaczamy z (10):

$$U_1 = I_1 \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + U_2 \frac{R_1}{R_1 + R_3} \tag{29}$$

Wstawiamy U_1 do równania (11):

$$I_2 = U_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{1}{R_3} \left(I_1 \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + U_2 \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right)$$

i z tego

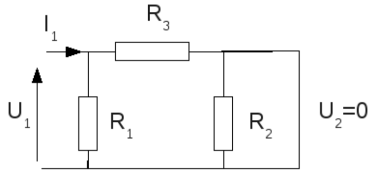
$$I_2 = -I_1 \frac{R_1}{R_1 + R_3} + U_2 \left(\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_1}{R_3(R_1 + R_3)} \right)$$

Tak więc macierz h ma postać:

$$h = \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} & \frac{R_1}{R_1 + R_3} \\ -\frac{R_1}{R_1 + R_3} & \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_2(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} \tag{30}$$

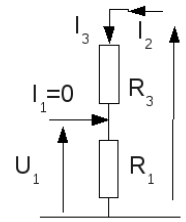
Metoda 2

Elementy macierzy h można wyliczyć korzystając ze wzorów opisujących elementy macierzone jako pochodne dla zerującej się drugiej zmiennej.
Dla macierzy h mamy:
$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0} = R_1 || R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$
Na poniższym rysunki pokazano warunek $U_2 = 0$



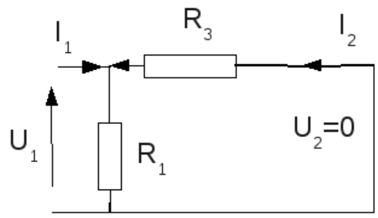
$h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0} = \frac{R_1}{R_1 + R_3}$

h_{12} jest opisane jako dzielnik napięcia:



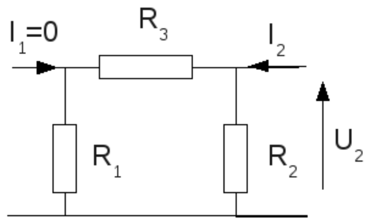
$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0} = -\frac{R_1}{R_1 + R_3}$

h_{21} opisuje rozpływ prądu pomiędzy rezystor R_1 i R_3 (przez rezystor R_2 nie płynie prąd ponieważ napięcie na tym rezystorze równe jest zeru: $U_2 = 0$), czyli $I_2 = -I_1 \frac{R_1}{R_1 + R_3}$. Sytuacja ta pokazana jest na poniższym rysunku:



$h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{U_2=0} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3}$

h_{22} jest przewodnością wyjściową powstałą z równoległego połącznia R_2 i $R_1 + R_3$, pokazuje to rysunek:



W celu obliczenia prądu I_2 dla $U_1 = 4V$ i $U_2 = -2V$ należy skorzystać z równania (11):
$I_2 = \frac{4V}{4k\Omega} - \frac{4V - 2V}{2k\Omega} = 1mA - 1mA = 0$