Zadania z Fizyki

Michał K. Urbański

1 Kinematyka

1.1 Ruch w układzie kartezjańskim

Zad 1. Samolot wystartował pod kątem 30^0 do poziomu i leciał z prędkością $v_1 = 500 km/h$, w kier zachodnim. Po czasie $t_1 = 0.5h$ samolot zmienił trasę i skręcił na północ i zaczął lecieć poziomo. Oblicz położenie cienia na Ziemi po czasie $t_2 = 1h$. Załóż że słońce pada prostopadle do Ziemi.

Zad 2. Samolot porusza się z prędkością $v = 500km/h$ pod kątem $\gamma = \frac{\pi}{5}$ do poziomu, w kierunku południowym. Wyznacz prędkość poruszania się cienia jeżeli słońce pada z południa pod kątem $\alpha = 30^0$ (względem pionu).

Zad 3. Samochód A wyruszył z miejscowości $\mathbb{A}$ o godz $t_1 = 0$ szosą na północ z prędkością $v_1 = 100km/h$. Samochód B wyruszył z miejscowości $\mathbb{B}$ o godz $t_2 = 1h$ z prędkością $v_2 = 60km/h$ szosą na zachód. Drogi przecinają się w odległości $d_A = 100km$ od miejscowości A i $d_B = 40km$. Narysuj zależność odległości od czasu. Wyznacz wektor położenia samochodu A względem samochodu B w funkcji czasu. Oblicz kiedy odległość pomiędzy samochodami jest najmniejsza.

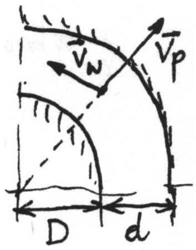
Zad 4. Trzy siły są w równowadze. Udowodnij, że leżą w jednej płaszczyźnie i wektory tworzą trójkąt. Rozważ podobne twierdzenie dla czterech sił.

Zad 5. Dwie siły $F_1 = (1, 2, 3)N$ i $F_2 = (4, -5, -2)N$, działają na ciało które przemieściło się z punktu $A = (0, 1, 3)m$ do punku $B = (-2, 3, 8)m$. Oblicz pracę jaka wykonały siły. Jak zmieni się ta praca gdy drugą siłę zwiększymy k =2.5 razy.

Zad 6. Łódka płynie po rzece tak że ster ustawiony jest pod kątem do brzegu. Prędkość łódki względem wody U=2m/s, a prędkość prądu V=3m/s. Jak zależy od czasu moment pędu względem punktu startu na brzegu.

Zad 7. Oblicz moment siły względem punktu A siły F równej sumie sił F_1 i F_2 działającej na ciało w punkcie B. Dane jak w zad.5

Zad 8. Ciało o masie m=10kg wisi na lice rozpiętej poziomo pomiędzy ścianami odległymi o d=2m. Oblicz napięcie linek jeżeli strzałka ugięcia linki wynosi h=10cm. Zapisz rozwiązanie przy pomocy wektorów.



Rysunek 1. Rysunek do zadania 14

1.2 ruch krzywoliniowy

Zad 9. Dane są równania ruchu w układzie kartezjańskim, wyznacz znaleźć drogi od czasu.

a) $x = 3t^2, \quad y = 4t^2,$

b) $x = 3\sin(t), \quad y = 5\cos(t),$

c) $x = a\cos(2t), \quad y = a\sin(2t),$

d) $x = 5\cos(5t^2), \quad y = 5\sin(5t^2)$

Zad 10. Ruch punktu określają równania: $x = ct\cos bt$, $y = ct\sin bt$, gdzie b i c sa stałymi. Znaleźć: składowe radialną, transwersalną , styczną i normalną, prędkości i przyspieszenia, promień krzywizny toru jako funkcję położenia punktu.

Zad 11. Punkt porusza się po gałęzi paraboli o równaniu $y = 2px^2$ przy czym rzut wektora prędkości na kierunek styczny do wierzchołka paraboli ma stałą wartość, Znaleźć:
a) równania ruchu, b) wektor prędkości i jego wartość, c) wektor przyspieszenia i jego wartość oraz składowe normalne i styczne przyspieszenia, d) promień krzywizny jako funkcję czasu oraz funkcję odległości od stycznej od wierzchołka, e) drogę przebytą od wierzchołka w czasie t.

Zad 12. Punkt porusza się po okręgu, przy czym rzut prędkości na oś x opisana jest funkcją $v_x = A\sin(t)$. Napisz równanie ruchu ciała w układzie kartezjańskim i biegunowym.

Zad 13. Wiedząc, ze podczas ruchu punktu P kąt pomiędzy kierunkiem wektora wodzącego $\overrightarrow{r}$, a kierunkiem wektora prędkości v jest stały. Znaleźć we współrzędnych biegunowych a/ równanie toru punktu, b/ całkowitą długość toru punktu. Przyjąć jako warunki początkowe $\phi(0) = 0, r(0) = r_0$.

Zad 14. Rzeka o szerokości d tworzy zakole o promieniu wewnętrznym D. Prędkość przepływu wody w zakolu wynosi V_w. Pływak przepływa z brzegu wewnętrznego na zewnętrzny w ten sposób, że cały czas utrzymuje kierunek prostopadły do brzegu zewnętrznego, a jego prędkość względem wody wynosi V_p.

Wskazówka
Znaleźć równanie toru pływaka we współrzędnych biegunowych $r(\phi)$, przyjmując początek układu odniesienia w środku zakola. Jakiego odchylenia Δl, liczonego wzdłuż brzegu zewnętrznego, dozna pływak?. Jaką drogę s względem Ziemi przebędzie pływak w czasie przeprawy?. Znaleźć składowe: radialną i transwersalną, jak również styczną i normalną, przyspieszenia pływaka.

Odp.

$$r(\phi) = De^{\frac{v_p}{v_w}\phi} \quad \Delta l = \frac{v_w}{v_p}(D+d)\ln\frac{D+d}{D},$$
$$s = d\frac{\sqrt{v_p^2+v_w^2}}{v_p} \quad a_r = -\frac{v_w^2}{v_p t + D},$$
$$a_\phi = \frac{v_p v_w}{v_p t + D}, \quad a_s = 0, \quad a_n = \frac{v_w\sqrt{v_p^2+v_w^2}}{v_p t + D}$$

Zad 15. Sternik motorówki, zbliżającej się do małej wysepki postanawia, że będzie zbliżał się do niej ze stała prędkością $u = |\overrightarrow{u}|$, jednocześnie okrążając ją ze stałą prędkością kątową ω. Zakładając, że w momencie rozpoczęcia manewru odległość od środka wysepki wynosiła D, znaleźć równanie toru motorówki we współrzędnych biegunowych oraz składową styczną i normalną jej przyspieszenia, jak również promień krzywizny toru jako funkcję bieżącej odległości od środka wyspy r.

Zad 16. Motorówka z zadania 15, znajdująca się w odległości d od środka wysepki, odbija od niej, powtarzając manewr zastosowany przy przybijaniu. Jakie będzie teraz równanie toru motorówki?. Jakie są składowe: styczna i normalna jej przyspieszenia oraz promień krzywizny toru jako funkcje odległości motorówki r od środka wysepki?.

Zad 17. Znaleźć równania ruchu punktu, poruszającego się po okręgu o promieniu r_0, jeżeli kąt pomiędzy wektorem przyspieszenia a i promieniem wodzącym r ma stałą wartość ϕ. Przyjąć $\phi(0) = 0$. Wskazówka: $dr/dt = 0$. Przy obliczeniach wygodnie jest posłużyć się zmienną $\omega = d\phi/dt$.

Zad 18. Punkt, porusza się po okręgu o promieniu r_0 tak, że kąt pomiędzy wektorem przyspieszenia $\vec{a}$ i promieniem wodzącym $\vec{r}$ ma stałą wartość równą α. Wyznacz równania ruchu. Przyjąć, że wartość początkową kąta pomiędzy wektorem wodzącym a wektorem osi układu odniesienia wynosi $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \omega_0$.

Wsk. $\dot{r} = 0$. Przy obliczeniach wygodnie jest posłużyć się zmienną pomocniczą $\omega = \dot{\phi}$.

Odp.

$$\phi(t) = \cot\alpha \ln(\omega_0 t \tan(\alpha) + 1) \tag{1}$$

W szczególności przy $\alpha = 0$ otrzymujemy $\phi = \omega_0 t$, czyli ruch jednostajny po okręgu. ...

Zad 19. Samochód jadący ze stałą prędkością v_A mija punkt P w chwili $t_0 = 0$. Po jakim czasie musi wystartować z punktu P rakieta z punktu P z przyspieszeniem a, aby dogoniła samochód.

Zad 20. Punkt A porusza się wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt $A = (0,0,0)$ o kierunku $n_A = (1,2,0)$ z prędkością $v_A = 1m/s$ i z przyspieszeniem $a_A = 1m/s^2$.Punkt B porusza się wzdłuż prostej o kierunku $n_B = (2,0,1)$ i przechodzącej przez punkt $B = (1,1,0)$ z prędkością $v_B = 2m/s$ i przyśpieszeniem $a_B = 0m/s2$. Wyznacz prędkość i przyśpieszenie ciała A względem ciała B, oraz zmianę odległości ciał w funkcji czasu, jeżeli w chwili t= 0 położenia ciał były następujące: $r_A(0) = (0,0,0)$, $r_B(0) = (3,1,1)$.

Zad 21. Ciało wystrzelono pod kątem ϕ_0 do poziomu. Zapisz równania ruchu w układzie biegunowym. Wyznacz składowe radialną, transwersalną, styczną i normalną, prędkości i przyspieszenia, promień krzywizny toru jako funkcję położenia punktu.

Zad 22. Z nieruchomej szpulki o promieniu R jednostajnie odwijamy nić, tak że stale pozostaje ona naprężona. Długość nici $l = vt + l_0$. Znaleźć:
a) równania ruchu końca naprężonej nici
b) odległość końca nici od środka szpulki w funkcji czasu
c) kształt toru końca nici (podać rysunek)
d) długość luku, jaki zatacza koniec nici w funkcji kata ϕ, o jaki przesunie się punkt, w którym nitka odwija się ze szpulki.

Waskazówka
Wybrać układ współrzędnych, w którym w chwili $t = 0$ będzie $y = R$.

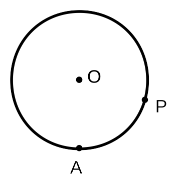
Odp.

$$\begin{aligned} x(t) &= (l_0 + vt)\cos\left(\frac{v}{R}t\right) - R\sin\left(\frac{v}{R}t\right) \\ y(t) &= (l_0 + vt)\sin\left(\frac{v}{R}t\right) + R\cos\left(\frac{v}{R}t\right) \end{aligned} \tag{2}$$

$$r(t) = \sqrt{R^2 + (l_0 + vt)^2} \tag{3}$$

$$s(\phi) = \phi\left(l_0 + \phi\frac{R}{2}\right) \tag{4}$$

Zad 23. Ciało o małych rozmiarach porusza się po okręgu o promieniu R z przyśpieszeniem kątowym ε.

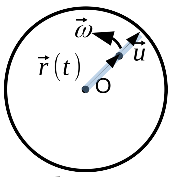


Wyznacz składowe transwersalne i radialne prędkości i położenia w funkcji czasu w układzie współrzędnych względem środka okręgu oraz względem punktu A na okręgu. Załóż, że w chwili początkowej ciało znajdowało się w punkcie A i początkowa prędkość kątowa $\omega = 0$.

Zad 24. Mrówka idzie z prędkością u wzdłuż rowka radialnego znajdującego się na obracającej się z prędkością kątową ω tarczy.

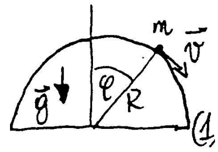
Wyznacz: a) równania ruchu w układzie biegunowym ($r(t)$ i $\phi(t)$), b) równanie toru, c) składowe radialne i transwersalne prędkości i przyśpieszenia w funkcji czasu i położenia (kąta promienia) d) składowe normalne i styczne przyśpieszenia w funkcji czasu u kąta. e) promień krzywizny w funkcji kąta.

2 Dynamika



Zad 25. Kulka o masie m ześlizguje się bez tarcia po powierzchni kuli o promieniu R (rys.obok) z prędkością początkową zerową ($v_0 = 0$, kulka startuje z wierzchołka kuli).

W którym miejscu i z jaką prędkością kulka oderwie się od kuli?
Odp. $\varphi = rccos(2/3)$, gdzie φ jest kątem liczonym względem osi pionowej, przechodzącej przez wierzchołek kuli.

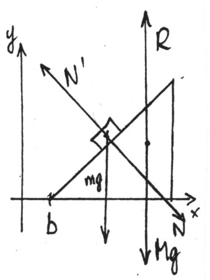


Zad 26. l. Na poziomej płaszczyźnie znajduje się równia pochyla o kącie nachylenia masie M. Na pochyłej ścianie równi położono ciało o masie m. Wszystkie powierzchnie są doskonale gładkie Znaleźć przyspieszenia ciała i równi w kierunku poziomym, w nieruchomym układzie odniesienia, oraz siły N, R nacisku ciała na równie i równi na podłoże (rys).

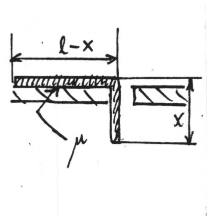
Wsk. Działające siły zaznaczono na rys. l. Napisać równania ruchu w kierunkach x, y oddzielnie dla ciała m i równi. Związek między przyspieszeniami równi i ciała m można wyznaczyć przez dwukrotne zróżniczkowanie tożsamości $y = (x - b)tg\alpha$ (wyprowadzić ten wzór z geometrii).

$$a_{M,x} = \frac{mg\sin 2\alpha}{2\left(M + m\sin^2\alpha\right)} \qquad a_{m,x} = \frac{-Mg\sin 2\alpha}{2\left(M + m\sin^2\alpha\right)}$$
$$N = \frac{mMg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} \qquad R = \frac{Mg\left(M + m\right)}{M + m\sin^2\alpha} \tag{5}$$

Zad 27. Lina leżąca na poziomej desce przechodzi jednym końcem przez wywiercony w desce otwór. Całkowita długość liny wynosi l, a długość części zwieszającej się w chwili rozpoczęcia ruchu l_0 (rys.2). Współczynnik tarcia między liną a deską wynosi μ. Obliczyć zależność prędkości liniowej liny i długości części zwieszającej się od czasu. Jaki warunek powinien być spełniony, aby lina zaczęła się zsuwać?



Wsk. Ułożyć równanie różniczkowe na $x\left(t\right)$, gdzie x jest długością zwieszającej się części liny, podobnie jak w przypadku bez tarcia. Będzie to równanie niejednorodne, a jego rozwiązaniem szczególnym jest $x = C$, gdzie stałą C należy wyznaczyć przez wstawienie tego rozwiązania do równania niejednorodnego. Rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego jest suma tego rozwiązania szczególnego i (znanego z ćwiczeń) rozwiązania ogólnego równania jednorodnego.



Odp.

$$x\left(t\right) = \frac{\left(1+\mu\right)l_0 - \mu l}{1+\mu}\cosh\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1+\mu\right)t\right] + \frac{\mu l}{1+\mu}$$

$$v\left(t\right) = \sqrt{\frac{g}{\left(1+\mu\right)l}}\left[\left(1+\mu\right)l_0 - \mu l\right]\sinh\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1+\mu\right)t\right]$$

Zad 28. Na linie, przerzuconej przez nieruchomy blok i przyczepionej do klocka o masie M posuwającego się po stole bez tarcia, znajduje się małpa o masie m. Blok znajduje się na brzegu stołu z którego zwisa koniec liny (rys). Znaleźć przyśpieszenia klocka i małpy względem stołu jeśli małpa wspina się po linie ze stałym przyspieszeniem a_0 względem liny.

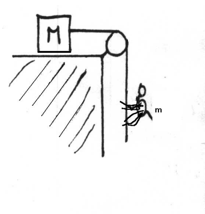
a) małpa nie porusza się względem liny

b) małpa wspina się po linie ze stałą prędkością v_0 względem liny

c) Małpa wspina się po linie ze stałym przyspieszeniem a_0 względem liny.

Masa M porusza się bez tarcia.

Wskazówka: Wyprowadzić związek pomiędzy przyśpieszeniem klocka i małpy względem stołu dla danego względnego przyspieszenia małpy względem liny.



Odp.

a, b) Przyspieszenie układu

$$a = \frac{m}{M+m} g \tag{6}$$

c) Przyspieszenie małpy a' w układzie stołu i przyspieszenie a masy M (względem stołu) wynoszą

$$a' = \frac{mg - Ma_0}{M+m}, \quad a = \frac{m}{m+M}(g + a_0)$$

Ruch ciał o zmiennej masie

Zad 29. W motorówce o masie M_0, płynącej z prędkością v_0, przerwał pracę silnik i zaczęła się do niej wlewać woda ze stałą wydajnością μ. Jak będzie zmieniała się w czasie prędkość motorówki, jeśli opór stawiany przez wodę jest proporcjonalny do prędkości i wyraża się wzorem $T = -\alpha v$, gdzie α jest stałą proporcjonalności?.

Odp.

$$v(t) = v_0 \left(\frac{M_0}{M_0 + \mu t} \right)^{\frac{\mu+\alpha}{\mu}}$$

Zad 30. Lokomotywa ciągnie puste wagony po poziomym torze z prędkością v_0 pod system taśmociągów, ładujących węgiel, który spada pionowo w dół ze stałą wydajnością μ. Masa niezaładowanego składu pociągu wynosi M_0.

a) Jak będzie zależeć od czasu prędkość pociągu podczas jego załadunku, jeśli nie zmieni się siła ciągu lokomotywy i nie ulegnie zmianie siła tarcia?. (Uwaga: to znaczy, że siła tarcia jest stała i niezależna od masy pociągu, a nie że współczynnik tarcia jest stały).

b) Zakładając, że podczas ciągnięcia pustych wagonów wydatkowana jest moc P, znaleźć zależność od czasu prędkości pociągu, jeżeli w chwili rozpoczęcia załadunku napęd został wyłączony, a tarcie (siła, a nie współczynnik) cały czas pozostaje stałe. Po jakim czasie pociąg zatrzyma się?.

c) Jaką dodatkową siłę ciągu należy przyłożyć, aby podczas załadunku prędkość pociągu nie zmieniała się i wynosiła v_0?.

Odp.

$$\text{a)}\quad v(t) = v_0 \frac{M_0}{M_0 + \mu t},$$
$$\text{b)}\quad v(t) = \left(v_0 + \frac{P}{\mu v_0}\right) \frac{M_0}{M_0 + \mu t} - \frac{P}{\mu v_0},$$
$$t_s = \frac{v_0^2 M_0}{P}, \quad \text{c)}\ F_c = \mu v_0$$

Zad 31. W wagonie stojącym na górce rozrządowej o kącie nachylenia α uległ awarii system hamulcowy i zaczęła wylewać się z niego ciecz prostopadle do kierunku ruchu. Jak w funkcji czasu będzie się zmieniać prędkość pociągu, jeśli tarcie pominiemy?.

Odp. $v(t) = gt\sin\alpha$ (!).

Zad 32. Statek kosmiczny dryfuje w przestrzeni kosmicznej bez napędu. W przestrzeni jest pył o gęstości ρ który osadza się na powierzchni statku. Wyznacz zależność prędkości od czasu jeśli prędkość początkowa statku wynosi $v(0) = v_0$, masa początkowa $m(0) = m_0$. Statek ma kształt kuli o promieniu R.
Wskazówka: Wyprowadź zasadę zachowania pędu rozpatrując chwilę T i $T + \Delta t$.

Zad 33. Rakieta wyposażona jest w silnik odrzutowy wyrzucający gazy z prędkości u_0 względem rakiety i z szybkością spalania $\gamma = \frac{dm_g}{dt}$, gdzie m_g - masa wyrzuconego gazu. W chwili początkowej rakieta stoi pionowo na ziemi i ma masę M_0. Napisz równania ruchu w jednorodnym polu grawitacyjnym (o przyśpieszeniu g), wyznacz zależność prędkości od czasu.

Zapisz bilans pędu i uzasadnij wzór opisujący pochodną pędu po czasie.

2.1 Dynamika ruchu obrotowego

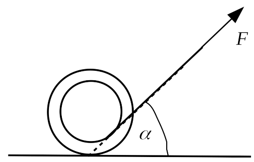
Zad 34. Walec stacza się po równi pochyłej. Wyznacza przyśpieszenie oraz siłę styczną tarcia obracająca walec jeśli dane są: kąt nachylenia równi α, stała grawitacji g, moment bezwładności walca I, R - promień walca, współczynnik tarcia tocznego f. Tarcie toczne powoduje moment siły $N = F_N f$ gdzie N - siła nacisku.

Wsk. Na walec działa siła grawitacji, siła reakcji podłoża (równi), siła statyczna dom równi pochodząca od tarcia ślizgowego oraz moment siły wynikający z tarcia tocznego.

Zad 35. Jojo zbudowane jest z dwóch tarcz o promieniu R połączonych osią o promieniu $r < R$. Na osi nawinięty jest sznurek. Wyznacz przyśpieszenie tarcz jeśli: a) sznurek nie porusza się, b) sznurek jest podnoszony do góry z przyśpieszeniem a.

Zad 36. Ciężka szpula z nawiniętą nicią, do której przyłożono siłę F, leży na płaszczyźnie poziomej (patrz rys.). W którą stronę i z jakim przyspieszeniem kątowym będzie poruszać się szpula w zależności od kąta między kierunkiem działania siły i płaszczyzną?. Masa szpuli m, zewnętrzny i wewnętrzny promień R i r, odpowiednio, moment bezwładności względem osi symetrii I_0.

Wskazówka. Najłatwiej rozwiązywać to zadanie w układzie chwilowej osi obrotu (wzdłuż prostej styczności szpuli z podłożem). **Odp.** Przyspieszenie środka masy szpuli wynosi $a = FR\,(R\cos\alpha - r)\,/\,(I_0 + mR^2)$. Dla $\cos\alpha > r/R$ $a > 0$ i nić nawija się na szpulę, dla $\cos\alpha < r/R$ $a < 0$ i nić rozwija się ze szpuli.



Zad 37. Cienką, jednorodną obręcz o promieniu r ustawiono pionowo na podłodze i nadano jej poziomą prędkość postępową v_0 i obrotową prędkość kątową ω_0, tak że obręcz porusza się w ustalonej pionowej płaszczyźnie. Znaleźć ruch obręczy, jeśli współczynnik tarcia o podłogę wynosi f.

Odp. Obręcz będzie się toczyć z poślizgiem do momentu, gdy prędkość liniowa środka masy v_k i prędkość liniowa punktów na obwodzie obręczy $\omega_k r$ zrównają się, gdzie $v_k = (v_0 + \omega_0 r)/2$; czas, po którym to nastą pi, wynosi $t_k = |v_0 - \omega_0 r|/2gf$.

Zad 38. Wokół osi, tworzącej z pionem kąt $\alpha = 30°$ obraca się bąk z prędkością kątową $\omega = 60s^{-1}$. Jego masa wynosi $m = 0.5$kg, moment bezwładności $I = 5 \cdot 10^{-4}$kg m^2. Środek masy jest odległy od punktu podparcia o l =4 cm. Bąk obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Jaki jest kierunek i wartość prędkości kątowej precesji bąka?.

Odp. $\omega_{prec} = mgl/I\omega$.

Zasada zachowania momentu pędu i energii

Zad 39. Na brzegu poziomo ustawionej tarczy o momencie bezwładności I_0 (względem osi pionowej przechodzącej przez środek tarczy) i promieniu R znajduje się człowiek o masie m. Obliczyć prędkość kątową tarczy ω, gdy człowiek zacznie się poruszać wzdłuż jej brzegu z prędkością v względem niej.

Odp. $\omega = mRv/\,(I_0 + mR^2)$.

Zad 40. Na bocznej powierzchni walca o pionowej osi, wokół której może się on obracać bez tarcia, zrobione zostało gładkie śrubowe wycięcie z kątem nachylenia do poziomu α. W chwili początkowej walec spoczywa. W wycięcie kładziemy kulkę o masie m. Kulka opuszcza się w wycięciu, wprawiając walec w ruch obrotowy. Dane są: masa M i promień r walca. Odległość kulki od osi przyjąć równą r. Określić prędkość kątową Ω walca w chwili, gdy kulka opuści się o wysokość h.

Wsk. Skorzystać z zasady zachowania momentu pędu i energii. Należy pamiętać o tym, że oprócz ruchu obrotowego kulka ma niezerową prędkość w kierunku pionowym.

Odp.

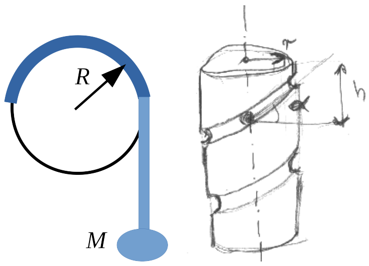
$$\Omega = \frac{2m}{r}\sqrt{\frac{2gh}{2Mm + M^2 + \tan^2\alpha \cdot (2m + M)^2}}$$

Zad 41. Łańcuch kotwiczny nawinięty jest równomiernie w jednej warstwie na wałek kotwiczny o promieniu R, masie m i momencie bezwładności $I_0 = mr^2/2$. Masa jednostki długości łańcucha wynosi ρ. Do łańcucha przymocowana jest kotwica o masie M. Pod wpływem ciężaru kotwicy łańcuch zaczyna się rozwijać. Zaniedbując tarcie, wyznaczyć ruch kotwicy.

Wsk. Wygodnie jest (choć nie jest to konieczne) wyjść z zasady zachowania energii dla całego układu. Po napisaniu wyrażenia na całkowitą energię (kinetyczną i potencjalną) należy je zróżniczkować po czasie – w ten sposób otrzyma się równanie ruchu. Jest to równanie niejednorodne, którego rozwiązaniem szczególnym jest $h\left(t\right)=C$, gdzie stałą C należy wyznaczyć. Inny sposób jego rozwiązania polega na dokonaniu zamiany zmiennych, tak aby zniknął wyraz wolny.

Odp.

$$h\left(t\right)=\frac{m}{\rho}\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{\rho g}{\frac{3m}{2}+l\rho}}t\right)-1\right] \tag{7}$$



Rysunek 2. rysunki do zadań 41 i 40

2.2 ruch w polu sił centralnych

Zad 42. Znaleźć wartość ciśnienia grawitacyjnego w funkcji odległości od środka Ziemi. Załóż że gęstość jest stała. Jak zmienią się obliczenia gdy założymy, że gęstość jest funkcją ciśnienia $\rho = \rho_0 + \alpha p + \beta p^2$. Odp(x)=2/3$\pi\rho^2 G(R^2 - x^2)$, x-odległość od środka Ziemi, G- stała grawitacji.

Zad 43. Kometa przeleciała obok Słońca w odległości minimalnej $r_m = 410^7$ km z prędkością $v_0 = 100km/s$. Czy kiedykolwiek wróci ona w okolice Słońca. Masa Słońca $M_s = 2.010^30$kg, stała Grawitacji $G = 6.6710^{-11} Nm^2 kg^{-2}$. Uzasadnij odpowiedź obliczeniami.

Zad 44. Pierwszy w historii lot suborbitalny odbył na statku Mercure'go komandor Allan Sheppard 5 maja 1961. Osiągnął on maksymalna wysokość 185 km i wodował na Atlantyku w odległości 480 km od miejsca startu (tj. od Przylądka Kennedy'ego (wtedy Canaverala). Na podstawie tych danych znajdź półosie elipsy po której wędrował Mercure. Promień Ziemi 6371 km.

Zad 45. We wnętrzu jednorodnej kuli o gęstości ρ i promieniu R1 znajduje się puste kuliste wydrążenie o promieniu $R_2 < R_1$. Środek wydrążenia odległy jest od środka kuli o d ($R_2 + d < R_1$). Znajdź natężenie pola grawitacyjnego w funkcji odległości od środka zarówno wewnątrz jak i na zewnątrz wydrążenia.

Zad 46. Wykaż, że siły pływowe powodujące przypływy są odwrotnie proporcjonalne do trzeciej potęgi odległości pomiędzy powierzchniami Ziemi Księżyca. Rozważ siły grawitacyjne i odśrodkowe działające w układzie Ziemia-Księżyc, który krąży wokół własnego środka masy.

Zad 47. Po gładkim poziomym stole krąży kula o masie m, połączona nicią przechodząca przez otwór w stole z ciężarkiem o masie M. W chwili początkowej odległość kulki od otworu wynosiła r_0, a prędkość była prostopadła do nici i wynosiła v_0. Wykazać, że kulka wykonuje drgania radialne (zbliża się i oddala) pomiędzy dwoma odległościami od środka r_1 i r_2. Wsk. Skorzystać z zasady zachowania energii. Odp. $r_1 = r_0$.

$$r_2 = \frac{mv_0^2}{4Mg} + \sqrt{\frac{mv_0^2}{4Mg}\left(\frac{mv_0^2}{4Mg} + 2r_0\right)} \tag{8}$$

Zad 48. Punkt o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej po okręgu, który przechodzi przez centrum działania siły (tj. centrum pola siłowego leży na okręgu). Znajdź zależność siły od odległości od centrum.

Zad 49. Znajdź wartość siły centralnej powodującej ruch ciała po spirali hiperbolicznej: $r = \frac{a}{\phi}$ Znajdź zależność kąta od czasu jeżeli $\phi(0) - \phi_0$.

Zad 50. Ciało zsuwa się bez tarcia po powierzchni wewnętrznej półkuli. Znajdź prędkość kątowa ω ciała i siłę reakcji powierzchni w funkcji czasu i kąta. Prędkość początkowa wynosi zero a ciało rozpoczyna ruch z krawędzi półkuli.

Zad 51. Wykazać, że moment pędu planety na orbicie eliptycznej przechodzącej przez punkt P, dany jest wzorem $J = \alpha J_0$. Gdzie J_0 – moment pędu planety na orbicie kołowej przechodzącej przez punkt P, $\alpha = v/v_0$, gdzie v-prędkość planety w punkcie P, a v_0 prędkość planety na orbicie kołowej przechodzącej przez punk P.

Zad 52. Znaleźć kąt odchylenia α pomiędzy asymptotami toru cząstki ciała o masie m odchylanej polem grawitacyjnym ciężkiego ciała o masie M, w zależności od prędkości początkowej v_0 (danej dla bardzo dużej odległości) i parametru b opisujące odległość trajektorii początkowej od środka masy odchylającej M.

Zad 53. Po poziomym stole krąży po okręgu kula o masie m połączona cienką nieważką nicią przymocowaną do jednego punktu. Ciało porusza się ze współczynnikiem tarcia f. W chwili początkowej prędkość była prostopadła do nici i wynosiła v_0. Długość nici jest stała równa r_0. Wyznacz zależność momentu pędu i prędkości kątowej od czasu, siłę naciągu nici w funkcji czasu u kąta.

Zad 54. Wyprowadź równanie opisujące zależność siły od równania toru (wzór Bineta) dla ruchu orbitalnego. Wykaż że planety poruszają się po orbitach eliptycznych wokół Słońca..

Zad 55. Meteoryt w bardzo dużej odległości od Słońca ma prędkość v_0 i porusza się po trajektorii stycznej do prostej odległej od środka Słońca o d. Wyznacz najbliższy od Słońca punk toru meteorytu i prędkość w tym punkcie. Wskazówka: tor meteorytu jest hiperbolą (trajektoria otwarta) i należy skorzystać z zasady zachowania momentu pędu i energii.