

Podstawy elektroniki

dr hab. inż. Michał K. Urbański, prof. uczelni

Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej
Zakład V, „Badań strukturalnych”

Gmach Główny pok 159, Gmach Elektrotechniki klatka A, pok 538
michal.urbanski@pw.edu.pl,
strona <http://www.if.pw.edu.pl/~murba/>

konsultacje wtorek godz 19:00-19:45 pok 159 Gmach Główny
(lub zdalnie) i zdalnie piątek 18:00-19:00

ZASADY ZALICZANIA

Za co punkty

- 1 4 kolokwia trwające każde 45min. obejmujące materiał, z wykładów i ćwiczeń. Na kolokwium będą zadania do rozwiązywania, oceniane systemem punktowym, (1 kol maksimum 12p.)
- 2 Laboratorium 9 ćwiczeń po 5p + wprowadzenie do laboratorium (kol. za 5p),
- 3 całkowita liczba punktów do uzyskania $48+50=98$

Warunki zaliczenia przedmiotu:

- 1 zaliczone trzy kolokwia (każde od 7 punktów) i suma powyżej 25p
- 2 zaliczenie laboratorium – zaliczone przynajmniej 8 laboratoriów na ocenę przynajmniej dostateczną
- 3 obecność na ćwiczeniach
- 4 oceny wg systemu: 3,0 - od 51%, 3,5 - od 61% , 4,0 - od 71%, 4,5 - od 81%, 5,0 - od 91%,

terminy kolokwiów - co czwarte zajęcia

28 października, 25 listopad, 16 grudz. 2024, 27 stycz. 2025
(ostatni wykład)

będą dwa dodatkowe terminy poprawy: w grudniu i na początku lutego (w sesji).

W przypadku przejścia na tryb zdalny kolokwia będą w trybie stacjonarnym lub zdalnym w zależności od obostrzeń

tematyka kolokwiów

- 1 parametry sygnałów, obwody prądu stałego, źródła
- 2 obwody prądu zmiennego, czwórniki
- 3 wzmacniacz operacyjny, filtry, charakterystyki częstotściowe
- 4 tranzystor bipolarny i unipolarny, obliczanie elementów układu wzmacniacza, wzmocnienie, impedancja wejściowa i wyjściowa

ELEMENTY TEORII OBWODÓW

sygnały parametry sygnałów

obwody prądu stałego, prawa Kirchhoffa, superpozycja, układy zastępcze

prąd zmienny, opis zespolony prądów sinusoidalnych, obwody prądu zmiennego

układy liniowe, filtry RC i RL, układ rezonansowy

moc, praca prądu zmiennego

ELEMENTY CZYNNE I NIELINIOWE

dioda, tranzystor bipolarny i tranzystor polowy, wzmacniacz operacyjny

fizyczne podstawy działania tranzystora i diody podstawowe układy wzmacniające filtry dolno- i górno-przepustowy

Sygnały, klasyfikacja, parametry sygnałów. Elementy obwodów: rezystor, kondensator, indukcyjność, źródło napięciowe i prądowe. Obwody liniowe: prawa Kirchhoffa, metody rozwiązywania układów liniowych. Dwójniki i czwórniki. Matematyczny opis czwórników. Układy równoważne, twierdzenia o źródłach zastępczych. Zasada superpozycji, wyznaczanie parametrów układów równoważnych. Opis i analiza obwodów prądu zmiennego: rachunek symboliczny (opis zespolony), wskazy. Dwójniki i czwórniki przy pobudzeniach harmonicznym. Filtry RC i RL. Zależności energetyczne w obwodach prądu zmiennego, dopasowanie źródła i obciążenia.

Układy czynne

Fizyczne podstawy działania elementów półprzewodnikowych.

Diody: charakterystyki, schematy zastępcze, układy z dużymi i małymi sygnałami. Tranzystory bipolarne i tranzystory polowe: zasady działania, charakterystyki. Parametry wielko- i mało-sygnałowe tranzystorów bipolarnych i polowych przy małych i wielkich częstotliwościach, parametry impulsowe.

Zastosowania tranzystorów: liniowe (wzmacniacze) i nieliniowe (przełączniki, układy impulsowe).

Wzmacniacze operacyjne idealne, opis ich działania. Zastosowania w układach liniowych i nieliniowych. Rzeczywiste wzmacniacze operacyjne, ich właściwości i ograniczenia.

Zastosowania wzmacniaczy operacyjnych w układach pomiarowych.

Wiedza i umiejętności potrzebna do rozumienia

podstawowe umiejętności

- 1 matematyka - pochodna, całka, liczby zespolone,
- 2 fizyka - odwody elektryczne

powtórzyć

rozwiązywanie zadań z fizyki
zbiory zadań:

- 1 Paczkowski, Fabiański, Zbiór zadań z fizyki dla maturzystów i kandydatów na studia
- 2 Jędrzej Jędrzejewski, Witold Kruczek, Adam Kujawski, Zbiór zadań z fizyki. Tom 1 i Tom 2 (rozwiązania)
Tom 2 czytać po rozwiązaniu zadań.

Jak się uczyć?. Po co?

rozwiązywać zadania

Rozwiązywać zadania nie zaglądając do rozwiązania. Trenować mózg przez samodzielne poszukiwanie rozwiązania. Najpierw rozwiązać zadania łatwiejsze a potem trudniejsze. Zwrócić do rozwiązania po kilku niepowodzeniach, ale gdy mamy „załadowany” do głowy problem do rozwiązania

co ma zostać w głowie?

Po treningu umysły wartości a dodaną jest wytrenowany umysł, zwiększenie liczby połączeń neuronów.

Co się przyda?

- 1) Wiedza szczegółowa rzadko się przydaje, wiedza ogólna i umiejętności rozwiązywania dowolnych zadań są przydatne
- 2) przydaje się tylko to co umiemy.

Literatura

- J.Osiowski, J.Szabatin Podstawy teorii obwodów, tom 1, 2, 3, WNT Warszawa 1998 (wiele wydań)
- P. Horowitz, W. Hill, Sztuka elektroniki t.1, t2., WKŁ, Warszawa 1992, 1995, 2018
- P. Hempowicz, R. Kięlsznia, A. Piłatowicz, J. Szymczyk, T. Toborowski, A. Wąsowski, A. Zielińska, W. Żurawski, Elektrotechnika i elektronika dla nieelektryków, WNT, W-wa 2004
- T. Stacewicz, A. Kotlicki, Elektronika w laboratorium naukowym, PWN, Warszawa 1994.
- T.C. Hayes, P. Horowitz, Student Manual for The Art of Electronics, Cambridge U.P. 1991.
- U. Tietze, Ch. Schenk, Układy półprzewodnikowe, WNT, Warszawa 1976, 1987, 1996.
- R. Śledziewski, Elektronika dla fizyków, PWN, Warszawa 1984.
- R.C. Dorf Ed. The Electrical Engineering Handbook, CRC Press LLC 2000.

Wielkości podstawowe

Napięcie elektryczne $U = \frac{W}{q}$

gdzie q - ładunek elektryczny, W - praca ładunku w polu elektrycznym.

natężenie prądu $I = \frac{dq}{dt}$

Natężenie pola elektrycznego $E = \frac{F}{q}$

gdzie: F siła pola działająca na ładunek q .

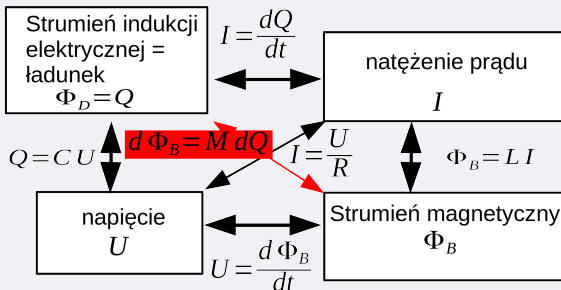
Napięcie elektryczne pomiędzy punktem a i b : $U_{a,b} = \frac{W}{q}$

W - praca wykonana przy przemieszczaniu ładunku z punktu a do b , ponieważ praca $W = \int_a^b \vec{F} d\vec{l}$ więc:

$$U_{a,b} = \frac{\int_a^b \vec{F} d\vec{l}}{q} = \int_a^b \frac{\vec{F}}{q} d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} d\vec{l}$$

Prawo Ohma $I = \frac{U}{R}$ co na poziomie mikroskopowym odpowiada $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, gdzie σ przewodność właściwa, $\vec{j}$ - wektor gęstości prądu.

Elementy obwodów



Rysunek: Powiązania wielkości podstawowych

definicje

Rezystancja: $R = \frac{U}{I}$; pojemność elektryczna: $C = \frac{Q}{U}$;

memrystancja $M = \frac{d\Phi_B}{d\Phi_D}$, indukcyjność $L = \frac{\Phi_B}{I}$.

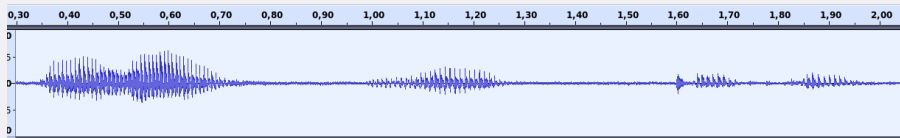
SYGNAŁY

Wyróżniamy nośnik i treść sygnału

- Nośnik sygnału - wielkość fizyczna np. sygnał elektryczny, mechaniczny, akustyczny, itd
- Treść sygnału - informacja zapisana w sygnale:
 - parametry sygnału
 - treść semantyczna

Modelem matematycznym sygnału jest funkcja od czasu.

Sygnał o wartościach rzeczywistych $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Rysunek: Ala ma kota

Parametry sygnałów

wartość średnia AV - (average value):

$$X_{AV} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (1)$$

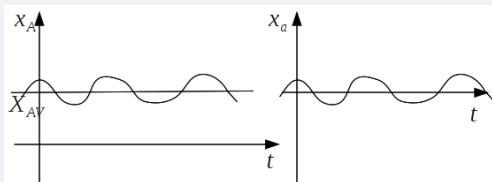
Wartość średnia dla sygnałów okresowych nie zależy od wyboru momentu początkowego całkowania t_0 .

x_A - sygnał całkowity wielkości A ,

x_a - składowa zmienna sygnału wielkości A

sygnał rozkładamy na składową zmienną x_a i stałą $(X_A)_{AV}$:

$$x_A(t) = x_a(t) + (X_A)_{AV} \quad (2)$$



Rozkład sygnału na składowe zmienną i stałą

$$x_A(t) = x_a(t) + (X_A)_{AV} \quad (3)$$

Wartość średnia składowej zmiennej wynosi zero tj.: $(X_a)_{av} = 0$.

Dowód. Do wyliczenia średniej składowej zmiennej x_a stawimy do definicji (3), (wartość średnią można zapisać na dwa sposoby:

$(X_a)_{av} = X_{a(av)}$):

$$\begin{aligned} (X_a)_{av} &= X_{a(av)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_a(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (x_A(t) - (X_A)_{AV}) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_A(t) dt - \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (X_A)_{AV} dt = X_{AV} - X_{AV} = 0 \end{aligned}$$

wartość skuteczna RMS – Root Mean Square

Wartość skuteczna sygnału $x_A(t)$:

$$X_{A(RMS)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_A^2(t) dt} \quad (4)$$

gdzie: t_0 - początek całkowania, dla sygnałów okresowych wybór t_0 nie ma wpływu na wartość całki, T - okres sygnału.

Wartość skuteczna opisuje średnia moc sygnału

Jeśli zapiszemy sygnał jako sumę składowych zmiennej i stałej:

$$x_A(t) = x_a(t) + X_{AV} \quad (5)$$

to mamy:

$$X_{A(RMS)}^2 = X_{a(rms)}^2 + X_{AV}^2 \quad (6)$$

średnia moc sygnału równa jest sumie mocy składowej zmiennej i składowej stałej.

Wartość skuteczna - składowe

$$\begin{aligned} X_{A(RMS)}^2 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_A^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (x_a(t) + X_{AV})^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_a^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} 2x_a(t)X_{AV} dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (X_{AV})^2 dt = \\ &= X_{a(rms)}^2 + 0 + X_{AV}^2 \end{aligned}$$

Wykorzystano fakt, że wartość średnia składowej zmiennej jest

zerowa: $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_a(t) dt = 0$

SYGNAŁY - oznaczenia

litera mała x_A - sygnał wielkości A , wielkość A zależna jest od czasu co zapisujemy: $x_A(t)$

litera wielka X_A - parametr sygnału wielkości A ,

wskaźnik A przy znaku sygnału oznacza nazwę sygnału, np.: x_A - sygnał wielkości A .

Wielkość litery wskaźnika reprezentującego rodzaj wielkości litera wielka odnosi się do całego sygnału, np x_A

litera mała - odnosi się do składowej zmiennej, np x_a oznacza składową zmienną sygnału x_A .

Przykład: I_E - parametr całkowitej wartości prądu emitera i_E

$I_{E(AV)} = (I_E)_{AV}$ - wartość średnia całkowitego prądu emitera i_E

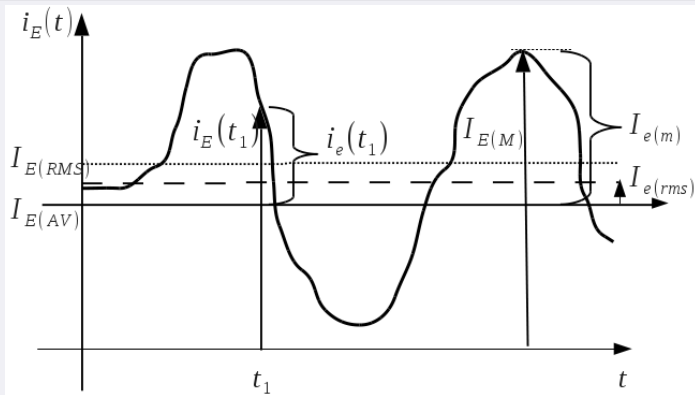
$I_{E(RMS)}$ - wartość skuteczna prądu emitera i_E

$i_E(t)$ - wartość chwilowa prądu emitera i_E

$i_e(t)$ - wartość chwilowa składowej zmiennej prądu emitera i_E .

$I_{e(rms)}$ - wartość skuteczna składowej zmiennej prądu emitera.

Oznaczenia na przykładzie prądu emitera $i_E(t)$



Rysunek: Oznaczenia sygnału i jego parametrów

i_E prąd emitera całkowity, $i_E(t)$ wartość w chwili t , wartość chwilowa. I_E - parametry całkowitego prądu emitera, I_e - parametry składowej zmiennej prądu emitera.

Moc prądu zmiennego

Napięcie $U = \frac{dW}{dq}$, dW - praca wykonana przy przesuwaniu ładunku dq , czyli $dW = Udq$. Praca wykonana w czasie od momentu t_1 do momentu t_2 :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} u(t) dq = \int_{t_1}^{t_2} u(t) i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{u^2(t)}{R} dt = \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt$$

Moc średnia w okresie $T = t_2 - t_1$:

$$P_{AV} = \frac{W}{T} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \right) = \frac{U_{RMS}^2}{R}$$

Operacja uśredniania, różne oznaczenia stosowanie w fizyce

Wartość średnia sygnału $x(t)$:

$$X_{AV} = \bar{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (7)$$

Korzystając z tego oznaczenia: $X_{RMS}^2 = \langle x^2 \rangle$
operator uśredniania jest liniowy:

$$\begin{aligned} \langle x + y \rangle &= \langle x \rangle + \langle y \rangle \\ \langle \alpha x \rangle &= \alpha \langle x \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

dla $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ -liczby rzeczywiste.

Własności średniej i skutecznej

Każdy sygnał można przedstawić jako sumę składowych zmiennej $x_a(t)$ i stałej (równej średniej X_{AV} :

$$x_A(t) = x_a(t) + X_{AV} \quad (9)$$

Wartość średnia:

$$X_{AV} = \langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \quad (10)$$

Średnia składowej zmiennej $\langle x_a(t) \rangle = 0$

Wartość skuteczna w notacji z definicji (10) : $X_{A(RMS)}^2 = \langle x_A^2(t) \rangle$

$$X_{A(RMS)}^2 = X_{a(rms)}^2 + X_{AV}^2 \quad (11)$$

średnia moc sygnału równa jest sumie mocy składowej zmiennej i składowej stałej.

Budowa woltomierza wartości skutecznej

miernik wartości skutecznej powinien składać się z bloków wykonujących funkcje:

- ❶ podnoszenie do kwadratu $x^2(t)$, (ang „square”)
- ❷ uśredniania (ang „mean”)
- ❸ pierwiastkowanie (ang „root”)

Skrót RMS pochodzi od pierwszych liter operacji niezbędnych do wyliczenia wartości skutecznej.

Przyrząd wykonujący wszystkie opisane operacji nazywany jest przyrządem „True RMS”.

W praktyce są dwie możliwości wykonania opisanych operacji: analogowo i cyfrowo. W układzie cyfrowym sygnał próbkuje się, następnie układ przetwornika analogowo-cyfrowego który zamienia sygnał analogowy na cyfry i dalej komputer (procesor) wylicza numerycznie kwadrat wielkości całkuje numerycznie i pierwiastkuje wynik.

Budowa uproszczonego woltomierza wartości skutecznej

W tanich przyrządach mierzących natężenie prądu i napięcie elektryczne wykorzystuje się układy, które wykonują operację uśredniania sygnału a następnie przeskalowania tak aby uzyskać zgodność z prawdziwą wartością napięcia dla sygnału sinusoidalnego.

Ponieważ wartość średnia sygnału sinusoidalnego równa jest zeru więc należy wyznaczyć średnią sygnału wyprostowanego.

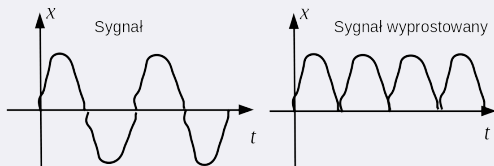
Możliwe są dwa rodzaje układów prostujących:

- 1 prostownik dwupołówkowy,
- 2 prostownik jednopołówkowy

Prostownik dwupołkowy

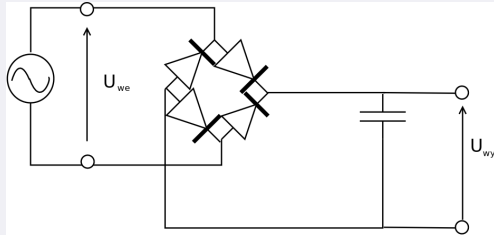
Prostownanie dwupołkowe opisane jest wzorem:

$$x_{prost} = |x(t)| = \begin{cases} x(t) & \text{jeżeli } x(t) \geq 0 \\ -x(t) & \text{jeżeli } x(t) < 0 \end{cases} \quad (12)$$



Rysunek: Prostownanie dwupołkowe

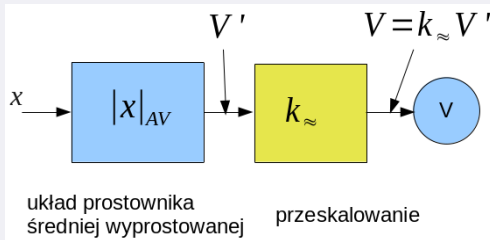
Prostownik dwupołówkowy - układ elektroniczny



Rysunek: Prostownik dwupołówkowy z wykorzystanie czterech diod (mostek Graetza)

Woltomierz wartości skutecznej - uproszczony

Konstrukcja uproszczona: miernik średniej wyprostowanej wyskalowany w wartości skutecznej napięcia sinusoidalnego.



V' - napięcie średnie sygnału wyprostowanego:

$$V' = |X|_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt \quad (13)$$

Współczynnik przeskalowania (kształtu) $k_{\sim}$ tak dobrany aby miernik wskazywał wartość skuteczną dla sygnału sinusoidalnego.

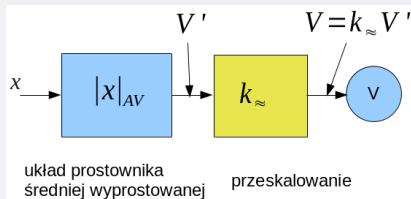
Woltomierz wartości skutecznej - uproszczony

obliczenia dla sygnału sinusoidalnego $x(t) = A \sin(\omega t)$

$$\begin{aligned} V' &= |X|_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T |A \sin(\omega t)| dt = \\ &= \frac{1}{T} 2 \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin(\omega t) dt = A \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (A \sin(\omega t))^2 dt} = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Współczynnik przeskalowania $k_{\approx}$ jest tak dobrany aby $V = X_{RMS}$ dla sygnału sinusoidalnego.



podstawiając:

$$\begin{aligned} V &= k_{\approx} |X|_{AV} = X_{RMS} \text{ czyli} \\ k_{\approx} &= \frac{X_{RMS}}{|X|_{AV}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11 \end{aligned}$$

Woltomierz wartości skutecznej - uproszczony

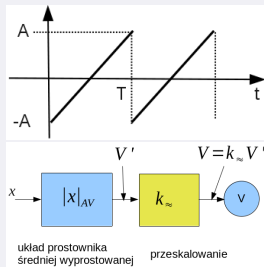
obliczenia dla sygnału trójkątnego $x(t) = at + b$ dla $0 < x < T$,
gdzie $a = \frac{2A}{T}$ i $b = -A$.

$$V' = |X|_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt =$$
$$= \frac{2}{T} \int_0^T |at + b| dt = \frac{A}{2}$$

$$X_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (at + b)^2 dt} = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

współczynnik kształtu dla trójkąta :

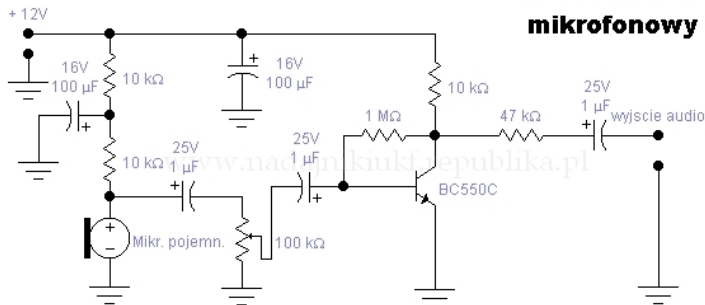
$$k_{\Delta} = \frac{X_{RMS}}{|X|_{AV}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (15)$$



Wskażanie woltomierza:

$$V = k_{\approx} V' = k_{\approx} |X|_{AV} =$$
$$= k_{\approx} \frac{X_{RMS}}{k_{\Delta}} = \frac{k_{\approx}}{k_{\Delta}} X_{RMS}$$

Wzmacniacz mikrofonowy



Rysunek: Przedwzmacniacz mikrofonowy - do przemyślenia

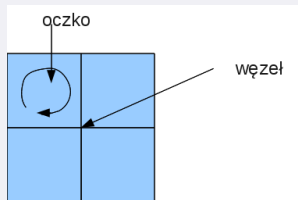
Prawa podstawowe - Prawa Kirchhoffa

1 zasada zachowania energii.

Dla każdego oczka:

$$\sum_{k=1}^{K_u} u_k = \sum_{n=1}^N E_n \quad (16)$$

gdzie K_u - składowych napięć w oczku,
 N - liczba sił elektromotorycznych (źródeł napięciowych).



2 zasada zachowania ładunku.

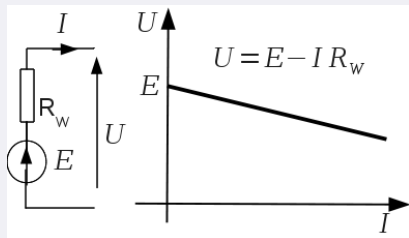
Dla każdego węzła:

$$\sum_{k=1}^{K_i} i_k = 0 \quad (17)$$

Rysunek: Schematyczne przedstawienie węzłów i oczek

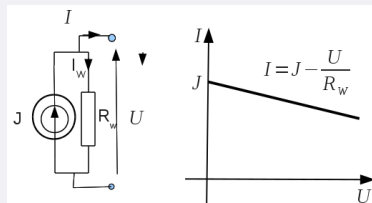
gdzie: K_i - liczba ramion w węźle.

Źródło prądowe i napięciowe



Rysunek: Charakterystyka prądowo-napięciowa źródła napięciowego

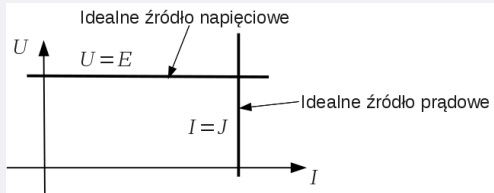
równanie opisujące źródło napięciowe: $U = E - I R_w$



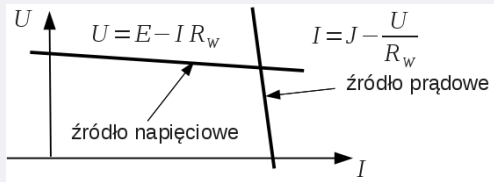
Rysunek: Charakterystyka prądowo-napięciowa źródła prądowego $I = J - \frac{U}{R_w}$

Dla schematu napięciowego mamy $U = J R_w - I R_w$, czyli siła elektromotoryczna napięciowego układu zastępczego dla źródła prądowego wynosi: $E_z = J R_w$

Idealne źródła napięciowe i prądowe



Rysunek: Idealne źródło prądowe napięciowe



Rysunek: źródło napięciowe i prądowe na wykresie $U=U(I)$

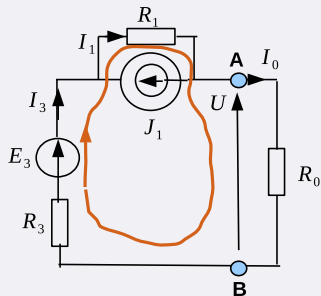
Prawa Kirchhoffa - stosowanie

1. bilans napięć w oczku obejmuje jedynie źródła napięciowe
2. oczko musi być domknięte - jeśli w oczku jest źródło prądowe to linia zamykająca oczko obejmuje rezystancję wewnętrzną źródła prądowego (18)
3. źródła prądowe uwzględnia się w bilansie prądów w węźle (19).

$$E_3 = I_3 R_3 + I_1 R_1 + U \quad (18)$$

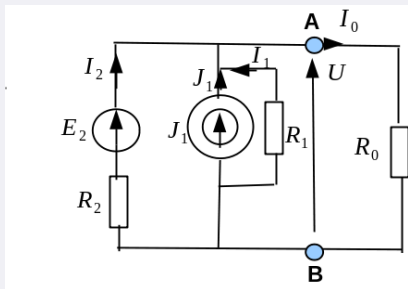
$$I_3 + J_1 = I_1 \quad (19)$$

$$I_0 = I_1 - J_1 = I_3 \quad (20)$$



Rysunek: Oczko i węzeł dla źródeł prądowych. Oczko musi być zamknięte, ponieważ napięcie na źródle prądowym jest nieokreślone oczko obejmuje rezystor R_1 (18)

przykład połączenia źródeł napięcia i prądu



Rysunek: Układ dwóch źródeł

Wyznaczyć wydajność
zastępczego źródła prądowego.
Wypisać równania Kirchhoffa

$$E_2 = I_1 R_1 - I_1 R_1 \quad (21)$$

$$E_2 = U + I_2 R_2 \quad (22)$$

$$J_1 + I_1 + I_2 = I_0 \quad (23)$$

Równania (21) i (22) dodajemy
stronami i otrzymujemy

$$I_1 = -\frac{U}{R_1}.$$

Wstawiamy to do równania
pierwszego (21) i otrzymujemy:

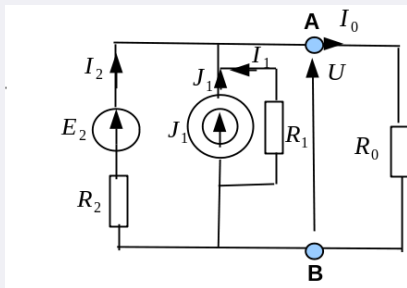
$$I_2 = \frac{E_2 - U}{R_2}.$$

I_1 i I_2 wstawiamy do trzeciego
(23):

$$I_0 = J_2 + \frac{E_2}{R_2} - U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

(24)

przykład połączenia źródeł napięcia i prądu



Rysunek: Układ dwóch źródeł

Wyznaczyć wydajność
zastępczego źródła prądowego.

$$E_2 = I_1 R_1 - I_1 R_1$$

$$E_2 = U + I_2 R_2$$

$$J_1 + I_1 + I_2 = I_0$$

$$I_0 = J_2 + \frac{E_2}{R_2} - U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (25)$$

równanie to ma postać:

$$I_0 = J_z - U \frac{1}{R} \quad (26)$$

zadanie domowe

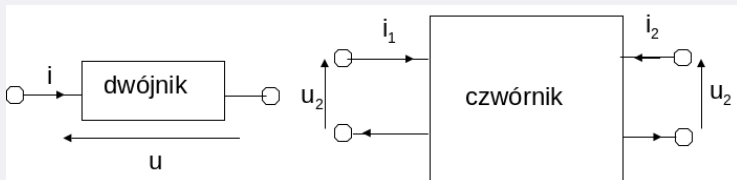
zadanie

uzasadnij, że prawa Kirchhoffa wynikają z zasad zachowania energii i ładunku.

zasady punktowania

- Pierwsze 10 rozwiązań będzie punktowane w skali 0-5p (ale mogą uwzględnić więcej niż 10 poprawnych)
- decyduje data otrzymania maila, odpowiedzi czytamy do niedzieli.
- wysyłać na adres michal.urbanski@pw.edu.pl
- punkty powyższe nie dodają się do żadnego kolokwium i go nie zastępują - nie zmieniają kryterium zaliczenia (dodają się do sumy)
- format maila: skan rękopisu, LaTeX, inny edytor.
(imię_nazwisko_Kirchhoff.typ)

Technologia pudełkowa

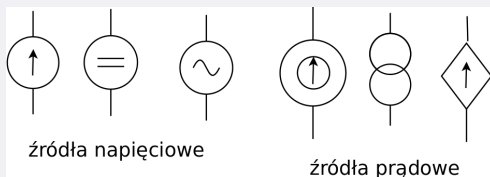


Rysunek: Schematy blokowe („czarne skrzynki”) dwójnika i czwórnika

Konwencja strzałek zazwyczaj zakłada się, że: w dwójniku – prąd wpływa do układu (strzałka skierowana do pudełka) z jednego końca i wypływa z drugiego, zakładamy ciągłość prądu w czwórniku – prąd wpływa do wejścia i wyjścia z jednego końca i wypływa z drugiego.

Czasami wygodniej jest założyć inną orientację strzałek, zmienia to znak prądu w równaniach, ale wynik obliczeń pozostaje ten sam.

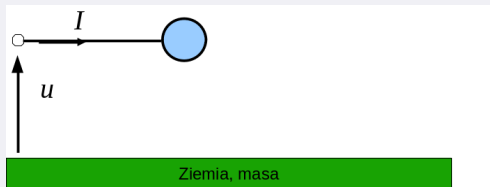
Symbole źródeł



Rysunek: oznaczenia źródeł

„jednik” i założenia technologii pudełkowej

czy możliwy jest układ z jednym odprowadzeniem?



Rysunek: Układ z jednym wyprowadzeniem

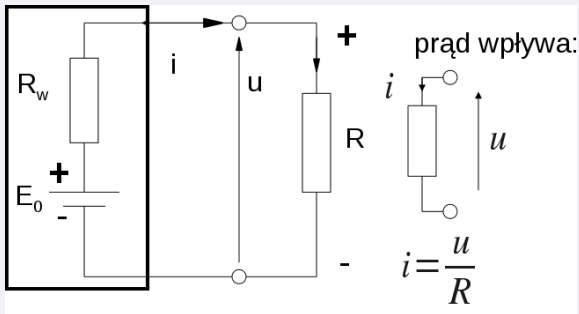
założenia technologii pudełkowej

układy można opisać jako układy o parametrach skupionych, ale: świat zjawisk fizycznych ma naturę pól elektromagnetycznych i trzeba go opisać parametrami pól. Izolowane wejścia i wyjścia są uproszczeniem.

układy o parametrach rozłożonych

Zasady wskaźnikowania i ustalania znaków

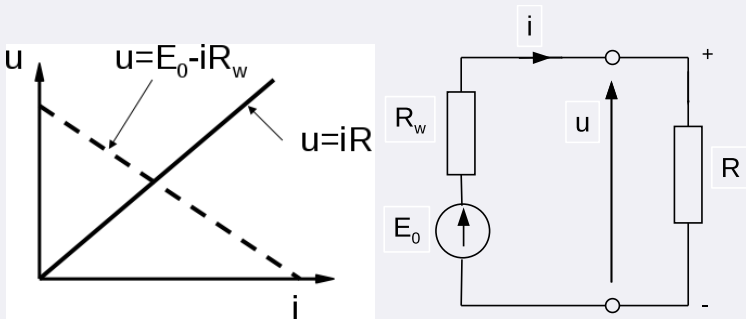
Prąd płynie od plusa do minusa:



Rysunek: strzałkowanie napięć i prądów źródła napięciowego i rezystora (układu biernego). Prąd wypływa ze źródła i wpływa do opornika

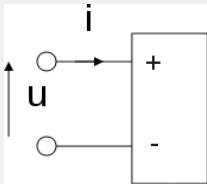
$$\text{dla źródła } u = E_0 - iR_w \quad \text{dla rezystora } u = iR \quad (27)$$

Źródło napięciowe - prawa Kirchhoffa



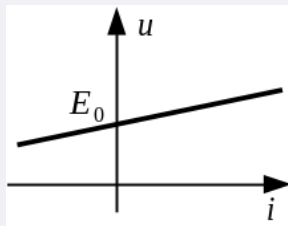
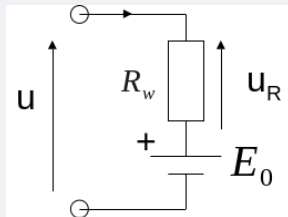
Rysunek: Charakterystyka prądowo napięciowa źródła napięciowego. **Linia przerywana** – zależność napięcia od natężenia prądu dla źródła napięciowego o sile elektro-motorycznej E_0 o rezystancji wewnętrznej R_w : $u = E_0 - iR_w$, **linia ciągła** - równanie rezystora R : $u = iR$

Dwójnik

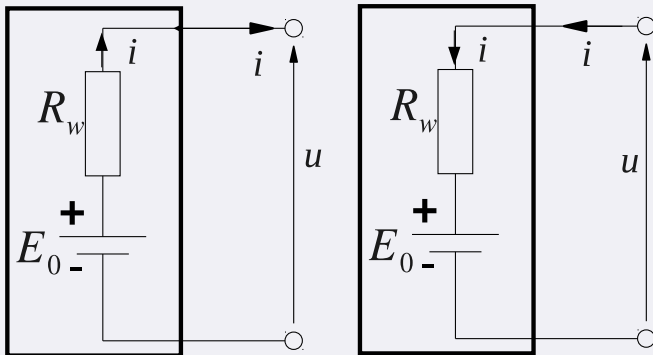


Rysunek: Dwójnik - prąd wpływa do dwójnika, napięcie – strzałka od strony +.

Po prawej: Dwójnik aktywny zastrzałkowany jak dwójnik bierny i zależność napięcia od prądu dla strzałkowania jak dla dwójnika biernego: $u = E + iR_w$



Porównanie dwóch przypadków kierunków prądu



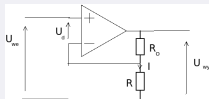
$$u = E_0 - iR_w$$

$$u = E_0 + iR_w$$

Rysunek: Różne rodzaje strzałek prądu i równania.

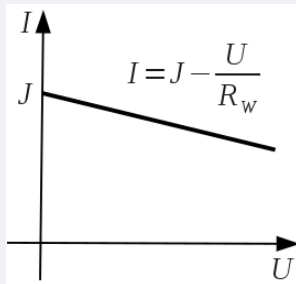
$$\text{układ lewy } E_0 = iR_w + u \quad \text{układ prawy } E_0 = -iR_w + u \quad (28)$$

Źródło prądowe



Rysunek: Źródło prądowe

równanie: $J = I + I_W$ i $I_W = \frac{U}{R_W}$
czyli $I = J - \frac{U}{R_W}$



Rysunek: Charakterystyka prądowo-napięciowa źródła prądowego

Wyliczamy napięcie:

$$U = JR_W - IR_W \quad (29)$$

RÓWNOWAŻNOŚĆ SYSTEMÓW

kiedy dwa wielomiany $W(x)$ i $H(x)$ są równe: gdy mają jednakowe współczynniki

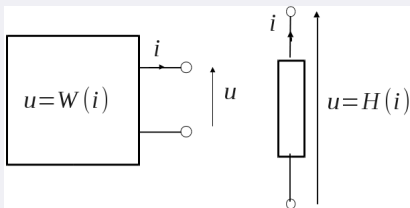
$$W(x) = ax^2 + bx + c \quad (30)$$

$$H(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (31)$$

$$W(x) \equiv H(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \gamma \end{cases} \quad (32)$$

RÓWNOWAŻNOŚĆ DWÓJNIKÓW - układy zastępcze

Dwa dwójniki są równoważne jeśli równania są równoważne, czyli jeśli zależności prądów od napięć są takie same.



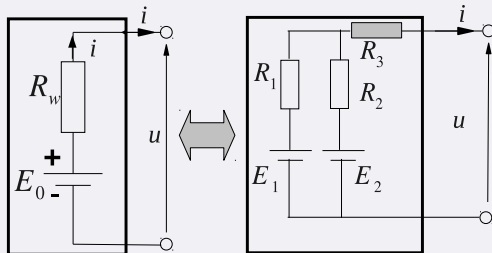
Rysunek: Dwa dwójniki opisane równaniami liniowymi $W(i)$ i $H(i)$. W obu przypadkach prądy zostały zaznaczone jako wypływające.

$$W(i) = a + b i \text{ oraz } H(i) = E_0 - R_w i \quad (33)$$

$$W(i) \equiv H(i) \Leftrightarrow \begin{cases} a = E_0 \\ b = -R_w \end{cases} \quad (34)$$

Układ liniowy - dwa parametry

Układ liniowy opisany jest równaniem liniowym $H(i) = ai + b$;
równanie liniowe ma dwa parametry a i b .

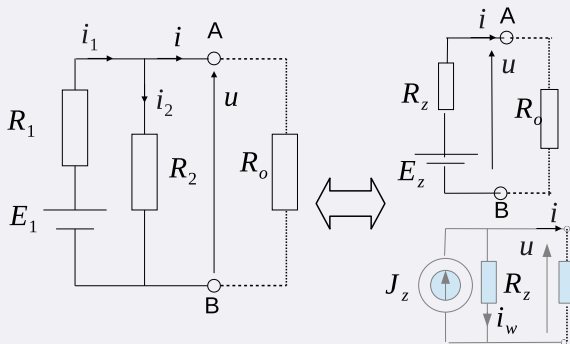


Rysunek: Każdy układ liniowy opisany jest dwoma parametrami czyli jest równoważny dwójnikowi złożonemu z siły elektromotorycznej E_0 i rezystancji R_w .

czyli układ liniowy złożony z dowolnej liczby elementów liniowych jest opisywalny układem dwuelementowym.

Przykład wyznaczania układu zastępczego

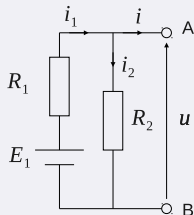
Układ złożony z idealnego źródła zastępczego i dwóch rezystorów obciążony jest rezystorem R_O . W celu wyznaczenia prądu i wyznaczamy parametry zastępcze tego układu.



Rysunek: Układ liniowy złożony z trzech elementów i jego schemat zastępczy, $i = \frac{E_z}{R_z + R_O}$

Przykład wyznaczania układu zastępczego - obliczenia

Wyznacz zastępczą wartość siły elektromotorycznej E_z i zastępczą rezystancję wewnętrzną R_z , czyli wyznacz parametry E_z i R_z modelu liniowego: $u = E_z - iR_z$ poniższego układu:



Rysunek: Układ liniowy
złożony z trzech elementów

$$E_1 = i_1 R_1 + i_2 R_2 \quad (35)$$

$$i_1 = i + i_2 \quad (36)$$

$$u = i_2 R_2 \quad (37)$$

$$E_1 = (i + i_2) R_1 + i_2 R_2 \quad (38)$$

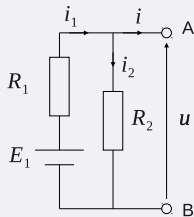
$$i_2 = \frac{E_1 - R_1 i}{R_1 + R_2} \quad (39)$$

$$u = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - i \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (40)$$

$$\text{parametry zastępcze: } E_z = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ i } R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (41)$$

Przykład wyznaczania układu zastępczego - obliczenia 2

Wyznacz zastępczą wartość wydajności źródła prądowego J_z
wartość zastępczą siły elektromotorycznej E_z i zastępczą
rezystancję wewnętrzną R_z , poniższego układu:



Rysunek: Układ liniowy,
zastępcze równania

$$i = J_z - u \frac{1}{R_z} \text{ lub}$$

$$u = E_z - iR_z$$

$$i_1 = \frac{E_1 - u}{R_1} ; i_2 = \frac{u}{R_2} \quad (42)$$

$$i = i_1 - i_2 \quad (43)$$

$$i = \frac{E_1 - u}{R_1} - \frac{u}{R_2} \quad (44)$$

$$i = \frac{E_1}{R_1} - u \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (45)$$

$$J_z = \frac{E_1}{R_1} ; R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (46)$$

$$\text{oraz } E_z = J_z R_z \quad (47)$$

INTERPRETACJA

Szukamy opisu układu liniowego przy pomocy równania $u = H(i)$ dla $H(i) = E_z - iR_z$.

Rozwiązując równania Kirchhoffa mamy $u = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - i \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ więc:

$$E_z = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ i } R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (48)$$

E_z - jest to napięcie na zaciskach układu AB gdy nie ma obciążenia (gdy nie płynie prąd)

$$E_z = H(0) \quad (49)$$

Rezystancja R_z jest rezystancją widzianą z zacisków AB układu:

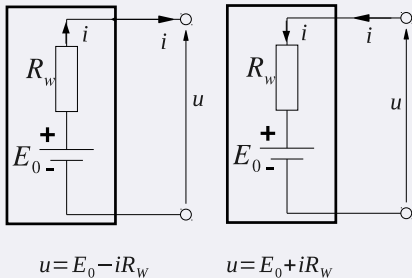
$$R_z = -\frac{d}{di} H(i) = -\frac{du}{di} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (50)$$

$$\text{lub } R_z = -\frac{u}{i} \text{ gdy } E_1 = 0 \text{ (źródła są „wyzerowane”)} \quad (51)$$

Dlaczego „-” we wzorze na rezystancję

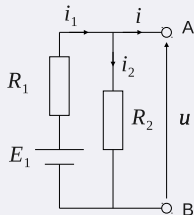
Rezystancja R_z jest rezystancją widzianą z zacisków AB układu:

$$R_z = -\frac{d}{di}H(i) = -\frac{du}{di} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (52)$$



Rysunek: gdy $u = E_0 - iR_w$ wtedy $R_z = -\frac{du}{di}$, gdy $u = E_0 + iR_w$ wtedy $R_z = +\frac{du}{di}$

Rezystancja zastępcza - obliczenia dla składowej zmiennej



Rysunek: Układ liniowy dwa rezystory ze źródłem napięciowym, Rezystancja zastępcza równoległe połączenie R_1 i R_2

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (53)$$

$$\frac{1}{R_z} = -\frac{\Delta i}{\Delta u}$$

$$i = i_1 - i_2 \text{ czyli } \Delta i = \Delta i_1 - \Delta i_2$$

$$\frac{1}{R_z} = -\frac{\Delta i_1}{\Delta u} + \frac{\Delta i_2}{\Delta u}$$

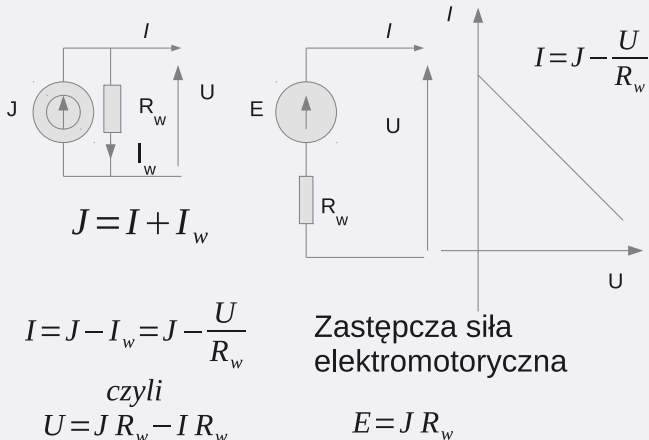
$$u = i_2 R_2 \text{ czyli } \Delta u = \Delta i_2 R_2$$

$$u = E_1 - i_1 R_1 \text{ czyli } \Delta u = -\Delta i_1 R_1$$

$$-\frac{\Delta i_1}{\Delta u} = \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{\Delta i_2}{\Delta u} = \frac{1}{R_2}$$

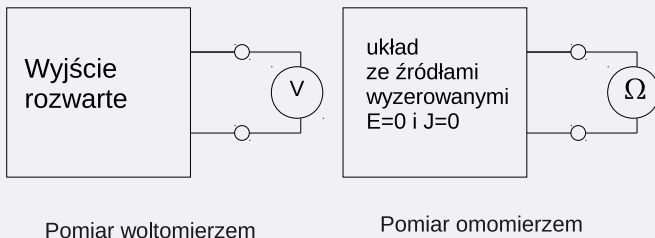
Źródło prądowe i źródło napięciowe



Rysunek: transformacja źródło prądowe - źródło napięciowe

Źródło zastępcze prądowe – twierdzenie Thevenina

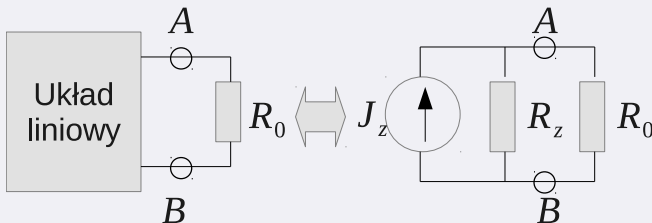
Siła elektromotoryczna = napięcie dla prądu zerowego
rezystancja = rezystancja układu dla zwartych sił elektromotorycznych i rozwartych źródeł prądowych



Rysunek: Zasada Thevenina

Twierdzenie Nortona o prądowym źródle zastępczym

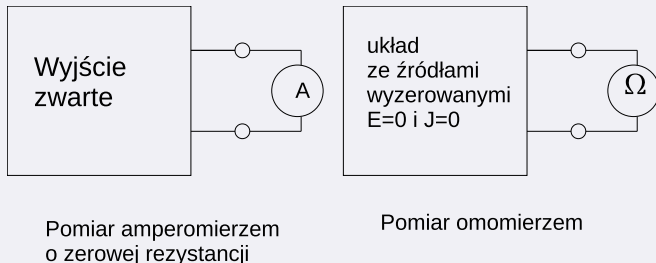
Każdy dwójnik liniowy może być zastąpiony źródłem prądowym o wydajności J_z i rezystancji wewnętrznej R_z .



Rysunek: Układ zastępczy prądowy

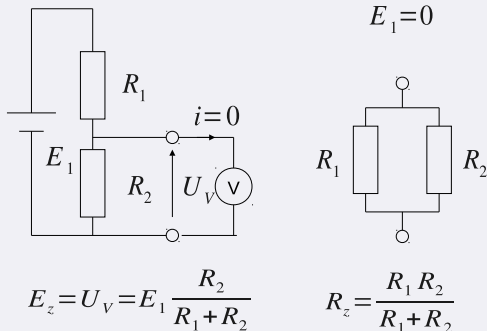
Źródło zastępcze prądowe – twierdzenie Nortona

Wydajność prądowa źródła prądowego = prąd zwarcia - prąd dla
zerowego napięcia wyjściowego
rezystancja = rezystancja układu dla zwartych sił
elektromotorycznych i rozwartych źródeł prądowych



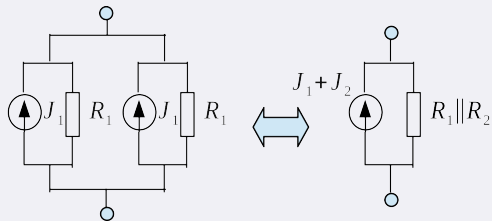
Rysunek: Zasada Nortona

Zastępcza wartość siły elektromotorycznej i rezystancji

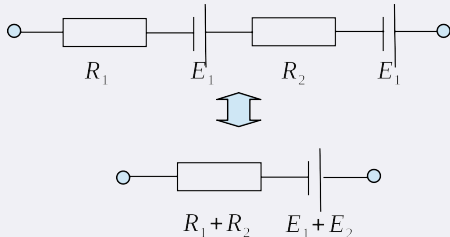


Rysunek: **Zasada Thevenina**: parametry napięciowego źródła zastępczego otrzymujemy – napięcie gdy prąd obciążenia dwójnika jest zerowy, rezystancja wewnętrzna gdy siły elektromotoryczne są zerowe.

Łączenie źródeł prądowych i napięciowych



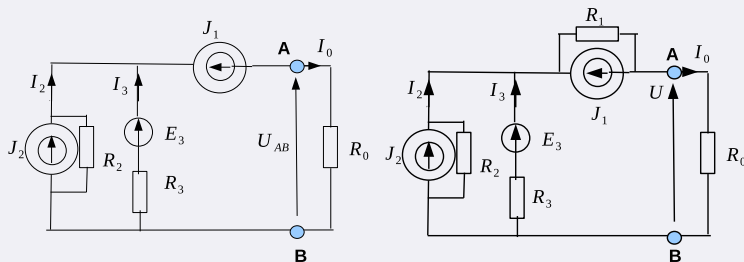
Łączenie źródeł prądowych:
prądy wpływające do węzła dodają się.



Łączenie źródeł napięciowych:
napięcia w oczku dodają się (prace dodają się)

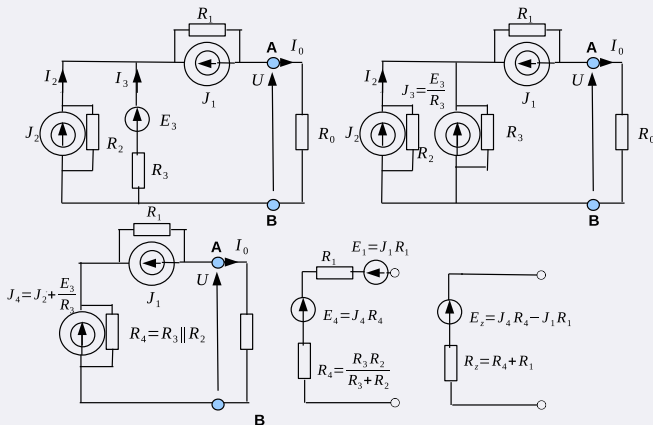
Rysunek: łączenie źródeł

Przykład trzech źródeł



Rysunek: Wyznacz: a) prąd I_0 płynący przez rezystor R_0 , b) parametry źródła zastępcze prądowego i napięciowe z punktu widzenia zacisków AB, dane są elementy układu.

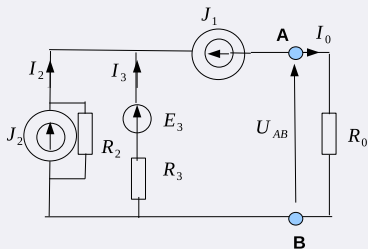
Etapy transformacji równoważnej



Rysunek: Kolejne fazy przekształcania układu

$$E_z = \left(J_2 + \frac{E_3}{R_3} \right) \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} - J_1 R_1; R_z = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1 \quad (54)$$

Układ bez rezystora R_1



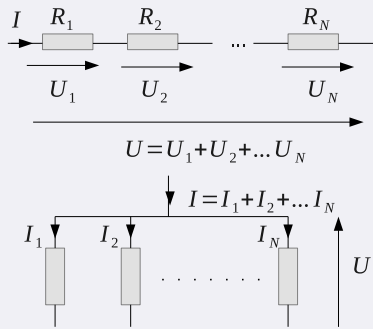
Rysunek: Brak rezystora R_1 oznacza $R_1 \rightarrow \infty$

Wydajność zastępczego źródła prądowego:

$$J_z = \frac{E_z}{R_z} = \frac{\left(J_2 + \frac{E_3}{R_3}\right) \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} - J_1 R_1}{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \infty} -J_1 \quad (55)$$

Rezystancja i konduktancja układów szeregowych i równoległych

Układ szeregowy - napięcie jest sumą napięć, układ równoległy - prąd jest sumą prądów.



Rysunek: Połączenie szeregowe i równoległe rezystorów

Układ szeregowy

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_N}{I} =$$

$$\frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \dots + \frac{U_N}{I} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

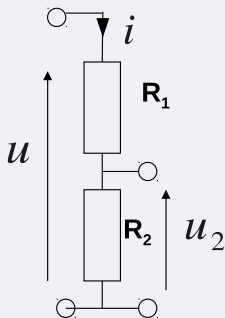
układ równoległy

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I_1 + I_2 + \dots + I_N}{U} =$$

$$= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

konduktancja $G = G_1 + G_2 + \dots + G_N$

Dzielnik napięcia



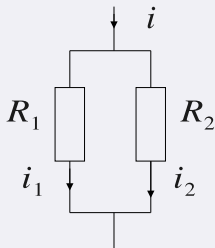
$$i = \frac{u}{R_1 + R_2} \quad (56)$$

$$u_2 = iR_2 \quad (57)$$

$$u_2 = u \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (58)$$

Rysunek: Dzielnik napięcia, napięcie jest proporcjonalne do rezystancji

Dzielnik prądowy



$$\left. \begin{array}{l} i = i_1 + i_2 \\ i_1 R_1 = i_2 R_2 \end{array} \right\} i = i_2 \frac{R_2}{R_1} + i_2 \quad (59)$$

$$i_2 = i \frac{R_1}{R_1 + R_2} = i \frac{G_2}{G_1 + G_2} \quad (60)$$

Rysunek: Dzielnik prądowy

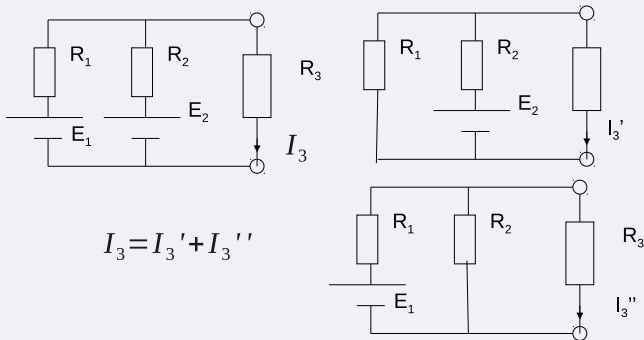
Rezystancja: $R = \frac{u}{i}$, konduktancja $G = \frac{i}{u}$.

Metody wyznaczania prądów w układach liniowych

- ❶ rozwiązanie równań Kirchhoffa
- ❷ metoda prądów oczkowych (obwodowych)
- ❸ zasada superpozycji
- ❹ metoda źródła zastępczego
 - reguła Thevenina o napięciowym źródle zastępczym
 - Twierdzenie Nortona o prądowym źródle zastępczym
 - zasada superpozycji
 - transformacja źródło prądowe - napięciowe i składanie źródeł prądowych i napięciowych
- ❺ metoda potencjałów węzłowych

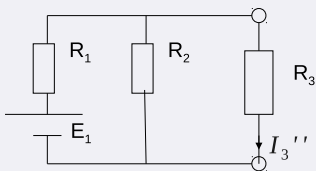
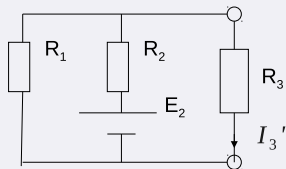
Zasada superpozycji

Prąd = sumą prądów pochodzących od poszczególnych źródeł
skrót: „prąd” = natężenie prądu elektrycznego



Rysunek: Zasada superpozycji

Zasada superpozycji



Rysunek: Zasada superpozycji, obliczenia

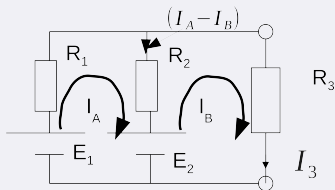
$$I_3' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} \frac{R_1}{R_3 + R_1} \quad (61)$$

$$I_3'' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \frac{R_2}{R_3 + R_2} \quad (62)$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' \quad (63)$$

Metoda prądów oczkowych

Zamieniamy wszystkie źródła na źródła napięciowe



$$\begin{bmatrix} E_1 - E_2 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix}$$

$$I_1 = I_A \quad (64)$$

$$I_2 = I_A - I_B \quad (65)$$

$$I_3 = I_B \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} E_1 - E_2 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_1 - E_2 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

należy znaleźć macierz odwrotną macierzy $\bar{\bar{R}}$

$$\bar{\bar{R}} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$

wyznacznik:

$$W = \det \bar{\bar{R}} = R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3$$

macierz odwrotną wyznaczamy

wykonując transpozycję T macierzy dopełnień D :

$$\bar{\bar{R}}^{-1} = \frac{1}{W} \left(\bar{\bar{R}}^D \right)^T$$

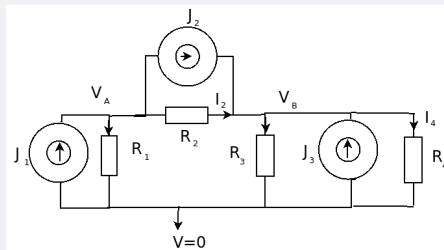
$$I_A = \frac{\det \begin{bmatrix} E_1 - E_2 & -R_2 \\ E_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}}{W}$$

$$I_B = \frac{\det \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & E_1 - E_2 \\ -R_2 & E_2 \end{bmatrix}}{W}$$

$$I_3 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{W}$$

Metoda potencjałów węzłowych

Zamieniamy wszystkie źródła na źródła prądowe



prądy:

$$\begin{bmatrix} J_A \\ J_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix}$$

$$J_A = J_1 - J_2$$

$$J_B = J_2 + J_3$$

$$i_4 = \frac{V_B}{R_4}$$

$$i_3 = \frac{V_B}{R_3}$$

$$i_1 = \frac{V_A}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

Czwórniki

Macierz impedancyjna

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Macierz hybrydowa

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

macierz admitancyjna

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (69)$$



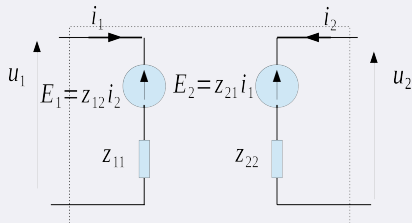
Rysunek: czwórnik

macierz łańcuchowa

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Macierz impedancyjna

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

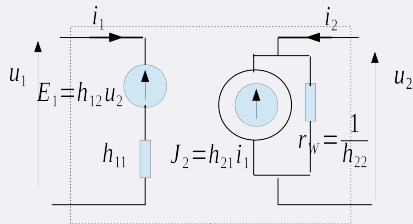


$$u_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \quad (72)$$

$$u_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \quad (73)$$

Macierz hybrydowa

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (74)$$



$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2 \quad (75)$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2 \quad (76)$$

elementy macierzowe z i h

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$z_{11} = \left. \frac{du_1}{di_1} \right|_{i_2=0}$$

$$z_{12} = \left. \frac{du_1}{di_2} \right|_{i_1=0}$$

$$z_{21} = \left. \frac{du_2}{di_1} \right|_{i_2=0}$$

$$z_{22} = \left. \frac{du_2}{di_2} \right|_{i_1=0}$$

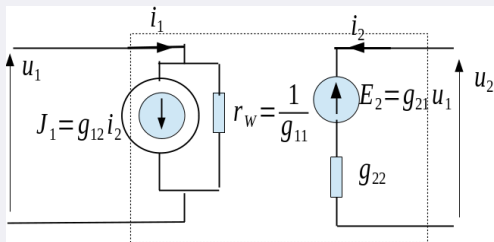
$$h_{11} = \left. \frac{du_1}{di_1} \right|_{u_2=0}$$

$$h_{12} = \left. \frac{du_1}{du_2} \right|_{i_1=0}$$

$$h_{21} = \left. \frac{di_2}{di_1} \right|_{u_2=0}$$

$$h_{22} = \left. \frac{di_2}{du_2} \right|_{i_1=0}$$

macierz hybrydowa odwrotna



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$i_1 = \frac{u_1}{r_w} + J_1 = g_{11}u_1 + g_{12}i_2$$

$$u_2 = E_2 + g_{22}i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}i_2$$

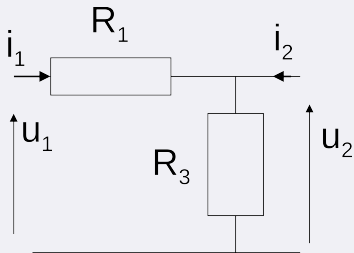
$$g_{11} = \left. \frac{di_1}{du_1} \right|_{i_2=0}$$

$$g_{12} = \left. \frac{di_1}{di_2} \right|_{u_1=0}$$

$$g_{21} = \left. \frac{du_2}{du_1} \right|_{i_2=0}$$

$$g_{22} = \left. \frac{du_2}{di_2} \right|_{u_1=0}$$

Czwórnik typu odwrócone Γ (dzielnik napięcia)



w innej postaci:

$$u_1 = i_1 R_1 + u_2$$

$$i_2 = -i_1 + u_2 \frac{1}{R_3}$$

$$u_1 = i_1 R_1 + u_2$$

$$u_1 = i_1 R_1 + (i_1 + i_2) R_3 = i_1 (R_1 + R_3) + i_2 R_3$$

$$u_2 = (i_1 + i_2) R_3 = i_1 R_3 + i_2 R_3$$

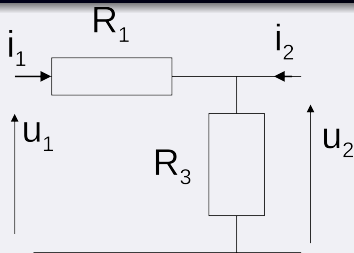
macierz elementów z:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_3 \end{bmatrix}$$

elementy macierzy
mieszanej (hybrydowej):

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}$$

Czwórnik typu odwrócone Γ (dzielnik napięcia)



Kirchhoffa:

$$u_1 = i_1(R_1 + R_3) + i_2 R_3 \quad (77)$$

$$u_2 = (i_1 + i_2)R_3 = i_1 R_3 + i_2 R_3 \quad (78)$$

szukamy elementów macierzy
hybrydowej odwrotnej g :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

z równania (77):

$$i_1 = \frac{1}{R_1 + R_3} u_1 - i_2 \frac{R_3}{R_1 + R_3} \quad (79)$$

po wstawieniu tego
równania do (78)

$$u_2 = u_1 \frac{R_3}{R_1 + R_3} + i_2 \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

elementy macierzy
hybrydowej odwrotnej:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + R_3} & -\frac{R_3}{R_1 + R_3} \\ \frac{R_3}{R_1 + R_3} & \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \end{bmatrix}$$

Transmitancja



Rysunek: czwórnik

Transmitancja układu (element macierzy hybrydowej odwrotnej)

$$K_U = g_{21} = \left. \frac{u_2}{u_1} \right|_{i_2=0} \quad (80)$$

dla składowej zmiennej (dla układów nieliniowych)

$$K_U = \left. \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} \right|_{\Delta i_2=0} \quad (81)$$

Rezystancja wejściowa i wyjściowa - elementy macierzy g

Rezystancja wejściowa:

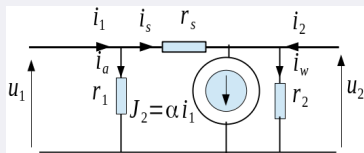
$$R_{wej} = \frac{1}{g_{11}} = \left. \frac{\Delta u_1}{\Delta i_1} \right|_{\Delta i_2=0} \quad (82)$$

Rezystancja wyjściowa:

$$R_{wyj} = \frac{1}{g_{22}} = \left. \frac{\Delta u_2}{\Delta i_2} \right|_{\Delta u_1=0} \quad (83)$$

schemat zastępczy tranzystora

sprężenie zwrotne wyjścia z wejściem rezystor r_s .



Układ równań Kirchhoffa:

$$u_1 = r_1(i_1 - i_s)$$

$$i_s r_s = u_1 - u_2$$

$$i_s + i_2 = \alpha i_1 + i_w$$

$$u_2 = i_w r_2$$

$$u_1 = \frac{r_1 r_s}{r_1 + r_s} i_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_s} u_2$$

$$i_2 = \left(\alpha - \frac{r_1}{r_1 + r_s} \right) i_1 + \left(\frac{1}{r_1 + r_s} + \frac{1}{r_2} \right) u_2$$

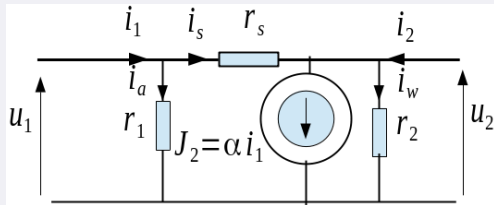
$$h_{11} = \frac{u_1}{i_1} \Big|_{u_2=0} = \frac{r_1 r_s}{r_1 + r_s}$$

$$h_{12} = \frac{u_1}{u_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{r_1}{r_1 + r_s}$$

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{u_2=0} = \alpha - \frac{r_1}{r_1 + r_s}$$

$$h_{22} = \frac{i_2}{u_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{1}{r_1 + r_s} + \frac{1}{r_2}$$

Układ zastępczy tranzystora - przybliżenie dużego $\frac{r_s}{r_1}$

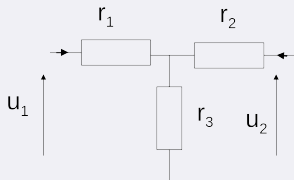


Rysunek: Układ zastępczy tranzystora, rezystor r_s - sprzężenie zwrotne wyjścia z wejściem.

Dla dużej rezystancji $r_s \gg r_1$, czyli dla małego wpływu napięcia wyjściowego na wejściowe: $\frac{r_s}{r_1} \gg 1$:

$$h_{11} = \frac{r_1 r_s}{r_1 + r_s} \simeq r_1; \quad h_{12} = \frac{r_1}{r_1 + r_s} \simeq \frac{r_1}{r_s}$$
$$h_{21} = \alpha - \frac{r_1}{r_1 + r_s} \simeq \alpha; \quad h_{22} = \frac{1}{r_1 + r_s} + \frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r_2}$$

czwórnik T i Π , transformacja „gwiazda trójkąt”

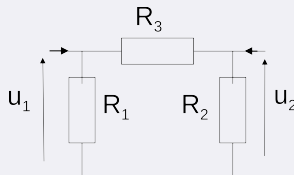


$$u_1 = i_1(r_1 + r_3) + i_2 r_3$$

$$u_2 = i_1 r_3 + i_2(r_2 + r_3)$$

aby równania były zgodne:

$$r_1 = \frac{R_3 R_2}{R_C}; \quad r_2 = \frac{R_3 R_1}{R_C}; \quad r_3 = \frac{R_1 R_2}{R_C};$$
$$R_C = R_1 + R_2 + R_3$$



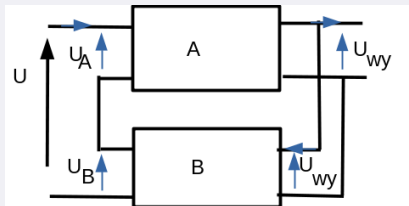
$$i_1 = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_2}{R_3}$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 - u_1}{R_3}$$

$$u_1 = i_1 \frac{R_1 R_C - R_1^2}{R_C} + i_2 \frac{R_1 R_2}{R_C}$$

$$u_2 = i_1 \frac{R_1 R_2}{R_C} + i_2 \frac{R_2 R_C - R_2^2}{R_C}$$

Sprężenie zwrotne



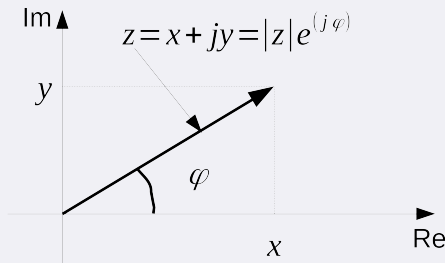
Rysunek: Sprężenie zwrotne - część sygnału wyjściowego odejmowana jest do sygnału wejściowego

$$U_{we} = U_A + U_B \quad (84)$$

$$U_{wy} = AU_A \text{ oraz } U_B = BU_{wy} \quad (85)$$

$$K_U = \frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{1}{\frac{1}{A} + B} = \begin{cases} A & \text{dla } B \ll \frac{1}{A} \\ \frac{1}{B} & \text{dla } B \gg \frac{1}{A} \end{cases} \quad (86)$$

Liczby zespolone



Liczba zespolona na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$: $z = x + jy = |z|e^{j\varphi}$, gdzie $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$
mnożenie przez $e^{j\varphi_2}$ daje obrót wektora z o kąt φ_2 .

jednostka urojona $j = \sqrt{-1}$

Działania arytmetyczne

$$z_1 = x_1 + jy_1 = |z_1|e^{j\varphi_1}$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = |z_2|e^{j\varphi_2}$$

dodawania i mnożenie:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$$

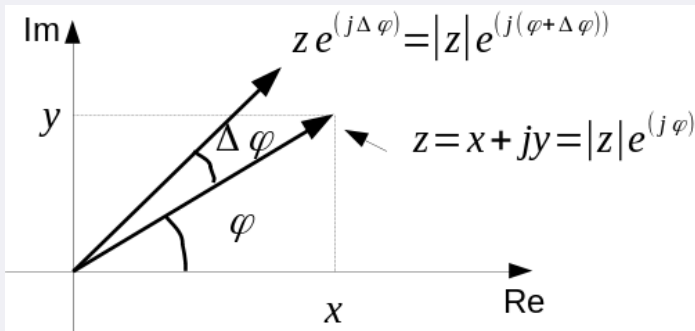
$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$ze^{j\varphi_2} = |z|e^{j\varphi}e^{j\varphi_2} = |z|e^{j(\varphi + \varphi_2)}$$

Mnożenie przez $e^{j\varphi_2}$ daje obrót wektora z o kąt φ_2 .

Mnożenie przez $e^{j\Delta\varphi}$ daje obrót wektora z o kąt $\Delta\varphi$



Rysunek: Obrót liczby zespolonej

$$e^{j\Delta\varphi}z = e^{(j\Delta\varphi)}|z|e^{j\varphi} = |z|e^{(j\varphi+\Delta\varphi)}$$

Trygonometria na liczbach zespolonych

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

$$e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} =$$

$$\begin{aligned} e^{j(\varphi_1)} e^{j(\varphi_2)} &= (\cos(\varphi_1) + j \sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2) + j \sin(\varphi_2)) = \\ &\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \\ &j(\sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1)) \end{aligned}$$

z drugiej strony

$$e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{j(\varphi_1)} = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (87)$$

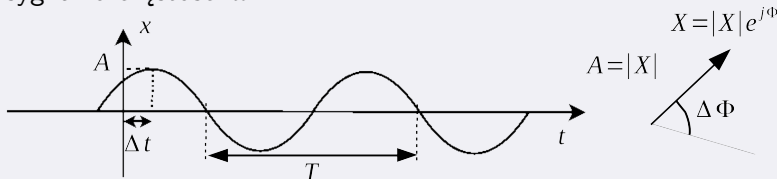
czyli

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \quad (88)$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) \quad (89)$$

Zespolony opis sygnałów sinusoidalnych

sygnał o częstotliwości ω :



$$x(t) = A \cos(\omega t + \Delta\phi) = A \cos\left(\omega\left(t + \frac{\Delta\phi}{\omega}\right)\right) = \operatorname{Re}\left(Ae^{j(\omega t + \Delta\phi)}\right)$$

gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - częstotliwość sygnału, T - okres sygnału, A - amplituda sygnału, $\Delta\phi$ - faza początkowa (przesunięcie fazowe).

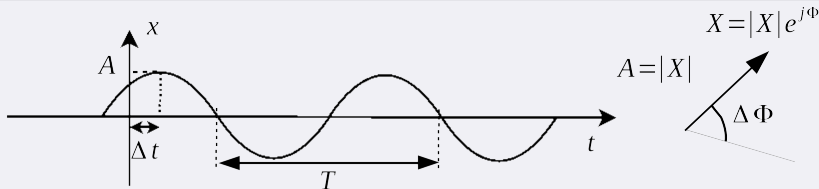
Faza (kąt fazowy) $\phi(t) = \omega t + \Delta\phi = \omega(t + \Delta t)$,

gdzie $\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = T \frac{\Delta\phi}{2\pi}$.

Sygnał w zapisie symbolicznym:

$$\hat{x}(t) = Ae^{j(\omega t + \Delta\phi)} = Xe^{j\omega t} \quad \text{gdzie } X = Ae^{j\Delta\phi} \quad (90)$$

Zespolony opis sygnałów sinusoidalnych



Sygnał sinusoidalny reprezentowany jest wektorem, który nazywany jest wskazem.

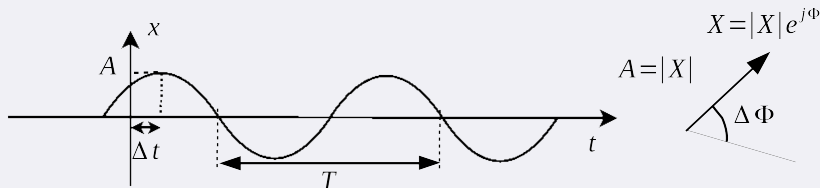
Na rysunku po prawej narysowany jest wektor reprezentujący liczbę zespoloną $X = Ae^{j\Delta\phi}$, gdzie amplituda $A = |X|$ jest długością tego wektora.

Sygnał w zapisie symbolicznym ma postać zespolonej funkcji czasu (90) Na wykresie wskazowym uwzględniony jest kąt fazowy $\Delta\phi$,

nie zachodzi potrzeba rysowania pełnego kąta

$\phi(t) = \omega t + \Delta\phi = \omega(t + \Delta t)$ bowiem w domyśle jest fakt, że wskaz kręci się z prędkością kątową ω .

Moduł liczby zespolonej, amplituda sygnału, wartość skuteczna

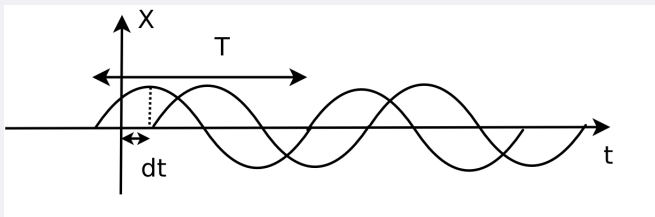


Sygnał sinusoidalny $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ opisany jest funkcją zespoloną $\hat{x}(t) = Ue^{j\Delta\phi}$.

Na rysunku po prawej narysowany jest wektor reprezentujący liczbę zespoloną $X = Ae^{j\Delta\phi}$, gdzie amplituda $A = |X|$ jest długością tego wektora.

Wartość skuteczna $U_{RMS} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

Zespolony opis sygnałów sinusoidalnych- dwa sygnały



Dwa sygnały przesunięte w czasie o dt . Przesunięcie fazowe sygnałów:

$$\Delta\phi = \omega\Delta t = 2\pi\frac{\Delta t}{T} \quad (91)$$

Sygnał w zapisie symbolicznym:

$$\hat{x}(t) = Ae^{j(\omega t + \Delta\phi)} = Xe^{j\omega t} \text{ gdzie } X = Ae^{j\Delta\phi} \quad (92)$$

Transformata Fouriera

dla każdej funkcji czasu $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n \in (-\infty, +\infty)} X_n e^{j\omega_n t} \quad (93)$$

X_n amplituda składowej o częstości ω_n zbiór częstości można wybrać dowolnie aby pokrywał całą przestrzeń dopuszczalnych wartości:

$$\omega_n = n\omega_0 \quad (94)$$

Każdy sygnał jest kombinacją liniową sygnałów sinusoidalnych: dla linowego układu mamy zasadę superpozycji:

$$y = \hat{A}x = A \sum_{n \in (-\infty, +\infty)} X_n e^{j\omega_n t} = \sum_{n \in (-\infty, +\infty)} X_n \left(\hat{A} e^{j\omega_n t} \right) \quad (95)$$

Operator $\hat{A}$ działa na składowe osobno.

elementy elektroniczne

Impedancja elementów. Szukamy zależności napięcia od prądu dla prądów sinusoidalnych.

$$i(t) = I_0 e^{j\omega t + \phi} = I_0 e^{\phi} e^{j\omega t} = I e^{j\omega t} \quad (96)$$

gdzie $I = I_0 e^{\phi}$. I jest opisem prądu zmiennego (symboliczny), zawiera informacje o amplitudzie i fazie:

$$I_0 = |I|, \text{ oraz } \arg(I) = \phi \quad (97)$$

Kondensator

$$U = \frac{1}{C} Q = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{i\omega C} i(t) \quad (98)$$

Indukcyjność:

$$U = \frac{d\Phi_b}{dt} = L \frac{di}{dt} = j\omega L i(t) \quad (99)$$

$$\text{czyli: } Z_C = \frac{1}{i\omega C} \text{ oraz } Z_L = j\omega L \quad (100)$$

Obwody prądu sinusoidalnego

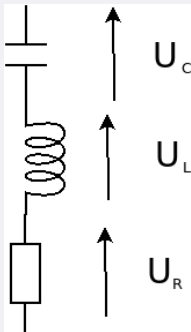


Rysunek: dwójnik RLC

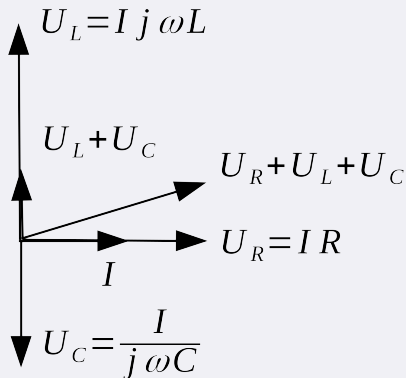
impedancja:

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (101)$$

obwód rezonansowy RLC

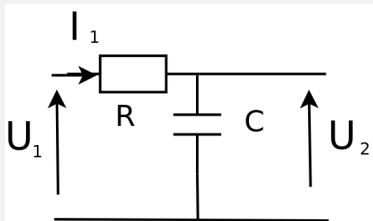


Rysunek: Układ rezonansowy



Rysunek: wykres wskazowy układu rezonansowego

filtr RC



Rysunek: schemat czwórnika RC

Układ jest dzielnikiem napięcia:

$$U_2 = U_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = U_1 \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (102)$$

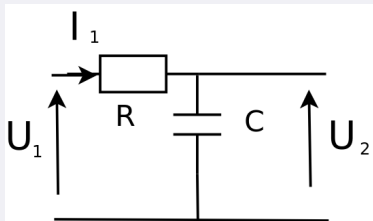
Transmitancja:

$$K_U = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

gdzie $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ - częstość charakterystyczna układu RC,

$$K_U = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ \frac{1}{1+j} & \text{dla } \omega = \omega_0 \\ -j\frac{\omega_0}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_0 \end{cases} \quad (103)$$

Filtr RC- charakterystyka częstotściowa



Rysunek: schemat czwórnika RC

Układ jest dzielnikiem napięcia:

$$U_2 = U_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = U_1 \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (104)$$

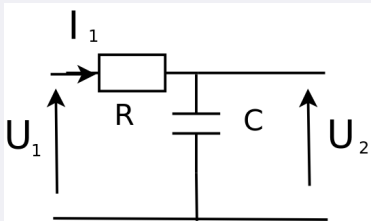
Transmitancja:

$$K_U = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

gdzie $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ - częstość charakterystyczna układu RC,

$$K_U = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ \frac{1}{1+j} & \text{dla } \omega = \omega_0 \\ -j\frac{\omega_0}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_0 \end{cases} \quad (105)$$

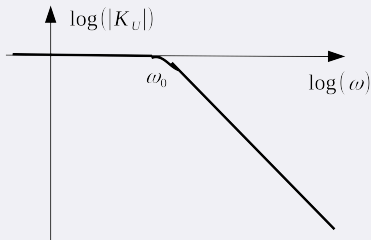
Filtr RC- wykres



Rysunek: schemat czwórnika RC

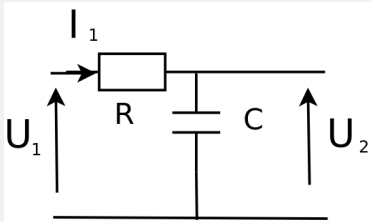
wykres w skali logarytmicznej

$$\lg(|K_U|) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ -\frac{1}{2}\lg(2) & \text{dla } \omega = \omega_0 \\ \lg(\omega_0) - \lg(\omega) & \text{dla } \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$



$$K_U = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ \frac{1}{1+j} & \text{dla } \omega = \omega_0 \\ -j\frac{\omega_0}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

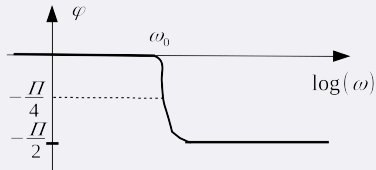
Filtr RC- wykres fazy



Rysunek: schemat czwórnika RC

wykres w skali logarytmicznej

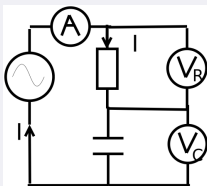
$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} & \text{dla } \omega = \omega_0 \\ -\arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2} & \text{dla } \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$



$$K_U = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 \\ \frac{1}{1+j} & \text{dla } \omega = \omega_0 \\ -j\frac{\omega_0}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

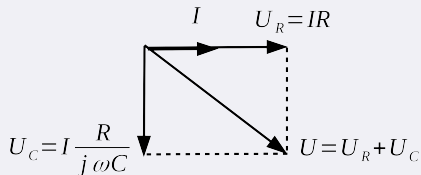
Faza w układzie RC - zadanie

Szeregowy układ RC podłączono do generatora. Wykonano pomiar prądu $I_{RMS} = 10mA$ oraz skuteczne wartości napięć na kondensatorze $V_C = (U_C)_{RMS} = 3V$ i rezystorze $V_R = (U_R)_{RMS} = 4V$, częstotliwość generatora wynosi $f = 10kHz$. Oblicz: kąt fazowy pomiędzy prądem generatora a napięciem generatora $\Phi(I, U)$, pojemność kondensatora, rezystancję opornika, wartość skuteczna napięcia na generatorze.



Rysunek: Układ szeregowego połączenia rezystora i kondensatora

wykres wskazowy dla szeregowego połączenia rezystora i kondensatora



Rysunek: Wykres wskazowy dla szeregowego połączenie RC

$$U = I \left(R + \frac{1}{\omega C} \right) = |I| e^{j\Delta\Phi_0} \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} e^{j\Delta\Phi} \quad (106)$$

$$U = U_R + U_C = e^{j\Delta\Phi_0} \left(|I|R - j \frac{|I|}{\omega C} \right) = e^{j\Delta\Phi_0} (|U_R| - j|U_C|) \quad (107)$$

Moc prądu elektrycznego zmiennego

Zakładamy że na odbiorniku jest napięcie $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_u)$ i płynie prąd $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_i)$. Moc chwilowa:

$$P(t) = u(t)i(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_u) I_0 \cos(\omega t + \phi_i) \quad (108)$$

Moc średnia:

$$P_{AV} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = U_{RMS} I_{RMS} \cos(\Delta\phi) \quad (109)$$

gdzie $U_{RMS} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ oraz $I_{RMS} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ gdzie RMS oznacza wartość skuteczną, $\Delta\phi = \phi_u - \phi_i$ jest różnicą kąta fazowego sygnału napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$.

Moc prądu sinusoidalnego

$$\begin{aligned} P_{AV} &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 \cos(\omega t + \phi_u) I_0 \cos(\omega t + \phi_i) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} U_0 I_0 (\cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) + \cos(\phi_u - \phi_i)) dt = \\ &= U_{RMS} I_{RMS} \cos(\Delta\phi) \end{aligned} \quad (110)$$

korzystamy z: $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
czyli $\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ oraz
 $U_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$ i $I_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$

Moc zespolona, rzeczywista i pozorna

Należy zapisać wzór na moc w postaci zespolonej dla napięć i prądów zespolonych (symbolicznych).

$$\hat{U}(t) = Ue^{j\omega t} \quad \text{oraz} \quad \hat{I}(t) = Ie^{j\omega t} \quad (111)$$

gdzie U i I są amplitudami zespolonymi:

$$U = U_0 e^{j\phi_U} \quad \text{oraz} \quad I = I_0 e^{j\phi_I}$$

Aby uzyskać wzór (110) należy moc zespoloną zdefiniować tak aby czynnik $e^{j\omega t}$ czyli napięcie należy pomnożyć przez prąd sprzężony:

$$\hat{P} = \frac{1}{2} UI^* = \frac{1}{2} U_0 I_0 e^{j\Delta\Phi} = U_{RMS} I_{RMS} (\cos(\Delta\Phi) + j \sin(\Delta\Phi)) \quad (112)$$

gdzie $U_{RMS} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ Tak zdefiniowana wielkość jest liczbą zespoloną, moc rzeczywista jest częścią rzeczywistą $\hat{P}$

$$P_{AV} = \text{Re}(\hat{P}) \quad (113)$$

Moc bierna i moc pozorna

Część urojona mocy zespolonej $\hat{P} = \frac{1}{2} UI^*$ nazywa się mocą bierną:

$$Q = \text{Im}(\hat{P}) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \sin(\Delta\Phi) = U_{RMS} I_{RMS} \sin(\Delta\Phi) \quad (114)$$

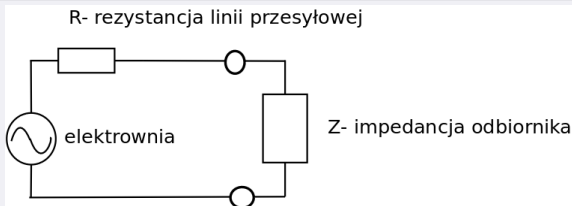
Moduł mocy zespolonej nazywa się mocą pozorną S :

$$S = |\hat{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (115)$$

Moc pozorna równa jest iloczynowi wartości skutecznych prądu i napięcia:

$$S = |\hat{P}| = \left| \frac{1}{2} UI^* \right| = \frac{1}{2} |U| |I^*| = \frac{1}{2} |U| |I| = U_{RMS} I_{RMS} \quad (116)$$

Moc pozorna, straty mocy



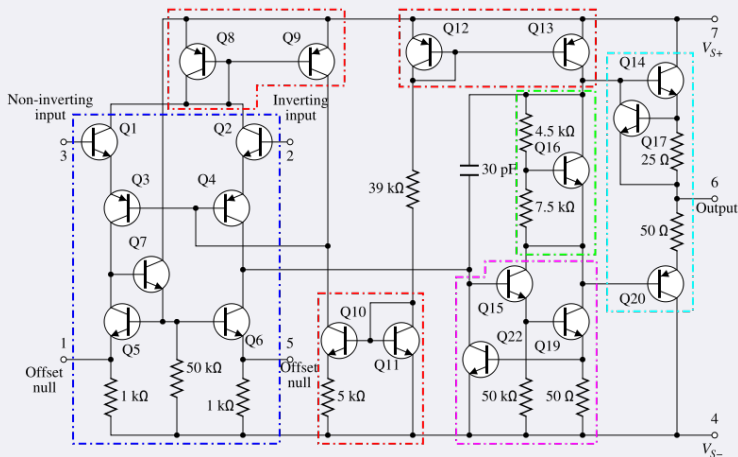
Rysunek: Schemat połączenia odbiornika z elektrownią

$$\hat{P} = \frac{1}{2} UI^* = \frac{1}{2} (IZ + IR) I^* = \frac{1}{2} |I|^2 e^{j\Delta\Phi} |Z| + \frac{1}{2} |I|^2 R \quad (117)$$

Człon drugi jest mocą strat $\Delta P = \frac{1}{2} |I|^2 R$
z równania (116) mamy $|I| = \frac{1}{2} \frac{S}{|U|}$ czyli $I_{RMS} = \frac{S}{U_{RMS}}$,
zgodnie z równaniem (115) $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ więc:

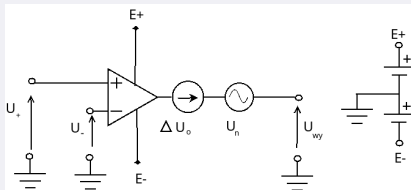
$$\Delta P = \frac{P^2 + Q^2}{U_{RMS}^2} R \quad (118)$$

wzmacniacz operacyjny schemat ideowy



Rysunek: Schemat wzmacniacza operacyjnego 741

wzmacniacz operacyjny - model matematyczny



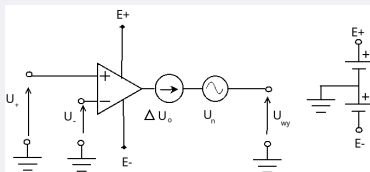
Rysunek: Wzmacniacz operacyjny, schemat blokowy, ΔU_o - napięcie niezrównoważenia (offset Voltage)

Założymy, że jest to układ liniowy z dwoma wejściami:

$$U_{wy} = A_+ U_+ - A_- U_- + \Delta U_o + U_n \quad (119)$$

gdzie: A_+ wzmocnienie kanału „+”, A_- wzmocnienie kanału „-”,
 U_+ - napięcie na wejściu „+”, U_- - napięcie na wejściu „-”,
 ΔU_o - napięcie niezrównoważenia, U_n - napięcie równoważne
szumów,

wzmacniacz operacyjny - parametry



Rysunek: Wzmacniacz operacyjny, schemat blokowy

$$U_{wy} = A_+ U_+ - A_- U_- + \Delta U_o + U_n \quad (120)$$

definiujemy nowe zmienne A_d , A_c :

$$A_+ = A_d + \frac{A_c}{2} \quad \text{ i } \quad A_- = A_d - \frac{A_c}{2} \quad (121)$$

otrzymujemy

$$A_d(U_+ - U_-) + A_c \frac{U_+ + U_-}{2} + \Delta U_o + U_n \quad (122)$$

A_d - wzmacnienie różnicowe, A_c wzmacnienie sumacyjne :

Parametry

wzmocnienia: A_d - wzmocnienie napięciowe różnicowe (Open Loop Differential Voltage Gain)

i A_c - wzmocnienie sumacyjne (Common Mode Gain) opisane są równaniami:

$$A_d = \frac{A_+ + A_-}{2} \quad \text{i} \quad A_c = A_+ - A_- \quad (123)$$

Równanie opisujące wzmacniacz operacyjny ma postać:

$$U_{wy} = A_d(U_+ - U_-) + A_c \frac{U_+ + U_-}{2} + \Delta U_o + U_n \quad (124)$$

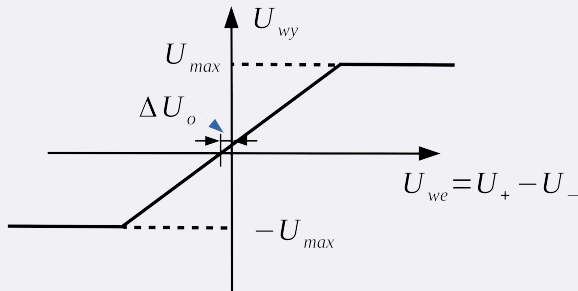
gdzie

ΔU_o - offset - napięcie niezrównoważenie

U_n - napięcie szumów równoważne napięcie wejściowe

$CMRR = \frac{A_d}{A_{sum}}$ - współczynnik tłumienia sygnału wspólnego, zazwyczaj wyrażany w decybelach.

wzmacniacz operacyjny - schemat cd



Rysunek: Charakterystyka wzmacniacza operacyjnego, po osiągnięciu napięcia wyjściowego U_{max} charakterystyka nasycą się, U_o - napięcie niezrównoważenia (input offset Voltage)

Wzór opisujący wzmacniacz jest prawdziwy dla napięć odpowiednio małych: $U_{we} < \frac{U_{max}}{K_0}$

Wzmacniacz operacyjny - charakterystyka częstotściowa

W przybliżeniu transmitancja wzmacniacza operacyjnego opisana jest równaniem:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} = A_0 \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} \quad (125)$$

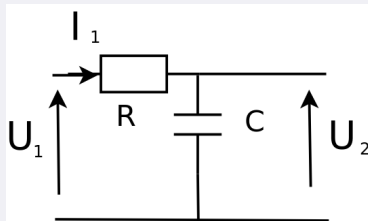
członek $\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}}$ opisuje filtr

dolnoprzepustowy który można zbudować jako filtr RC gdzie

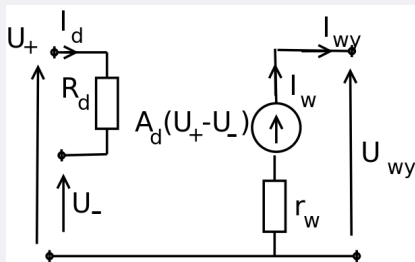
$$\omega_g = \frac{1}{RC}.$$

W przybliżeniu Pojemność C i rezystancja R opisują efektywną stałą czasową pojemności i rezystancji elementów wzmacniacza. Typowa wartość

$$\omega_g \in [10, 1000] \frac{1}{s}$$



Schemat zastępczy wzmacniacza operacyjnego

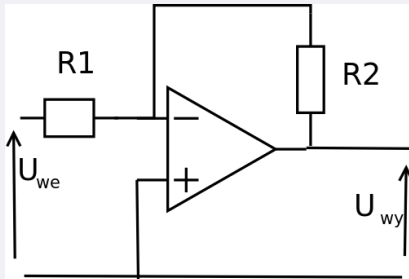


Rysunek: Uproszczony schemat zastępczy wzmacniacza operacyjnego, nie są uwzględnione: napięcie niezrównoważenia (offset), prąd polaryzacji (bias) napięcie szumów i pojemności wejściowe

R_d - rezystancja wejściowa pomiędzy wejściem + i -,
pominięto rezystancje pomiędzy wejściami a masą.

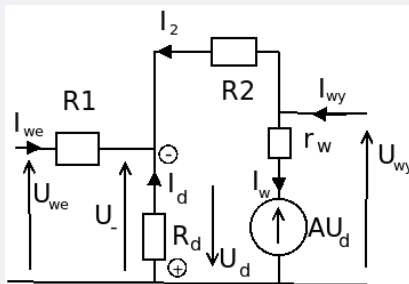
r_w - rezystancja wyjściowa sterowanego źródła napięciowego,
zazwyczaj $(10 \div 100)\Omega$

wzmacniacz odwracający fazę



Rysunek: Wzmacniacz operacyjny odwracający fazę

Wzmacniacz operacyjny odwracający fazę, schemat zastępczy



Rysunek: Wzmacniacz operacyjny odwracający fazę układ zastępczy

wzmacniacz odwracający fazę - równania

$$U_{wy} = I_w r_w + AU_d \quad (126)$$

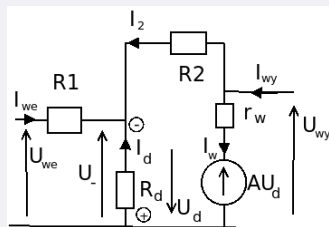
$$U_{wy} = i_2 R_2 - I_{we} R_1 + U_{we} \quad (127)$$

$$U_{we} = I_{we} R_1 + U_- \quad (128)$$

$$U_d = -U_- \quad (129)$$

$$I_{we} + I_d + I_2 = 0 \quad (130)$$

$$I_{wy} = I_w + I_2 \quad (131)$$



wzmacniacz odwracający fazę - równania przybliżone

Przyjmujemy uproszczenia:

$r_w = 0, R_d \rightarrow \infty$ czyli $I_d = 0$ ale $I_d R_d = U_d = -U_-$
wtedy $I_2 = -I_{we}$.

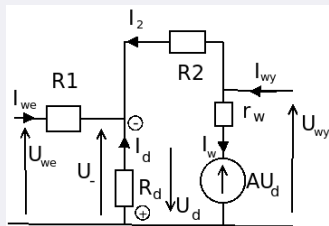
$$U_{wy} = -AU_-$$

$$U_{we} - U_{wy} = I_{we}(R_2 + R_1)$$

$$U_{we} - U_- = I_{we}R_1$$

z pierwszego równania $U_- = -\frac{U_{wy}}{A}$ z
dwóch ostatnich wyliczamy I_{we} i
przyporównujemy:

$$\frac{U_{we} - U_{wy}}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R_1} \left(U_{we} + \frac{U_{wy}}{A} \right)$$



Po przekształceniach:

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = -\frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{A}}$$

Wzmocnienie wzmacniacza odwracającego fazę

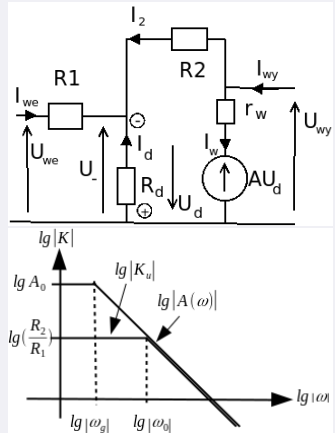
$$K_u = \frac{U_{wy}}{U_{we}} = -\frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{\frac{R_1}{R_1+R_2} + \frac{1}{A}} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{R_2}{R_1} & \text{dla } |A| \gg \frac{R_1+R_2}{R_1} \\ -A \frac{R_2}{R_1+R_2} & \text{dla } |A| \ll \frac{R_1+R_2}{R_1} \end{cases}$$

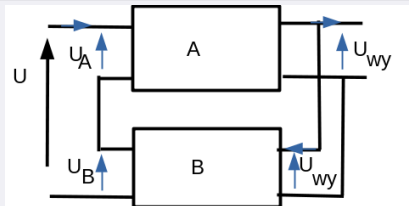
gdzie:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} = \begin{cases} A_0 & \text{dla } \omega \ll \omega_g \\ -j\frac{A_0\omega_g}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_g \end{cases}$$

Warunek $|A| \gg \frac{R_1+R_2}{R_1}$ daje $\omega \ll \omega_0$ gdzie $\omega_0 = A_0\omega_g \frac{R_1}{R_1+R_2}$



Sprężenie zwrotne



Rysunek: Sprężenie zwrotne - część sygnału wyjściowego odejmowana jest od sygnału wejściowego

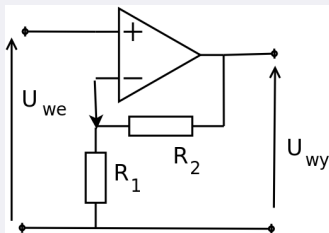
$$U_{we} = U_A + U_B \quad (132)$$

$$U_{wy} = AU_A \quad (133)$$

$$U_B = BU_{wy} \quad (134)$$

$$K_U = \frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{1}{\frac{1}{A} + B} = \begin{cases} A & \text{dla } B \ll \frac{1}{A} \\ \frac{1}{B} & \text{dla } B \gg \frac{1}{A} \end{cases} \quad (135)$$

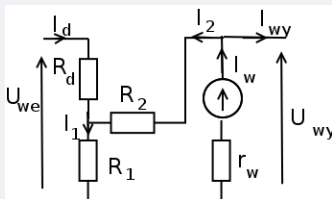
wzmacniacz nieodwracający fazy



Rysunek: Wzmacniacz nieodwracający fazy

wzmocnienie wzmacniacza operacyjnego $A = 10^5$, rezystancja pomiędzy wejściami $R_d = 105k\Omega$, rezystancja wyjściowa $\frac{1}{h_{22}} = 1k\Omega$. Dane są rezystory $R_1 = 1k\Omega$ i $R_2 = 100k\Omega$.

wzmacniacz nieodwracający fazy - schemat zast.



Rysunek: Wzmacniacz nieodwracający fazy, schemat zastępczy.

Zaznaczono prąd wejściowy I_d , który wynosi w praktyce zero ponieważ rezystancja wejściowa wzmacniacza R_d jest bardzo duża (w porównaniu do pozostałych rezystancji), jednak napięcie na rezystancji wejściowej wzmacniacza R_d wynosi U_d i musi być uwzględnione w równaniach

obliczenia wzmocnienia i rezystancji wyjściowej

Równania Kirchhoffa - bilans prądów ma postać:

$$I_2 = I_1 + I_d \quad (136)$$

$$I_w = I_2 + I_{wy} \quad (137)$$

Ponieważ R_d jest bardzo duże w porównaniu do R_1 więc $I_D = 0$ i $I_1 = I_2$. Równania bilansu napięć:

$$U_{we} = U_d + I_1 R_1 \quad (138)$$

$$AU_d = I_1(R_1 + R_2) + I_w r_w \quad (139)$$

$$U_{wy} = (R_1 + R_2)I_1 \quad (140)$$

Ostatnie równanie można zapisać w postaci $U_{wy} = AU_d - r_w I_w$ ale postać (140) jest wygodniejsza do dalszych obliczeń.

obliczenia wzmocnienia i rezystancji wyjściowej

Celem przekształceń jest uzyskanie równania o postaci:

$$U_{wy} = K_U U_{we} - I_{wy} R_{wy} \quad (141)$$

Z równania (139) wyznaczamy $U_d = U_{we} - I_1 R_1$. Do równania (139) wstawiamy U_d i I_w (z równania (137)):

$$A(U_{we} - I_1 R_1) = I_1(R_1 + R_2 + r_w) + I_{wy} r_w \quad (142)$$

z powyższego równania wyznaczamy I_1 :

$$I_1 = \frac{AU_{we}}{R_1 + R_2 + r_w + AR_1} - \frac{r_w I_{wy}}{R_1 + R_2 + r_w + AR_1}$$

Wstawiamy to do (140):

$$U_{wy} = \frac{A(R_1 + R_2)U_{we}}{R_1 + R_2 + r_w + AR_1} - \frac{r_w(R_1 + R_2)I_{wy}}{R_1 + R_2 + r_w + AR_1}$$

Ponieważ w mianowniku czynnik AR_1 jest dużo większy od pozostałych więc mamy:

$$U_{wy} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{we} - \frac{R_1 + R_2}{AR_1} r_w I_{wy} \quad (143)$$

Tak więc porównując z (141) rezystancja wyjściowa wynosi

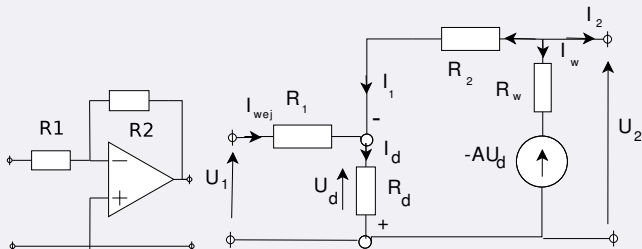
$$R_{wy} = \frac{R_1 + R_2}{AR_1} r_w = r_w \frac{K_U}{A} \quad (144)$$

gdzie zgodnie z (143) $K_U = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$.

Podstawiając dane mamy:

$$R_{wy} = \frac{1k\Omega + 100k\Omega}{10^5 k\Omega} 1k\Omega = 1,01\Omega \simeq 1k\Omega \quad (145)$$

Rezystancja wejściowa wzmacniacza odwracającego fazę



Sterowana siła elektromotoryczna $E = -AU_d$ (znak $-$ wynika z tego, że strzałka jest przy wejściu $-$).

R_w – rezystancja wewnętrzna wzmacniacza operacyjnego bez sprzężenia zwrotnego.

Rezystancja wejściowa wzmacniacza odwracającego fazę

Z praw Kirchhoffa:

$$U_1 = I_{wej}R_1 + U_d \quad (146)$$

$$-AU_d + I_wR_w = I_1R_2 + I_dR_d \quad (147)$$

$$I_1 + I_{wej} = I_d \quad (148)$$

$$U_d = I_dR_d \quad (149)$$

Jeśli założymy, że $I_2 = 0$ (układ pracuje bez obciążenia) to $I_w = -I_1$, wstawiamy to do równania (147):

$$-AU_d = (R_2 + R_w)I_1 + I_dR_d \quad (150)$$

z równania (148) mamy $I_1 = I_d - I_{wej}$. Wstawiamy to do (150) i uwzględniając (149) otrzymujemy:

$$-AI_dR_d = (R_2 + R_w)I_d - (R_2 + R_w)I_{wej} + I_dR_d \quad (151)$$

i po przekształceniach:

$$\frac{I_d}{I_{wej}} = \frac{R_2 + R_w}{AR_d + R_2 + R_w + R_d} \approx \frac{R_2}{AR_d} \quad (152)$$

Przybliżony wzór uzyskujemy przy założeniu, że $R_w \ll R_2$ oraz $AR_d \gg R_2 + R_w + R_d$.

Dzieląc U_1 z równania (146) przez prąd I_{wej} otrzymujemy rezystancję wejściową:

$$R_{wej} = \frac{U_1}{I_{wej}} = R_1 + \frac{I_d}{I_{wej}} R_d = R_1 + \frac{R_2}{A} \approx R_1 \quad (153)$$

Rezystancja wejściowa wzmacniacza odwracającego fazę

Rezystancja wejściowa wzmacniacza odwracającego fazę nie zależy praktycznie od sprzężenia zwrotnego bowiem $U_d \ll I_{wej} R_1$.

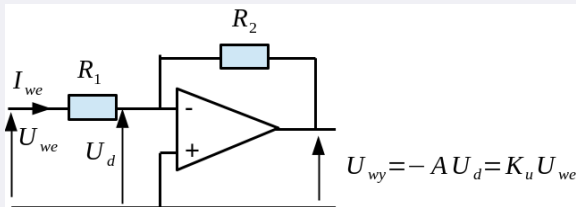
Wzór (153) można zapisać następująco:

$$R_{wej} = R_1 \left(1 + \frac{R_2}{AR_1} \right) = R_1 \left(1 + \frac{K_u}{A} \right) \quad (154)$$

gdzie: $K_u = \frac{R_2}{R_1}$. Czyli sprzężenie zwrotne powoduje, że R_2 nie ma wpływu na rezystancję wejściową.

Rezystancja wejściowa wzmacniacza odwracającego fazę

Wzór na rezystancję wejściową można wyprowadzić w przybliżeniu:



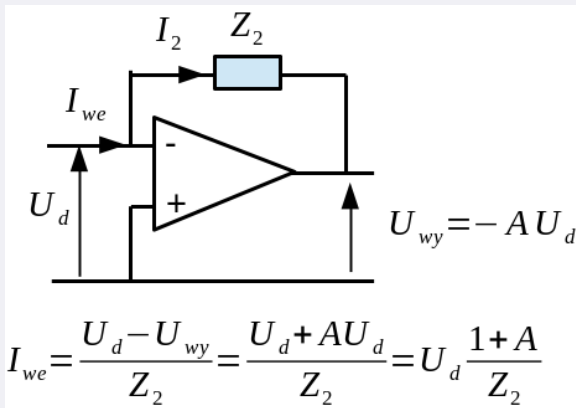
Rysunek: Napięcie $U_d = -\frac{U_{wy}}{A}$ oraz $U_{wy} = K_u U_{we}$

$$I_{we} = \frac{U_{we} - U_d}{R_1} = \frac{U_{we} + \frac{U_{wy}}{A}}{R_1} = \frac{U_{we} + \frac{U_{we} K_u}{A}}{R_1} \approx \frac{U_{we}}{R_1} \quad (155)$$

czyli $R_{we} = R_1$ dla $K_u \ll A$

Efekt Millera

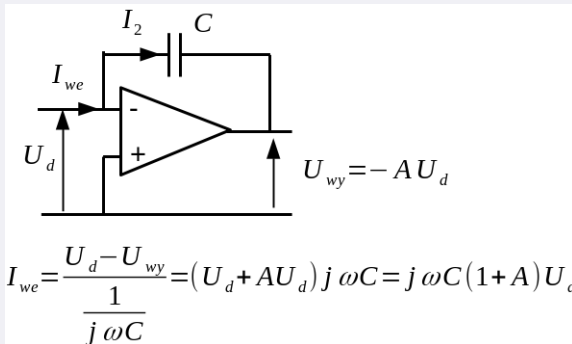
Efekt Millera polega na zwiększeniu pojemności zastępczej widzianej z zacisków wejściowych wzmacniacza odwracającego fazę w wyniku sprzężenia zwrotnego.



Rysunek: Efekt Millera I_{we} proporcjonalny jest do różnicy napięć U_{we} i U_d

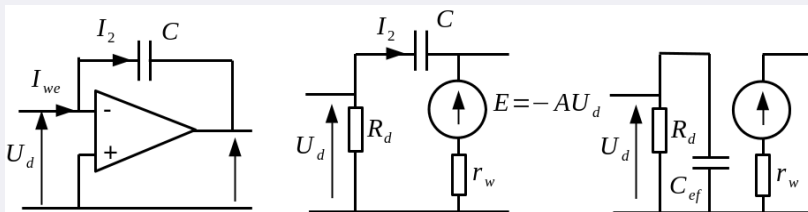
Efekt Millera

Jeśli $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$



Rysunek: Efektywna pojemność wejściowa wynosi $C_{we} = (A + 1)C$

Efekt Millera - pojemność wejściowa

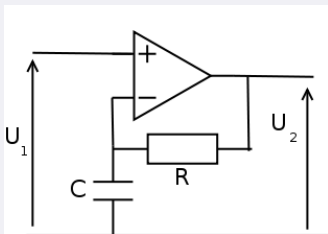


Rysunek: Zastępcza pojemność wejściowa $C_{ef} = (1 + A)C$

W schemacie zastępczym efekt Millera oznacza, że pojemność wejściowa pomnożona jest przez wzmacnienie A (open loop gain) wzmacniacza operacyjnego.

Pojemność wejściowa wzmacniacza operacyjnego wynosi ok. kilku pF, rezystancja wejściowa kilka $G\Omega$. Aby spowodować znaczne ograniczenie pasma wystarczy aby pojemność pożyteczna sprzężenia C wynosiła tysięczne części pikofarada.

Układ różniczkujący



Rysunek: Układ wzmacniacza różniczkującego

Charakterystyka częstotliwościowa wzmacniacza opisana jest równaniem

$$A(f) = \frac{A_0}{1 + j \frac{f}{f_g}} \quad (156)$$

gdzie $f_g = 10$ Hz. Dane są: $A_0 = 10^6$, $R = 1\text{M}\Omega$, $C = \frac{1}{2\pi}\mu\text{F}$.

Rozwiązanie

Równania zapiszemy w funkcji częstości $\omega = 2\pi f$:

$$A(f) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} \quad (157)$$

napięcie wyjściowe wzmacniacza operacyjnego w zależności od różnicy napięć wejściowych:

$$U_2 = A(U_+ - U_-) \quad (158)$$

gdzie U_+ i U_- są napięciami na wejściach odpowiednio nieodwracającym i odwracającym i wynoszą

$$U_+ = U_1 \quad (159)$$

$$U_- = U_2 \frac{Z}{Z + R} \quad (160)$$

impedancja kondensatora $Z = \frac{1}{j\omega C}$

Po wstawieniu powyższych równań do 158:

$$U_2 = A \left(U_1 - U_2 \frac{Z}{Z + R} \right) \quad (161)$$

$$U_2 \left(1 - \frac{AZ}{Z + R} \right) = AU_1 \quad (162)$$

Wzmocnienie wyliczamy jako stosunek napięć U_2 i U_1 :

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{A}{1 + \frac{AZ}{Z+R}} \quad (163)$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez A:

$$K(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{Z}{Z+R}} \quad (164)$$

$$K(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R}} = \frac{1}{\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}{A_0} + \frac{1}{1+j\omega RC}}$$

$$K(\omega) = \frac{1}{\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}{A_0} + \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}} \quad (165)$$

Mianownik ostatniego równania składa się z 2 członów $\frac{1}{A}$ i $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$, gdzie $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ jest częstotliwością charakterystyczną dla filtru RC . Człon pierwszy $\frac{1}{A}$ będzie dominować w zakresie wysokich częstotliwości, gdy wzmacnienie wzmacniacza operacyjnego A przestaje być duże, natomiast drugi człon – w zakresie niższych częstotliwości.

Powyżej częstotliwości granicznej ω_g moduł wzmacnienia wzmacniacza $|A|$ można przybliżyć jako $\frac{A_0\omega_g}{\omega}$

$$|A| = \left| \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} \right| = \begin{cases} A_0 & \text{dla } \omega \ll \omega_g \\ \frac{A_0\omega_g}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_g \end{cases} \quad (166)$$

Jedynkę w mianowniku drugiego członu można zaniedbać gdy $\omega RC \gg 1$, czyli gdy $\omega \gg \frac{1}{RC} = \omega_0$.

Przejście między członami następuje przy częstotliwości ω_1 dla której ich moduły są równe, więc:

$$\omega_1 RC = \frac{A_0 \omega_g}{\omega_1} \quad (167)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A_0 \omega_g}{RC}} = \sqrt{10^7} \frac{1}{s} = 10^{3,5} \frac{1}{s} = 3,16 \cdot 10^3 \frac{1}{s} \quad (168)$$

Poniżej częstotliwości ω_0 pierwszy człon jest mały, drugi jest z dobrym przybliżeniem równy 1, pomiędzy ω_0 a ω_1 drugi człon dominuje i otrzymujemy $K_u = \omega RC$, natomiast powyżej ω_1 wzmacnienie równe jest $A = \frac{A_0 \omega_g}{\omega}$

$$|K| = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega \ll \omega_0 = \frac{1}{RC} \\ \omega RC & \text{dla } \omega_0 \ll \omega \ll \omega_1 = \sqrt{\frac{A_0 \omega_g}{\omega}} \\ \frac{A_0 \omega_g}{\omega} & \text{dla } \omega \gg \omega_1 \end{cases} \quad (169)$$

Jeśli pominąć efekt gwałtownej zmiany fazy dla $\omega = \omega_1$ równanie (169) można przybliżyć równaniem:

$$|K(\omega)| = \frac{1}{\left| \frac{1+j\frac{\omega}{\omega_g}}{A_0} \right| + \left| \frac{1}{1+j\omega RC} \right|} \quad (170)$$

Jeśli zbadać zachowanie się równania (165) dla $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{A_0\omega_g}{\omega}}$ to okazuje się, że pojawia się pik w ω_1 o wysokości zależnej od proporcji częstości ω_0 i ω_1 . Z równania (165):

$$\begin{aligned} K(\omega) &= A_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_g}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) + A_0} = \\ &= A_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}{A_0 + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0\omega_g} + j\left(\frac{\omega}{\omega_g} + \frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \\ &= A_0 \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \left(A_0 + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0\omega_g} - j\left(\frac{\omega}{\omega_g} + \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)}{\left(A_0 + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0\omega_g}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_g} + \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned} \quad (171)$$

Po podstawieniu ω_1 , które spełnia równanie $A_0 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0 \omega_g}$, A_0 skraca się z $\frac{\omega_1^2}{\omega_0 \omega_g}$, pomijamy w mianowniku i liczniku jedynkę ($1 \ll \frac{\omega_1}{\omega_g} + \frac{\omega_1}{\omega_0}$) i otrzymujemy:

$$K(\omega_1) = -jA_0 \frac{\left(1 + j\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) \left(\frac{\omega_1}{\omega_g} + \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_g} + \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} \quad (172)$$

ponieważ $1 \ll \frac{\omega_1}{\omega_g}$ i $1 \ll \frac{\omega_1}{\omega_0}$, otrzymujemy:

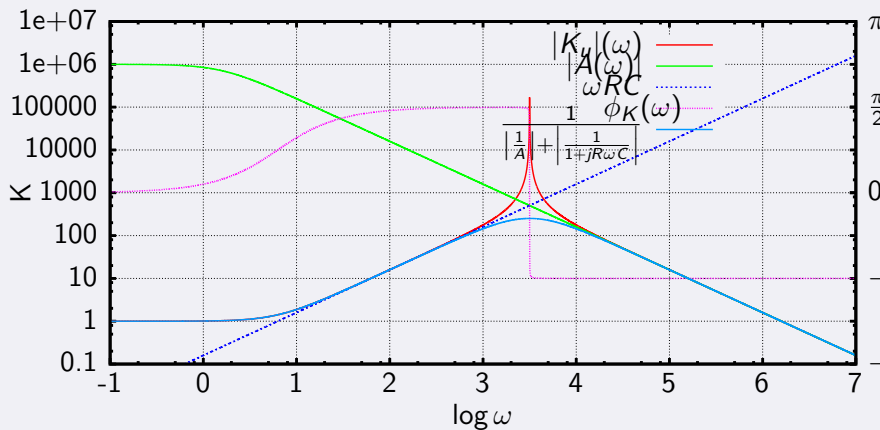
$$|K(\omega_1)| \simeq \frac{A_0}{1 + \frac{\omega_0}{\omega_g}} \quad (173)$$

Równanie (173) jest równaniem przybliżonym przy założeniu, że $\omega_1 \gg \omega_0, \omega_g$. Dla danych $\omega_0 = 2\pi \frac{1}{s}$ oraz $\omega_g = 20\pi \frac{1}{s}$, mamy więc:

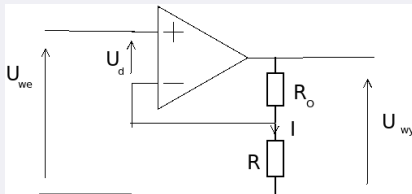
$$|K(\omega_1)| \simeq \frac{A_0}{1 + \frac{2\pi}{20\pi}} \frac{A_0}{1 + 0,1} \simeq 0,9A_0 = 9 \cdot 10^5 \quad (174)$$

Wartość K od częstości przedstawiony jest na rys

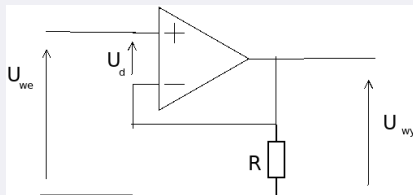
wykreś zależności transmitancji od częstotliwości



Źródło prądowe

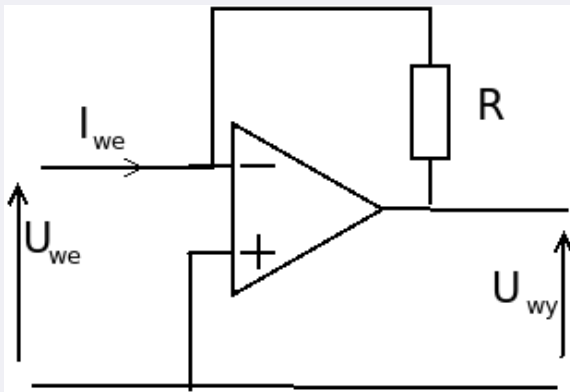


Rysunek: źródło prądowe, prąd $I = \frac{U}{R}$ nie zależy od obciążenia R_o



Rysunek: wtórnik

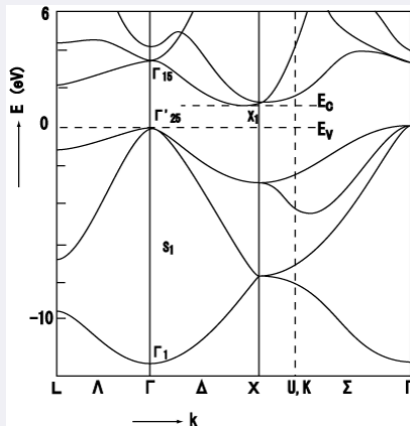
przetwornik prąd - napięcie



Rysunek: przetwornik prąd napięcie $U_{wy} = I_{we}R$

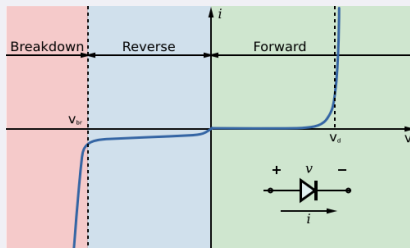
struktura pasmowa krzemu

półprzewodnik, struktura pasmowa.



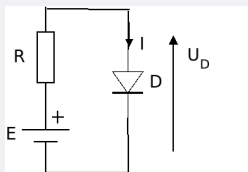
Rysunek: Struktura pasmowa krzemu (źródło Wikipedia)

Dioda półprzewodnikowa



Rysunek: Charakterystyka diody PN, źródło Wikipedia

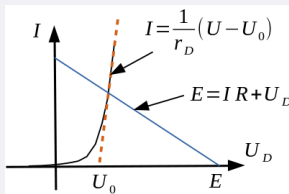
Obwód z diodą



$$\begin{aligned} E &= U_D + IR \\ I &= I(U_D) \end{aligned} \quad (175)$$

Prąd płynący przez diodę z układu równań (175):

$$I = \frac{E - U_0}{R + r_D} \quad (176)$$



Rysunek: Charakterystyka diody i prawo Kirchhoffa, r_D - rezystancja zastępcza diody

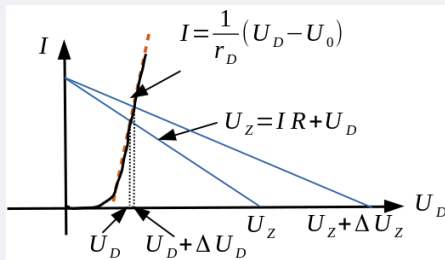
Równanie przybliżone diody:

$$I(U_D) = \begin{cases} 0 & \text{dla } U_D < U_0 \\ \frac{1}{r_D}(U_D - U_0) & \text{dla } U_D > U_0 \end{cases}$$

Zadanie: wyznaczyć czułość stabilizatora na diodzie Zenera

Wyznacz czułość stabilizatora na diodzie Zenera na zmianę napięcia zasilania:

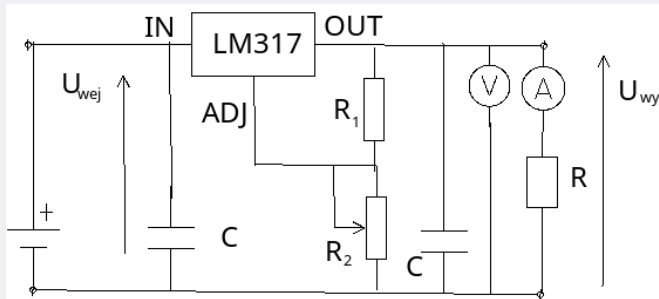
$$K_u = \frac{\Delta U_D}{\Delta U_Z} = \frac{r_D}{r_D + R} \quad (177)$$



Rysunek: Wyznaczenie graficzne czułości na napięcie zasilania U_D - napięcie na diodzie, U_Z - napięcie zasilania, r_D - rezystancja dynamiczna

$$\begin{aligned} I &= \frac{U_D - U_0}{r_D} \\ U_Z &= IR + U_0 \\ U_Z &= \frac{U_D - U_0}{r_D} R + U_D \\ \Delta U_Z &= \frac{R}{r_D} \Delta U_D + \Delta U_D \\ \frac{\Delta U_D}{\Delta U_Z} &= \frac{r_D}{r_D + R} \end{aligned}$$

stabilizator zintegrowany



Rysunek: Stabilizator z wykorzystaniem układu LM317, napięcie wyjściowe $U_{wy} = U_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1}$, $U_0 = 1,25V$ - napięcie referencji

historia tranzystora

1925-1930 - pierwsze patenty na tranzystor w Kanadzie, USA i Niemczech Julius Edgar Lilienfeldow (typu MOSFET),

16 grudnia 1947 - tranzystor ostrzowy w laboratoriach Bella zbudowali John Bardeen oraz Walter Brattain.

1948 - William Bradford Shockley – teoria tranzystora złączowego,

1950 - John Bardeen, Walter Houser Brattain oraz William Bradford Shockley - budowa tranzystora.

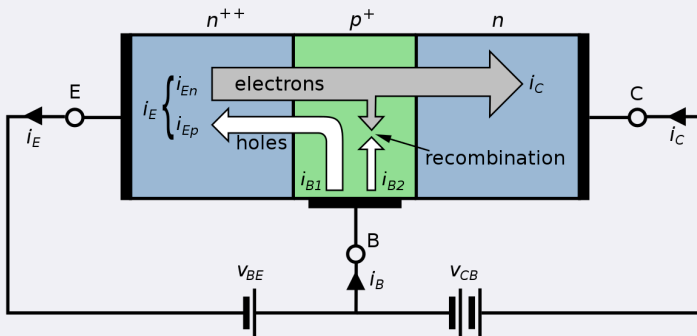
1956 – Nobel z fizyki: Bardeen, Brattain oraz Shockley

1949- dwaj niemieccy fizycy Herbert Mataré i Heinrich Welker pracując w paryskim oddziale firmy Westinghouse niezależnie zbudowali tranzystor (który nazwali transistronem).

1957 - William Bradford Shockley w Shockley Semiconductor Laboratory zbudował złączowy tranzystor polowy JFET.

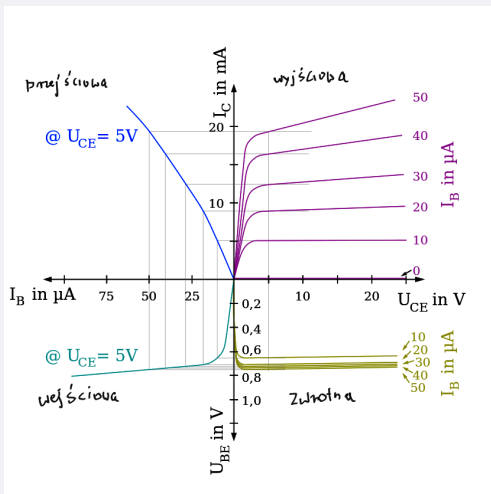
1959 - John Atalla i Davon Kahng, również z Bell Labs, – pierwszy tranzystor MOSFET (proces utleniania powierzchni kryształu krzemu).

schemat prądów



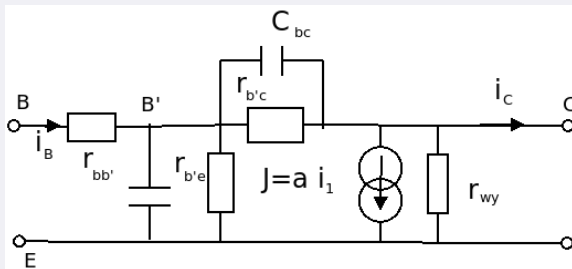
Rysunek: Schemat prądów w tranzystorze, źródło - Wikipedia

charakterystyki tranzystora



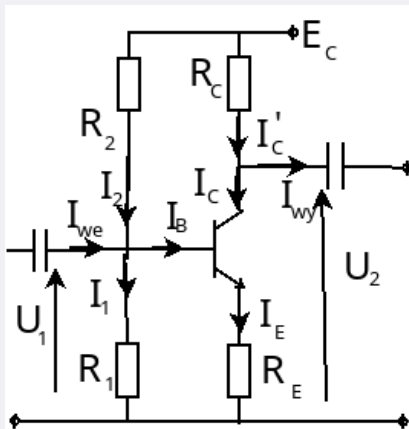
Rysunek: charakterystyki tranzystora, źródło Wikipedia

Schemat zastępczy dla małych sygnałów



Rysunek: Schemat zastępczy tranzystora - model hybrydowy

schemat podstawowy wzmacniacza tranzystorowego



Rysunek: Schemat wzmacniacza tranzystorowego o wspólnym emiterze

tranzystor polowy

Idea tranzystora polowego polega na sterownia polem przewodnością cienkiej warstwy półprzewodnika

wzmocnienie wzmacniacza WE

$$I_C = \beta I_B$$

$$I_E = (1 + \beta) I_B$$

$$\Delta U_{BE} = h_{1,1} \Delta I_B$$

$$\Delta U_1 = \Delta U_{BE} + \Delta I_E R_E$$

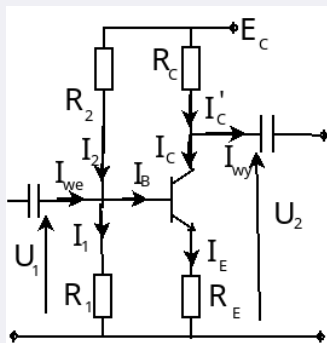
$$\Delta U_1 = \Delta I_B h_{1,1} + \Delta I_E R_E =$$

$$= \Delta I_B h_{1,1} + \Delta I_B (1 + \beta) R_E$$

$$U_2 = E_C - I_C R_C$$

$$\Delta U_2 = -\Delta I_C R_C$$

$$K_U = \frac{\Delta U_2}{\Delta U_1} = -\frac{\beta \Delta I_B R_C}{\Delta I_B h_{1,1} + (\beta + 1) R_E} \approx -\frac{R_C}{R_E}$$



Rysunek: Schemat wzmacniacza tranzystorowego o wspólnym emiterze

Wybór punktu pracy wzmacniacza tranzystorowego

$$I_C = \beta I_B$$

$$I_E = (1 + \beta) I_B$$

$$E_C = I_1 R_1 + I_2 R_2$$

$$U_1 = I_1 R_1$$

$$U_1 = U_{BE} + I_E R_E$$

$$I_{we} + I_2 = I_B + I_1$$

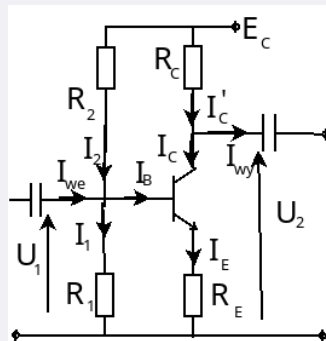
$$E_C = I_C R_C + U_{BE} + I_E R_E$$

$$I'_C = I_C + I_{wy}$$

Przybliżenie $I_B \ll I_1$

dla $I_{we} = 0$ mamy $I_1 = I_2$

dane do projektu U_{BE} i U_{CE}



Rysunek: Schemat wzmacniacza tranzystorowego

Punkt pracy tranzystora bipolarnego

Prąd wyjściowy jest zerowy

$$I_{wy} = 0 \text{ czyli } I'_C = I_C$$

$$I_C = \beta I_B$$

$$I_E = (1 + \beta) I_B$$

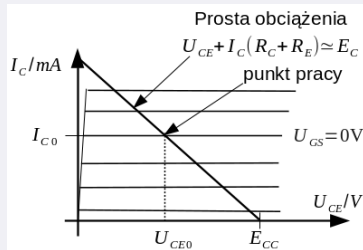
$$E_C = I_C R_C + U_{BE} + I_E R_E$$

$$I_E = I_C + I_B = I_C + \frac{1}{\beta} I_C \simeq I_C$$

$$E_C \simeq U_{BE} + I_C (R_E + R_C)$$

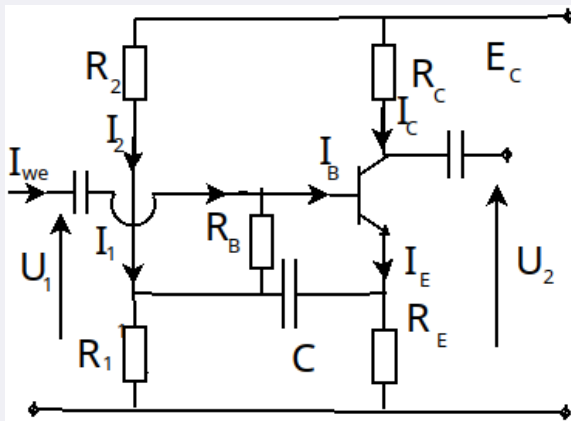
Punkt pracy w przybliżeniu wybieramy
w przybliżeniu jakiś punkt w środku
obszaru napięcia:

$$U_{CE0} \simeq \frac{1}{2} E_C \quad (178)$$

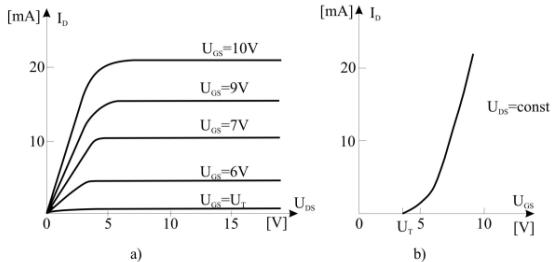


Rysunek: Prosta obciążenia

bootstrap

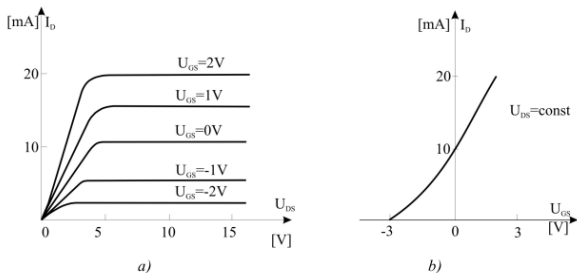


Rysunek: Układ bootstrap zwiększania rezystancji wejściowej



Rys.3 Charakterystyki: a) wyjściowe i b) przejściowa tranzystora unipolarnego z izolowaną bramką i kanałem wzbogacanym typu n.

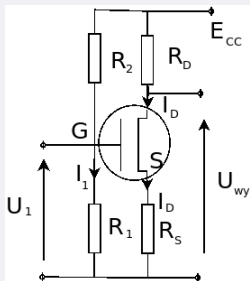
Rysunek: Charakterystyki tranzystora polowego



Rys.4 Charakterystyki: a) wyjściowe i b) przejściowa tranzystora unipolarnego z izolowaną bramką i kanałem zubażanym typu n

Rysunek: Charakterystyki tranzystora polowego

tranzystor unipolarny (FET JFET)

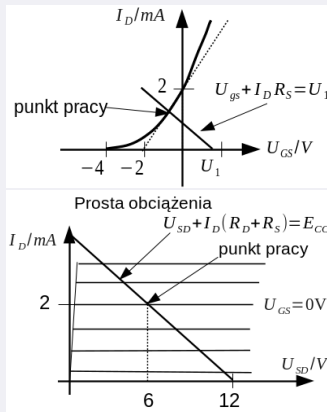


Rysunek: Schemat wzmacniacza z tranzystorem polowym

$$U_1 = E_{cc} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

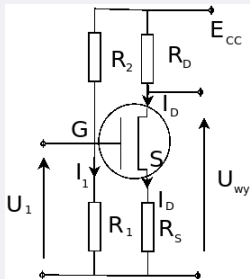
$$U_1 = U_{GS} + I_D R_S$$

$$E_{cc} = I_D (R_S + R_D) + U_{DS}$$



Rysunek: charakterystyka przejściowa $I_D = a(U_{GS} - U_0)^2$ (a - stała wyznaczona z charakterystyki) i wyjściowa tranzystora polowego.

tranzystor unipolarny - parametry wzmacniacza



$$U_1 = E_{cc} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$E_{cc} = I_D(R_S + R_D) + U_{DS}$$

$$U_1 = U_{GS} + I_D R_S \quad (179)$$

Równanie charakterystyki

prześciowej: $I_D = a(U_{GS} - U_0)^2$

Jeśli mamy dane napięcie

odcięcia U_0 i prąd dla drenu I_{D0}

dla zerowego napięcia $U_{GS} = 0$

to: $I_{D0} = a(0 - U_0)^2$

Z tego $a = \frac{I_0}{U_0^2}$. Nachylenie

charakterystyki $g = \frac{dI_a}{dU_{GS}} =$

$2a(U_{GS} - U_0) = 2\sqrt{aI_D}$.

Równanie wyjściowe:

$U_{wy} = E_{cc} - I_D R_D$

wzmocnienie (U_1 z (179)):

$$K_u = \frac{\Delta U_{wy}}{\Delta U_1} = \frac{-R_D \Delta I_D}{\Delta U_{GS} + \Delta I_D R_D} = -\frac{R_D}{\frac{1}{g} + R_S}$$