1 Elektrostatyka

Zad 1. Znaleźć potencjał Φ i natężenie pola elektrycznego E w punkcie P, leżącym na osi płaskiego pierścienia o promieniu wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2 w odległości z od środka pierścienia, jeśli pierścień jest naładowany ładunkiem dodatnim ze stałą gęstością powierzchniową σ.

Odp.

$\Phi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R_2^2+z^2} - \sqrt{R_1^2+z^2}\right);$

$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)$

Zad 2. Ładunek punktowy $+q$ został umieszczony w odległości h od przewodzącej, uziemionej płaszczyzny. Znaleźć pole w całej przestrzeni i powierzchniową gęstość ładunku indukowanego w płaszczyźnie.

Wsk. Metoda obrazów polega na zastąpieniu ładunku indukowanego w płaszczyźnie ładunkiem punktowym q', dobranym tak aby taka zamiana nie zmieniła pola elektrycznego w całej przestrzeni. W niniejszym zadaniu q' należy tak dobrać, aby na powierzchni płaszczyzny potencjał $V = 0$ (płaszczyzna jest uziemiona). Potencjał dla $z < 0$ wynosi $V = 0$, a dla $z > 0$ (po stronie ładunku $+q$) jest sumą potencjałów dwóch ładunków punktowych: q i q'. Natężenie pola liczymy jako gradient potencjału, a gęstość powierzchniową ładunku zaindukowanego — z prawa Gaussa dla płaszczyzny $E_n = E_z(x,y,0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Odp.

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\right] \\ \sigma_{ind} &= -\frac{qh}{2\pi}\left(x^2+y^2+h^2\right)^{-3/2} \end{aligned} \tag{1}$$

Zad 3. (a) Znaleźć rozkład potencjału wytwarzanego przez ładunek punktowy q odległy o d od środka uziemionej kuli przewodzącej o promieniu R.

Wsk. Na powierzchni kuli $\Phi(r) = 0$, a więc w szczególności potencjał będzie równy zeru w punkcie na powierzchni kuli najbliższym ładunkowi q i najodleglejszym od niego.

Odp. Położenie ładunku – obrazu q' oraz znaczenie wielkości r_1, r_2 w poniższych wzorach pokazuje rysunek

$\Phi_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}\right)$ $q' = -\frac{qR}{d}$ $d' = \frac{R^2}{d}$

(b) Rozwiązać analogiczny problem w przypadku kuli przewodzącej, nieuziemionej, naładowanej ładunkiem Q. Znaleźć wartość potencjału na powierzchni kuli.

Wsk. Wyobraźmy sobie, że mamy rozpatrzony w punkcie (a) układ, wytwarzający w otaczającej przestrzeni potencjał Φ_a. Na kuli znajduje się zaindukowany ładunek q'. Następnie odłaczamy przewody uziemiające i doprowadzamy na kulę ładunek $Q - q'$, aby całkowity ładunek wyniósł Q. Ten dodatkowy ładunek rozłoży się równomiernie na powierzchni kuli (dlaczego?), dając dobrze znany wkład do potencjału.

Odp. $\Phi_b = \Phi_a + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q-q'}{r}$ gdzie r jest odległością od środka kuli.

Na powierzchni kuli: $\Phi_b(r=R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q-q'}{R}$

2 Elektrostatyka w ośrodkach dielektrycznych. Kondensatory.

Zad 4. Wewnątrz sferycznego kondensatora o promieniu okładek a i b względna przenikalność dielektryczna zmienia się według wzoru: $\varepsilon = \varepsilon_1$ dla $a < r < c$ i $\varepsilon = \varepsilon_2$ dla $c < r < b$. Znaleźć pojemność kondensatora i rozkład ładunków związanych (polaryzacyjnych) na powierzchniach rozgraniczenia dielektryków, jeśli kondensator naładowano ładunkiem q na wewnętrznej i $-q$ na zewnętrznej okładce.

Odp.

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{\varepsilon_1 a} - \frac{1}{\varepsilon_2 b} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2 c}\right)^{-1} \tag{2}$$

$$\sigma_a = \frac{q}{4\pi a^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right), \quad \sigma_c = \frac{q}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right), \quad \sigma_b = -\frac{q}{4\pi b^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \tag{3}$$

Zad 5. Znaleźć pojemność i energię kondensatora kulistego, wypełnionego dielektrykiem, którego względna przenikalność dielektryczna ε jest ciągłą funkcją odległości r od środka kondensatora, opisaną wzorem $\varepsilon\left(r\right) = \varepsilon_0 a^2/r^2$, $a = const$. Promień wewnętrznej okładki kondensatora wynosi R_1, a zewnętrznej R_2.

Odp. $$C = \frac{4\pi\varepsilon_0^2 a^2}{R_2 - R_1} \qquad E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0^2 a^2}\left(R_2 - R_1\right) \tag{4}$$

Zad 6. Znaleźć pojemność kondensatora cylindrycznego o długości l i promieniach okładek R_1 i R_2. Między okładkami znajdują się trzy rodzaje dielektryka o stałych dielektrycznych ε_1, ε_2, ε_3, każdy zajmujący 1/3 objętości kondensatora (por. rys.).

Odp. $$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{3\ln\frac{R_2}{R_1}}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\right) \tag{5}$$

Zad 7. Okładki kondensatora płaskiego są prostokątami o wymiarach $a \times b$. Odległość między okładkami wynosi d, $d \ll a, b$. Kondensator znajduje się w pozycji pionowej, a jego dolna krawędź jest odległa o H od płaszczyzny poziomej, na której stoi jednorodna płytka dielektryka o wymiarach $a \times c$ $(c > H)$ i grubości d oraz względnej przenikalności dielektrycznej ε. Gęstość dielektryka wynosi γ. Obliczyć wysokość h_0, na jaką uniesie się płytka dielektryka, jeżeli na okładce kondensatora znajduje się ładunek Q. Założyć, że płytka może się swobodnie przesuwać wewnątrz kondensatora. Znaleźć również gęstości powierzchniowe ładunku na okładkach kondensatora, gdy płytka znajduje się na wysokości h_0. Zaniedbać efekty związane ze skończonymi rozmiarami okładek. Jaka jest mikroskopowa przyczyna wciągania płytki dielektryka do wnętrza kondensatora?

Wsk. Siła powodująca wciąganie dielektryka może być wyliczona jako $F = -\frac{d}{dx}E_p(X)$, gdzie $E_c(X)$ jest energią potencjalną kondensatora z dielektykiem wsuniętym w kondensator na długość x. Energia kondesatora naładowanego ładunkiem Q wynosi $E_c(x) = \frac{Q^2}{2C(x)}$, gdzie $C(x)$ jest pojemnościa kondesatora z dielektrykiem wsuniętym na głębokośc x.

Odp. $$h_0 = \frac{Q}{a\sqrt{2\varepsilon_0\left(\varepsilon - 1\right)\gamma c g}} - \left(c - H\right) - \frac{b}{\varepsilon - 1} \tag{6}$$

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon Q}{a\left[b + \left(c - H\right)\left(\varepsilon - 1\right)\right]}, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{a\left[b + \left(c - H\right)\left(\varepsilon - 1\right)\right]} \tag{7}$$

gdzie σ_1 jest gęstością ładunku w obszarze dielektryka, a σ_2 – w obszarze nad dielektrykiem.

Zad 8. Kondensator z poprzedniego zadania został częściowo zanurzony w pozycji pionowej w cieczy o względnej przenikalności dielektrycznej ε i gęstości ρ, przy czym ładunek na okładkach był równy zeru. Po połączeniu okładek kondensatora ze źródłem napięcia U poziom cieczy między okładkami podniósł się. Znaleźć różnicę poziomów cieczy po obu stronach okładek Δx i łączną wartość ładunku elektrycznego q, który przepłynął przez przewody łączące kondensator ze źródłem napięcia.

Wsk. Poziom cieczy podniósł się na skutek pracy wykonanej przez źródło $W = qU$.

$$\textbf{Odp}. \quad \Delta x = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) U^2}{\rho g d^2}, \quad q = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) U a \Delta x / d \tag{8}$$

Zad 9. Duży kondensator płaski o powierzchni okładek S zanurzony jest w cieczy o względnej przenikalności dielektrycznej ε. Odległość między okładkami wynosi d, kondensator połączony jest ze źródłem napięcia U. W chwili $t = 0$ zaczynamy odsuwać jedną z okładek kondensatora z prędkością v w kierunku prostopadłym do okładek. Znaleźć zależność pracy, potrzebnej na odsunięcie okładki, od czasu. Zaniedbać opór ośrodka.

Wsk. Wykonana przez nas praca zostanie zużyta na zmianę energii kondensatora i wymuszenie przepływu ładunku elektrycznego przez źródło. Przy rozwiązywaniu zadania można też posłużyć się wzorem na siłę przyciągania elektrostatycznego między okładkami kondensatora.

$$\textbf{Odp}. \quad W(t) = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 S U^2 \frac{vt}{d(d + vt)} \tag{9}$$

3 Przewodnictwo elektronowe

Zad 10. Dwie kule metalowe o promieniu a znajdują się w ośrodku o przewodnictwie właściwym $\sigma^\star$. Znaleźć wartość oporu elektrycznego przy przepływie prądu między kulami. Odległość między środkami kul wynosi $d \gg 2a$. Opór właściwy metalu jest znacznie mniejszy od oporu ośrodka.

Wsk. Opór elektryczny jest równy (z definicji) różnicy potencjałów dwóch najmniej oddalonych punktów obu kul, podzielonej przez wartość natężenia prądu. Należy założyć, że prąd wypływa z jednej kuli, a wpływa do drugiej (natężenia I obu prądów są równe). Ze względu na symetrię problemu, gęstości j prądu wpływającego i wypływającego mają symetrię sferyczną, $j(r) = I/4\pi r^2$, gdzie r jest odległością od środka odpowiedniej kuli. Następnie należy skorzystać z definicji przewodnictwa właściwego $\sigma^\star$, $j(r) = \sigma^\star E(r)$, gdzie E jest natężeniem pola elektrycznego w materiale. Znając E, po skorzystaniu ze związku $E(r) = -d\Phi(r)/dr$ można wyznaczyć potencjał Φ pola elektrycznego, pochodzącego od zadanego rozkładu prądów, w dowolnym punkcie ośrodka.

$$\textbf{Odp}. \quad R = \frac{1}{2\pi\sigma^\star}\frac{d - 2a}{a(d - a)} \tag{10}$$

Zad 11. Rozwiązać poprzednie zadanie, jeśli zamiast kul w ośrodku znajdują się dwa długie, metalowe walce o promieniach a i b; odległość między osiami walców wynosi $d \gg a, b$. Znaleźć opór elektryczny R ośrodka, przypadający na jednostkę długości walców.

Wsk. Skorzystać z walcowej symetrii problemu.

$$\textbf{Odp}. \quad R = \frac{1}{2\pi\sigma^{\star}} \ln \frac{(d-a)(d-b)}{ab} \tag{11}$$

4 Pole magnetyczne

Zad 12. Znaleźć wartość natężenia pola magnetycznego w punkcie, leżącym na osi solenoidu, jeżeli końce solenoidu widać z tego punktu pod kątami α i β, promień solenoidu wynosi R, a ilość zwojów na jednostkę długości jest równa n. Przez solenoid płynie prąd o natężeniu I. Przedyskutować przejście do przypadku nieskończenie długiego solenoidu.

Wsk. Jeśli oś Oz jest równoległa do osi solenoidu, to $z/R = \cot\phi$, $\alpha < \phi < \beta$ (p. rys.), stąd $|dz| = R/\sin^2\phi \, d\phi$. Przez pasek solenoidu o grubości $|dz|$ płynie prąd $dI = In\,|dz|$, a pole na osi jest scałkowanym po kącie ϕ polem, pochodzącym od tych pasków — elementarnych dipoli magnetycznych.

Odp. $H = In\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)/2$

Zad 13. Płaski dysk o promieniu R wiruje z prędkością kątową ω wokół osi, przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do jego płaszczyzny. Jaka jest wartość momentu magnetycznego dysku, jeśli został naładowany ładunkiem o stałej gęstości powierzchniowej σ?.

Odp. $\mu = \pi\omega\sigma R^4/4$

Zad 14. Przez dwie nieskończenie długie i nieskończenie cienkie płytki przewodzące o szerokości c płyną w przeciwnych kierunkach prądy o gęstości liniowej j. Płytki ułożone są równolegle, odległość pomiędzy nimi wynosi b. Znaleźć wartość natężenia pola magnetycznego w dowolnym punkcie pomiędzy płytkami.

Odp. $\vec{H} = [H_{1x} + H_{2x}, H_{1y} + H_{2y}]$, gdzie

$$H_{1x} = \frac{j}{4\pi} \ln \frac{x^2 + \left(\frac{c}{2} - y\right)^2}{x^2 + \left(\frac{c}{2} + y\right)^2} \tag{12}$$

$$H_{1y} = \frac{j}{2\pi} \left[\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{c}{2} - y\right)^2}} + \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{c}{2} + y\right)^2}} \right] \tag{13}$$

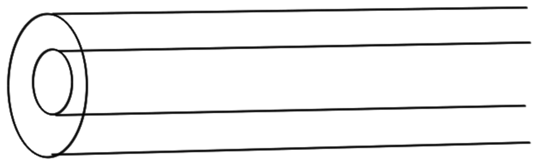
$$H_{2x} = \frac{j}{4\pi} \ln \frac{(b-x)^2 + \left(\frac{c}{2} - y\right)^2}{(b-x)^2 + \left(\frac{c}{2} + y\right)^2} \tag{14}$$

$$H_{2y} = \frac{j}{2\pi} \left[\arccos \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + \left(\frac{c}{2} - y\right)^2}} + \arccos \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + \left(\frac{c}{2} + y\right)^2}} \right] \tag{15}$$

Oś x jest prostopadła do płaszczyzny płyt, oś y – równoległa do płaszczyzny płyt i prostopadła do kierunku przepływu prądu (p. rys.).

Zad 15. Wyznaczyć natężenie pola magnetycznego, wytworzonego przez prąd o natężeniu I, płynący przez nieskończenie długi kabel koncentryczny o promieniach R_1, R_2 i R_3 jak na rysunku. Przestrzeń między żyłami kabla, $R_1 < r < R_2$ wypełniona jest powietrzem.

Odp. Dla $0 < r < R_1$ $H = Ir/2\pi r_1^2$; dla $R_1 < r < R_2$ $H = I/2\pi r$; dla $R_2 < r < R_3$ $H = I\left(R_3^2 - r^2\right)/\left[2\pi r\left(R_3^2 - R_2^2\right)\right]$; dla $r > R_3$ $H = 0$.



Rysunek 1. Przewód koncentryczny, wewnętrzny walec jest rdzeniem o promieniu R_1, a zewnętrzny płaszczem o promieniu R_2

Zad 16. Znaleźć wartość natężenia pola magnetycznego w punkcie, leżącym na osi toroidu o przekroju kwadratowym, na który nawinięto równomiernie przewodnik, przez który płynie prąd o natężeniu I. Ilość zwojów wynosi N, promień zewnętrzny toroidu wynosi R_1, promień wewnętrzny R_2 (p. rys.).

Odp. $H = NI/\left[\pi\left(R_1 + R_2\right)\right]$

Zad 17. W długim, przewodzącym walcu o promieniu R znajduje się cylindryczne wydrążenie o promieniu a, przy czym środek wydrążenia znajduje się w odległości d od osi walca, gdzie $d < R - a$. Przez walec płynie prąd o natężeniu I. Znaleźć natężenie pola magnetycznego w obszarze wydrążenia.

Wsk. Zadanie jest podobne do zadania z wyznaczeniem pola grawitacyjnego dla kuli z wydrążeniem. Pole wewnątrz walca pełnego jest równe sumie pól, pochodzących od walca z wydrążeniem, i od wyimaginowanego walca, stanowiącego dopełnienie wydrążenia, przez który również płynie prąd I. Każde z tych dwóch pól łatwo liczy się z prawa Ampere'a.

Odp. $H = Id/\left[2\pi\left(R^2 - a^2\right)\right]$ (pole jednorodne!).

.

Zad 18. Miedziany okrąg o masie m i promieniu R styka się z metalową płaszczyzną. Okrąg może się swobodnie obracać wokół osi równoległej do płaszczyzny. Płaszczyzna i kontakt na osi obrotu podłączone są do baterii akumulatorów, a oś z okręgiem połączona jest nieważką przewodzącą szprychą. Jaką prędkość kątową uzyska okrąg, jeżeli umieścimy układ w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B, prostopadłym do płaszczyzny okręgu, a przez obwód w cią gu czasu t_0 będzie przepływał prąd o natężeniu I? Odp. $\omega = IBt_0/2m$

Zad 19. Prądy o gęstości liniowej j płyną w przeciwnych kierunkach przez dwie równoległe płaszczyzny. Jakie jest ciśnienie, wywierane przez pole magnetyczne na te płaszczyzny?.

Wsk. Każdą z płaszczyzn potraktować jako znajdującą się w polu drugiej płaszczyzny i obliczyć siłę elektrodynamiczną, działającą na jednostkę powierzchni płaszczyzny.

Zad 20. Znaleźć siłę wzajemnego oddziaływania nieskończonego, prostoliniowego przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu I_1, z kołowym przewodnikiem o promieniu R, w którym płynie prąd o natężeniu I_2, jeżeli:

(a) Prosta i okrąg leżą w jednej płaszczyźnie

(b) Prosta jest umieszczona wzdłuż osi symetrii okręgu

Odp. (a) $F = 2\mu_0 I_1 I_2 \sin^2\frac{\alpha}{2}/\cos\alpha$ (patrz rysunek); (b) $F = 0$.

5 Indukcja elektromagnetyczna

Zad 21. Po dwóch pionowych, odległych od siebie o d równoległych szynach metalowych zsuwa się pod działaniem siły ciężkości poprzeczka o masie m. U góry szyny są spięte oporem R (jest to jedyny niezaniedbywalny opór w obwodzie). Prostopadle do szyn skierowane jest jednorodne pole magnetyczne o indukcji B. Znaleźć prędkość poprzeczki w funkcji czasu, zakładając że została puszczona swobodnie i cały czas utrzymywany jest kontakt elektryczny z szynami. Tarcie zaniedbać. **Odp.** $v(t) = \frac{mR}{B^2d^2} g \left[1 - \exp\left(-\frac{B^2d^2t}{mR}\right)\right]$

Zad 22. Wyznaczyć SEM indukcji, powstającą między biegunem i równikiem jednorodnie namagnesowanej kuli o promieniu R i momencie magnetycznym $\mathbf{p}_m = (4/3)\,\pi R^3 \mathbf{M}$ (gdzie $\mathbf{M}$ jest wektorem magnetyzacji), obracającej się ze stałą prędkością ką tową ω wokół osi równoległej do $\mathbf{M}$. Indukcja magnetyczna wewnątrz kuli, gdy nie ma zewnętrznego pola magnetycznego, jest stała i wynosi $\mathbf{B}_0 = (2/3)\,\mu_0 \mathbf{M}$.

Wsk. Należy scałkować wkłady do SEM indukcji od elementów długości łuku $dl = Rd\phi$ wzdłuż dowolnego "południka" kuli, między równikiem ($\phi = \pi/2$) i biegunem ($\phi = 0$). Z warunku równowagi między siłą Lorentza i polem elektrycznym SEM indukcji uzyskamy elementarny wkład do SEM indukcji na łuku $\mathbf{dl} = rd\phi \mathbf{e}_\phi$ w postaci $d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B_0}) \cdot \mathbf{dl} = -\omega B_0 R^2 \cos\phi \sin\phi d\phi$.

Odp. $\mathcal{E} = \omega \mu_0 p_m / (4\pi R)$

Zad 23. Od prostoliniowego przewodu z prądem o natężeniu I oddala się ze stałą prędkością v leżą ca z nim w jednej płaszczyźnie trójkątna ramka równoboczna o boku a. Obliczyć SEM indukowaną w ramce w momencie, gdy jej bok równoległy do przewodu z prądem jest oddalony od tego przewodu o b. Prędkość ramki jest prostopadła do przewodu, a jej wierzchołek wskazuje kierunek ruchu.

Odp. $\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I v}{\pi\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}a}{2b} - \ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}a}{2b}\right)\right]$

Zad 24. Obliczyć indukcyjność własną, przypadają cą na jednostkę długości kabla koncentrycznego, wykonanego z przewodu walcowego o promieniu R_1, otoczonego współosiowym walcem przewodzącym o zaniedbywalnej grubości i promieniu R_2. Prąd ma gęstość jednorodną w obszarze przewodu wewnętrznego. **Wsk.** Uwzględnić pole zarówno wewnątrz walca o promieniu R_1 (można je wyznaczyć z prawa Ampere'a), jak i między walcami. Pole na zewnątrz przewodu wynosi zero (dlaczego?). Odp. $\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1}\right)$

Zad 25. Obliczyć indukcyjność własną na jednostkę długości kabla z zad.4, jeśli prąd płynie po powierzchni wewnętrznego kabla. **Odp.** $L = (\mu_0/2\pi)\ln(R_2/R_1)$

Zad 26. Obliczyć indukcyjność wzajemną między solenoidem o długości l i promieniu R_2, mającym N zwojów, i pojedynczym zwojem o promieniu $R_1 \ll R_2$, umieszczonym współosiowo w środku solenoidu. **Wsk.** Pole na osi solenoidu o skończonej długości, w punkcie z którego jego końce widoczne są pod kątami α, β wynosi $B = \frac{\mu_0 NI}{2l}(\cos\alpha - \cos\beta)$. Pole w obszarze wewnętrznego zwoju można z dobrym przybliżeniem uznać za jednorodne.

Odp. $M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{2}\pi N R_1^2 \left(R_2^2 + l^2/4\right)^{-1/2}$

Zad 27. Znaleźć współczynnik indukcji wzajemnej toroidu o przekroju kwadratowym o boku a i promieniu wewnętrznym R, oraz nieskończenie długiego, cienkiego przewodu prostoliniowego przewodu, pokrywającego się z osią toroidu. Ilość zwojów toroidu wynosi N. **Odp.** $M_{12} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$

Zad 28. Pierścień z materiału nadprzewodzącego, który może poruszać się jedynie w kierunku pionowym, umieszczono na stole nad zwojem przewodnika. Wzdłuż zwoju zaczął płynąć prąd I. Na jaką wysokość podniesie się pierścień nadprzewodzący, jeśli jego indukcyjność własna wynosi L, a indukcyjność wzajemna między zwojem i pierścieniem $M_{12}(x)$, gdzie x jest odległością pierścienia od zwoju. Przesunięcie pierścienia w czasie, gdy prąd w zwoju narastał od 0 do I można pominąć. Masa pierścienia m.

Wsk. Opór pierścienia $R = 0$, więc $-d\Phi/dt = RI = 0$, więc strumień magnetyczny obejmowany przez nadprzewodzący pierścień nie zmieni się: $\Phi = LI_1 - M_{12} I = const$, gdzie I_1 — prąd w nadprzewodniku. Elementarna praca, wykonywana przez pole prądu I nad podnoszącym się pierścieniem, $dW = I_1 d\Phi_{12} = -I_1 d(M_{12} I)$ jest równa elementarnemu przyrostowi energii potencjalnej pierścienia w polu grawitacyjnym, $dE_p = mgdh$. **Odp.** $h = \frac{I^2}{2mgL}\left[M_{12}^2(x=0) - M_{12}^2(x=h)\right]$ (jest to równanie uwikłane; znając konkretną postać $M_{12}(x)$ można z niego wyznaczyć h).