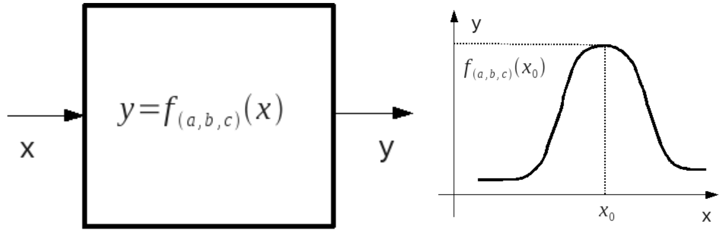
Niepewność wartości wielkości w metodzie polegającej na wyznaczaniu ekstremum

Michał Urbański

1. Pomiary z wyznaczaniem ekstremum

Metody wyznaczanie wartości wielkości przez wyznaczanie ekstremum są jednymi z najdokładniejszych metod pomiarowych. Wykorzystywane są np. w wyznaczaniu rezonansu (metody rezonansowe) lub w metodzie najmniejszego kąta załamania w badaniu dyspresji. Pomiar tą metoda polega na zbadaniu zależności wielkości y (wielkości wyjściowej mierzonego układu, lub wielkości zależnej) w funkcji wielkości kontrolnej x (wielkości wejściowej) a następnie na ustaleniu ekstremum zmierzonej zależności.



Rysunek 1. Obiekt badany i jego funkcja opisująca nieliniowa zależność wielkości wejściowej x od wyjściowej y.

Załóżmy, że badany układ opisany jest funkcją $f_{(a,b,c)}(x)$, zależącą od parametrów a, b, c i mająca maksimum zależne od tych parametrów. Metoda rezonansowa polega na wyznaczeniu wartości wielkości wejściowej x takiej, przy której wielkość wyjściowa jest masymalna:

$$\frac{d}{dx} f_{(a,b,c)}(x)\Big|_{x=x_0} = 0 \Longrightarrow g(a,b,c) = x_0 \tag{1}$$

gdzie $g(a,b,c)$ jest funkcja która wynika z rozwiązania równania $\frac{d}{dx} f_{(a,b,c)}(x) = 0$.

Rozważmy dla przykładu układ, który można opisać funkcją kwadratową $f_{(a,b,c)}(x) = ax^2 + bx + c$. Jeśli maksimum jest dla $x = x_0$ to mamy równanie:

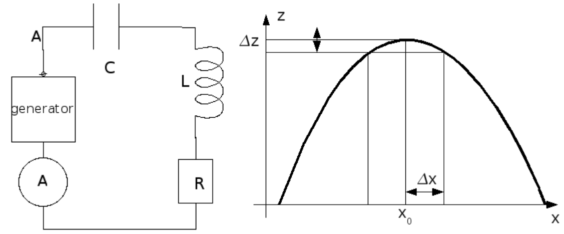
$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)\Big|_{x=x_0} = 0 \Longrightarrow -\frac{b}{2a} = x_0 \tag{2}$$

Jeśli więc w wyniku pomiarów wyznaczymy wartość zmiennej x, dla której występuje ekstremum to możemy ustalić związek pomiędzy parametrami a i b.

Inny przykład dotyczy badania rezonansu. Związek pomiędzy częstotością ω a natężeniem prądu I dla szeregowego układu rezonansowego opisana jest równaniem:

$$I(\omega) = \frac{U_g}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \tag{3}$$

gdzie: R–rezystancja obwodu, L–indukcyjność, C–pojemność elektryczna, U_g–napięcie generatora.



Rysunek 2. Układ rezonansowy (lewy rys.) i konstrukcja dokładności wyznaczenia położenia x_0 maksimum funkcji na podstawie niepewności Δz wartości zmierzonej $z = f(x)$ (prawy rys.).

Z warunku maksimum: $\frac{d}{d\omega} I(\omega) = 0$ wynika $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Źródłami błędów wyznaczenia częstotliwości rezonansowej są: błędy przyrządu mierzącego częstotliwość (lub pomiar zmiennej x) oraz nieczułość ΔI przyrządu mierzącego natężenie prądu jak to pokazano na rys.2. Wpływ błędu przyrządu mierzącego natężenie prądu można empirycznie zaobserować porzez zbadania "obszaru martwego„ wokół punktu rezonansu. W tym celu należy sprawdzić w jakim przedziale można zmieniać częstotliwość bez zauważalnej zmiany natężenia prądu. W celu numerycznego obliczenia związku pomiędzy błędem natężenia prądu i błędem określenia częstotliwości rezonansowej należy zapisać różniczkę prądu wykorzystując rozwinięcie Taylora.

Wyprowadzimy wiekość błędu wyznaczania ekstremum funkcji, zaleznej od trzech parametrów a, b, c opisanej ogólnym równaniem $y = f_{(a,b,c)}(x)$:

$$\Delta f_{(a,b,c)}(x) = f_{(a,b,c)}(x_0 + \Delta x) - f_{(a,b,c)}(x_0) = \tag{4}$$

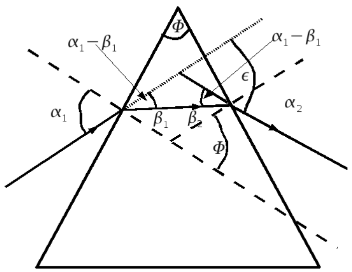
$$\frac{d}{dx} f_{(a,b,c)}(x)\Big|_{x=x_0} \Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} f_{(a,b,c)}(x)\Big|_{x=x_0} \Delta x^2 + \cdots \tag{5}$$

Ponieważ metoda pomiarowa polega na określeniu ekstremum więc $\frac{d}{dx} f_{(a,b,c)}(x)\Big|_{x=x_0} = 0$. W szeregu Taylora na przyrost Δf musimy uwzględnić druga pochodną i związek pomiędzy błędem Δf i błędem wartości kontrolnej Δx ma postać funkcji kradratowej, z druga pochodną.

W przypadku, gdy można opisać zjawisko wielomianem kwadratowym $f_{(a,b,c)}(x) = ax^2 + bx + c$ wtedy $\frac{d^2}{dx^2} f_{(a,b,c)}(x)\Big|_{x=x_0} = 2a$. Jednak ogólnie druga pochodna może być opisana skomplikownym wzorem analitycznym i wygodniej jest policzyć przyrost wartości funkcji Δf dla danego Δx prosto z równania 4 wykonując obliczenia dla $x = x_0$ i $x = x_0 + \Delta X$.

2. Pomiar współczynnika załamania medodą najmniejszego kąta załamania

Pomiar polega na wyznaczeniu kąta załamania wiązki światła o określonym kolorze w warunkach gdy pryzmat tak ustawimy, że kąt załamania jest najmniejszy. Żródłem niepewności są błędy pomiaru kąta łamiącego pryzmatu, kąta załamania oraz błąd ustawienia pryzmatu w pozycji gdy kąt załamania jest minimalny (niepewność ustawienia pryzmatu wyznczamy na podstanie wielkości "obszaru martwy„). Aby wyznaczyć składowe niepewności trzeba wyprowadzić zależność współczynnika załamania od tych trzech zmiennych: kąta łamiącego pryzmatu Φ, kąta załamania ϵ i kąta ustawienia pryzmatu α. Wzór ma opisywać sytuację ogólniejszą niż przypadek gdy α jest minimalne.



Rysunek 3. Bieg promieni w pryzmacie.

Z rysunku widać (dla kątów zewnętrznych trójkątów):

$$\Phi = \beta_1 + \beta_2 \text{ oraz } \epsilon = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \text{ czyli } \Phi = \alpha_1 + \alpha_2 - \epsilon. \quad (6)$$

Współczynnik załamania:

$$n = \frac{sin(\alpha_1)}{sin(\beta_1)} \quad \text{oraz} \quad n = \frac{sin(\alpha_2)}{sin(\beta_2)} \quad (7)$$

W sytuacji gdy kąt załamania jest najmniejszy ($\epsilon = min$) mamy $\alpha_1 = \alpha_2$ (dowód jest w instrukcji do ćwiczenia), ale w rzeczywistości zawsze jest jakaś asymetria. Oznaczymy błąd wyznaczenia wartości minimalnej jako $\Delta\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$, wtedy mamy: $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\Phi + \epsilon) + \Delta\alpha$. Podobnie, jeśli błąd wartości kąta β wynosi $\Delta\beta = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)$ to mamy: $\beta_1 = \frac{1}{2}\Phi + \Delta\beta$. Współczynnik załamania w ogólnym przypadku ustawienia pryzmatu można wyliczyć ze wzoru:

$$n(\Phi, \epsilon, \Delta\alpha) = \frac{sin\left(\frac{\Phi+\epsilon}{2} + \Delta\alpha\right)}{sin\left(\frac{\Phi}{2} + \Delta\beta\right)} \quad (8)$$

$\Delta\beta$ można wyliczyć mając $\Delta\alpha$, z równań $n = \frac{sin\alpha_1}{sin\beta_1}$ i $n = \frac{sin\alpha_2}{sin\beta_2}$ mamy $sin\alpha_1 - sin\alpha_2 = n(sin\beta_1 - sin\beta_2)$, jeśli założymy, że kąty α i β są małe (wtedy: $sin\alpha \simeq \alpha$) to:

$$\Delta\beta = \Delta\alpha \frac{1}{n} \frac{cos\left(\frac{\Phi+\epsilon}{2}\right)}{cos\left(\frac{\Phi}{2}\right)} \quad (9)$$

Składowe niepewności związane z poszczególnymi źródłami błędów obliczymy wyznaczając odpowiednie różniczki:

Składowa związana z niepewnością $\Delta\Phi$ kąta łamiącego:

$$\Delta_\Phi n = \left|\frac{dn}{d\Phi}\Delta\Phi\right|_{\Delta\alpha=0} = \frac{1}{2}\frac{sin\frac{\epsilon}{2}}{sin^2\frac{\Phi}{2}}\Delta\Phi \quad (10)$$

Składowa związana z niepewnością $\Delta\epsilon$ pomiaru kąta załamania:

$$\Delta_\epsilon n = \left|\frac{dn}{d\epsilon}\right|_{\Delta\alpha=0} \Delta\epsilon = \frac{1}{2}\frac{cos\frac{\Phi+\epsilon}{2}}{sin\frac{\Phi}{2}}\Delta\epsilon \quad (11)$$

Dla składowej $\Delta_\alpha n$ związanej z niepewnością $\Delta\alpha$ ustawienia kąta minimalnego, wartość niepewności ustalamy na podstawie obserwacji obszaru martwego: $\Delta\alpha = \frac{1}{2}$"obszar martwy„. Ponieważ pierwsza pochodna współczynnika załamania względem kąta $\Delta\alpha$ jest równa zeru więc do obliczeń niepewności metodą różniczki niezbędne jest wyznaczenie drugiej pochodnej, :

$$\Delta_\alpha n = \left|\frac{dn}{d\alpha}\right|_{\Delta\epsilon=0} \Delta\alpha + \frac{1}{2}\left|\frac{d^2n}{d^2\alpha}\Delta^2\alpha\right|_{\Delta\epsilon=0} = \frac{1}{2}\left|\frac{d^2n}{d^2\alpha}\Delta^2\alpha\right|_{\Delta\epsilon=0} \quad (12)$$

Ponieważ wyrażenie na drugą pochodną jest skomplikowane więc łatwiej jest wyliczyć $\Delta_\alpha n$ jako różnicę wartości dla $\Delta\alpha = 0$ i zaobserwowanego jako promień obszaru martwego $\Delta\alpha$: $\Delta_\alpha n = |n(\Phi, \epsilon, \Delta\alpha) - n(\Phi, \epsilon, \Delta\alpha = 0)|$

Podkreślmy, że niepewności $\Delta\epsilon$ i $\Delta\Phi$ są ok. kilku minut a $\Delta\alpha$ ok. pół stopnia, ale wkład do całkowitej niepewności składowej związanej z błędem ustawienia pryzmatu może być mniejszy od pozostałych składników.

Całkowita niepewność:

$$u(n) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\Delta_\alpha n)^2 + (\Delta_\epsilon n)^2 + (\Delta_\Phi n)^2} \quad (13)$$

Zadania:

1. Udowodnij, że z warunku $\frac{dn}{d\alpha} = 0$ wynika $n = \frac{sin\left(\frac{\Phi+\epsilon}{2}\right)}{sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$.
2. Wyprowadź wzory 11 i 10.