1 WEKTORY

Anna Urbańska, Michał Urbański

1.1 Wektor na płaszczyźnie

Pojęcie wektora niezbędne jest w fizyce np. wektor położenia, wektor prędkości, wektor siły, wektor pędu, wektor natężenia pola elektrycznego.

Definicja 1. **Wektorem zaczepionym** nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z nich nazywamy początkiem wektora, a drugi końcem wektora.

Wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Wektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ przedstawiamy w postaci strzałki, grot strzałki znajduje się w punkcie B.

Długością wektora nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$.

Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego początek pokrywa się z końcem i oznaczamy $\overrightarrow{0}$ oraz rysujemy jako punkt. Długość wektora zerowego jest równa 0.

Wektory niezerowe nazywamy **równoległymi**, jeśli leżą na jednej prostej lub na prostych równoległych. O takich wektorach mówimy, że mają ten sam kierunek.

Niezerowe wektory równoległe mają albo zgodne albo przeciwne zwroty. (przykładowe rysunki)

Tak więc każdy niezerowy wektor na płaszczyźnie charakteryzują trzy wielkości:

1. Kierunek - kierunek wektora $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ to kierunek prostej przechodzącej przez punkty A i B.
2. Zwrot - zwrot wektora $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ wyznacza porządek punktów A i B. Punkt B wskazuje zwrot.
3. Długość - długość wektora $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ to długość odcinka AB.

Wektor zerowy nie ma określonego kierunku ani zwrotu. Przyjmujemy jednak, że wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora.

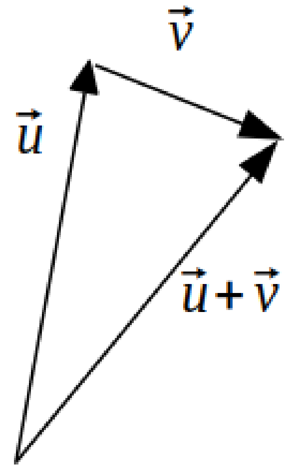
1.2 Równość wektorów

Definicja 2. Dwa niezerowe wektory są **równe** $\Leftrightarrow$ mają taką samą długość, kierunek i zwrot.

Pojęcie równości wektorów posłuży nam do definicji nowego rodzaju wektora tzw. wektora swobodnego.

Definicja 3. **Wektorem swobodnym** nazywamy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych, równych danemu wektorowi zaczepionemu.

Wektory swobodne oznacza się małymi, pojedynczymi literami ze strzałką np. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$.



Rysunek 1. Dodawanie wektorów

1.3 Działania na wektorach

1. **Suma wektorów.**

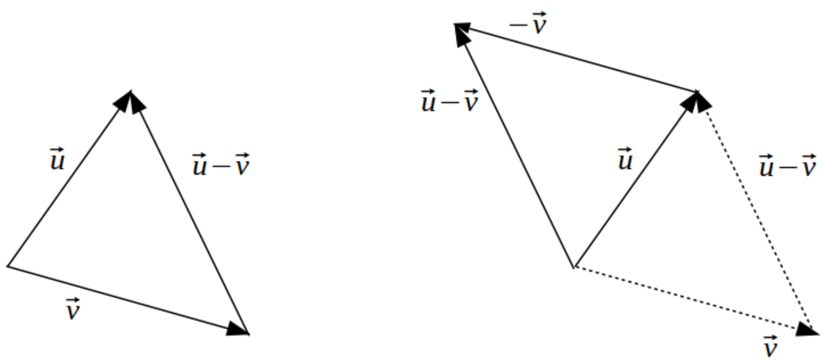
Sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor, którego początkiem jest początek wektora $\vec{u}$, a końcem jest koniec wektora równego wektorowi $\vec{v}$, zaczepionego w końcu wektora $\vec{u}$. Sumę wektorów oznaczamy $\vec{u}+\vec{v}$.

Wektorami przeciwnymi nazywamy dwa wektory $\Leftrightarrow$ ich suma jest wektorem zerowym. Z definicji tej wynika, że wektory przeciwne są równoległe i mają taką samą długość, ale mają przeciwne zwroty.

Wektor przeciwny do wektora $\vec{u}$ oznaczamy $-\vec{u}$, a przeciwny do $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ oznaczamy $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ lub $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

2. **Różnica wektorów.**

Różnicą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor, który jest sumą wektorów $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$. $\vec{u}$ i $-\vec{v}$, ponieważ



Rysunek 2. Odejmowanie wektorów. Po lewej stronie: różnica wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Wektor $\vec{u}-\vec{v}$ rozpięty jest pomiędzy końcami wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Po prawej pokazane jest, że dodawanie $\vec{u}+(-\vec{v})$ daje taki sam wektor swobodny (rysunek linią ciągłą) co konstrukcja z lewego rysunku linią przerywaną

Reguła równoległoboku.
Na definicji sumy i różnicy wektorów oparta jest tzw. **reguła równoległoboku**.

Zaczepiamy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w tym samym punkcie, a następnie rysujemy równoległobok wyznaczony przez te wektory.

1. Wektor wyznaczony przez przekątną równoległoboku, zaczepiony w tym samym punkcie co wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest sumą $\vec{u}+\vec{v}$.

2. Wektor wyznaczony przez przekątną równoległoboku łączącą końce wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i skierowany do wektora $\vec{u}$ jest różnicą $\vec{u}-\vec{v}$ (skierowany do wektora $\vec{v}$ jest różnicą $\vec{v}-\vec{u}$).

3. **Iloczyn wektora przez liczbę.**

Iloczynem wektora niezerowego $\vec{u}$ i liczby $k \neq 0$ nazywamy wektor równoległy do wektora $\vec{u}$ mający:

a) długość $k \cdot \left|\vec{u}\right|$ i zwrot zgodny z wektorem $\vec{u}$ dla $k > 0$,

b) długość $-k \cdot \left|\vec{u}\right|$ i zwrot przeciwny do zwrotu wektora $\vec{u}$ dla $k < 0$.

Przyjmujemy, że wektory będące iloczynem:

a) wektora zerowego i liczby,

b) wektora niezerowego i liczby zero

są wektorami zerowymi.

Własności działań na wektorach.

1. $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (przemienność dodawania wektorów)
2. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$ (łączność dodawania wektorów)
3. $k \cdot \left(l \cdot \vec{v}\right) = (kl) \cdot \vec{v}$
4. $(k+l) \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{v} + l \cdot \vec{v}$
5. $k \cdot \left(\vec{u}+\vec{v}\right) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$.

Zadania.

1. Narysuj wektory $\vec{u}+\vec{v}$ i $\vec{u}-\vec{v}$, jeśli $0 < \left|\vec{u}\right| < \left|\vec{v}\right|$ oraz:

a) wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe i mają zgodne zwroty,

b) wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe i mają przeciwne zwroty.

2. Dane są dwa niezerowe i nierównoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Narysuj wektory:

a) $\vec{u}+\vec{v}$, b) $\vec{u}-\vec{v}$, c) $\vec{v}-\vec{u}$, d) $2\vec{v}$, e) $-\frac{1}{2}\vec{u}$.

3. Dane są dwa różne punkty A i B. Na prostej AB zaznacz punkt P tak, aby:

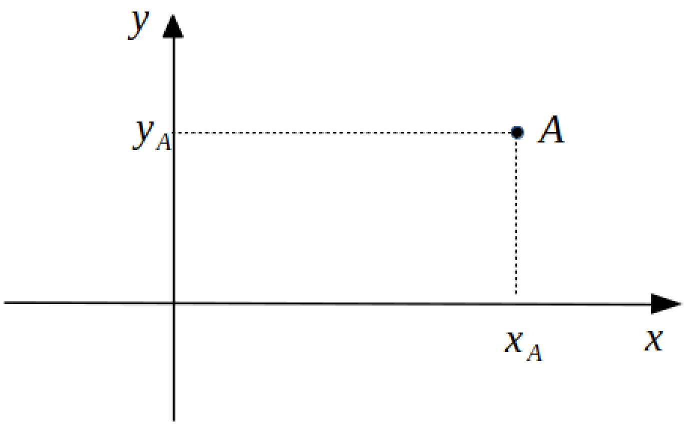
a) $\vec{\mathrm{AP}} = -\vec{\mathrm{BP}}$, b) $\vec{\mathrm{AP}} = 2\vec{\mathrm{BP}}$, c) $2\vec{\mathrm{AP}} = \vec{\mathrm{BA}}$, d) $\vec{\mathrm{AP}} + \vec{\mathrm{AB}} = \vec{0}$.

4. Dany jest sześciokąt foremny ABCDEF. Wiedząc, że $\vec{\mathrm{AD}} = \vec{a}$ i $\vec{\mathrm{DE}} = \vec{b}$ zapisz za pomocą tych wektorów: a) $\vec{\mathrm{BC}}$, b) $\vec{\mathrm{FC}}$, c) $\vec{\mathrm{DC}}$, d) $\vec{\mathrm{BD}}$, e) $\vec{\mathrm{EB}}$, f) $\vec{\mathrm{FD}}$.

5. Udowodnij, że odcinek łączący środki boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku, a jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku.

1.4 Wektor w układzie współrzędnych na płaszczyźnie

Opiszemy teraz wektor w układzie współrzędnych na płaszczyźnie. Każdy punkt opisany jest parą liczb które są współrzędnymi punktu dla danego układu współrzędnych.



Rysunek 3. Punkt A ma współrzędne x_A i y_B, punkt zadany jest parą (x_A, y_B).

Każdemu wektorowi zaczepionemu można przyporządkować dokładnie jedną parę liczb, którą nazwiemy jego współrzędnymi. Z drugiej strony każdej parze liczb można w danym układzie współrzędnych przyporządkować dokładnie jeden wektor swobodny, dla którego te liczby są jego współrzędnymi.

Dlatego teraz wektory jako uporządkowane pary punktów zastąpimy uporządkowanymi parami liczb.

Definicja 4. Dane są w układzie współrzędnych punkty $A\,(x_1, y_1)$ i $B\,(x_2, y_2)$.

Wektorem nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$.

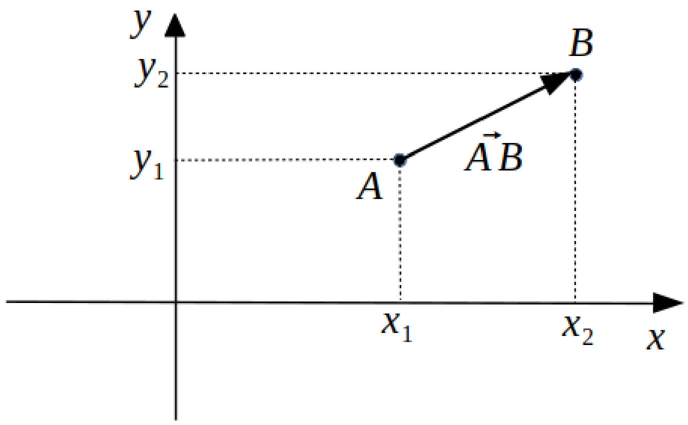
Taki wektor oznaczamy symbolem $\vec{\mathrm{AB}}$, a liczby $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ nazywamy współrzędnymi wektora.

Wektor, którego obie współrzędne są zerami, nazywamy **wektorem zerowym**.

Zadania.

1. Dane są punkty $A(-2, 5)$ oraz $B(3, -4)$. Oblicz współrzędne wektorów $\vec{\mathrm{AB}}$ i $\vec{\mathrm{BA}}$.

2. Dany jest punkt $A(7, -3)$. Wyznacz współrzędne punktu B, wiedząc, że:



Rysunek 4. Wektor w układzie współrzędnych, $\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$

a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = [-8, 11]$, b) $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = [2, -1]$.

Interpretacja współrzędnych wektora - przykład.

Dane są punkty $A(-2, 5)$ oraz $B(3, -4)$. Obliczmy współrzędne tego wektora $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = [5, -9]$ i narysujmy go w układzie współrzędnych. Zauważmy, że aby z punktu A dojść do punktu B musimy się przesunąć o 5 jednostek w prawo (zgodnie z kierunkiem osi x) i o 9 jednostek w dół (przeciwnie do kierunku osi y).

Podsumowując:

Definicja 5. Pierwsza współrzędna wektora $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ opisuje przesunięcie z punktu A do punktu B wzdłuż osi OX, a druga współrzędna wzdłuż osi OY.

Jeśli współrzędna jest dodatnia, to przesunięcie jest zgodne ze zwrotem osi, jeśli jest ujemna, to jest przeciwne do zwrotu osi.

Wektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = [a, b]$ można rozłożyć na wektory składowe: $[a, b] = [a, 0] + [0, b]$.

Np. wektory składowe wektora $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = [5, -9]$, to $[5, 0] + [0, -9]$.

Równość wektorów.

Wektory $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ są równe $\Leftrightarrow u_x = v_x$ i $u_y = v_y$.

Zadanie.

Narysuj w układzie współrzędnych wektor $[-3, 5]$.

Jest nieskończenie wiele takich wektorów. Tworzą one wektor swobodny.

Aby narysować dany wektor, wystarczy wskazać dowolny wektor tej rodziny:

Np. $A(0, 0)$ i wówczas $B(-3, 5)$ $C(1, -2)$ i wówczas $B(-2, 3)$.

Długość wektora.

Długością wektora $\vec{u} = [u_x, u_y]$ nazywamy liczbę $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$.

Jeśli $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, to długość wektora $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ wyraża się wzorem:

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Zadanie.

Oblicz długości wektorów: a) $\vec{u} = [5, -9]$, b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, gdzie $A(-1, 7)$ i $B(7, -8)$.

Suma wektorów.

Sumą wektorów $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ nazywamy wektor $\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y]$.

Każdy wektor jest sumą swoich wektorów składowych.

Wektory przeciwne.

Wektory $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ są przeciwne $\Leftrightarrow$ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ tzn. $u_x + v_x = 0$ i $u_y + v_y = 0$.
Można zauważyć, że jeśli $\vec{u} = [u_x, u_y]$, to $-\vec{u} = [-u_x, -u_y]$.

Różnica wektorów.

Różnicą wektorów $\vec{u} = [u_x, u_y]$ i $\vec{v} = [v_x, v_y]$ nazywamy wektor $\vec{u}-\vec{v}= [u_x - v_x, u_y - v_y]$.

Iloczyn wektora przez liczbę.

Iloczynem wektora $\vec{u} = [u_x, u_y]$ przez liczbę rzeczywistą k nazywamy wektor $k\cdot\vec{u} = [k \cdot u_x, k \cdot u_y]$.

Definicja 6. Jeśli dla niezerowych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ istnieje liczba rzeczywista k, dla której $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe i mówimy, że mają ten sam kierunek.

Jeśli $k > 0$, to maję też ten sam zwrot, jeśli $k < 0$, to mają przeciwne zwroty.

Z tej definicji wynika, że dla niezerowych wektorów $\vec{u} = [u_x, u_y]$ oraz $\vec{v} = [v_x, v_y]$
$\vec{u} \parallel \vec{w} \Leftrightarrow v_x = \mathrm{k}u_x$ i $v_y = \mathrm{k}u_y \Rightarrow$ jeśli $u_x \neq 0$ i $u_y \neq 0$, to $\frac{v_x}{u_x} = \frac{v_y}{u_y} = k \Rightarrow$
$u_x v_y - u_y v_x = 0$.

Środek odcinka.

W układzie współrzędnych dane są punkty $A\,(x_1, y_1)$ i $B\,(x_2, y_2)$. Wyznaczymy współrzędne środka odcinka AB. Przyjmijmy, że jest nim punkt $S\,(x_s, y_s)$.

Ponieważ S jest środkiem odcinka AB, to wektory $\vec{\mathrm{AS}}$ i $\vec{\mathrm{SB}}$ są równe, czyli:
$x_s - x_1 = x_2 - x_s$ i $y_s - y_1 = y_2 - y_s$
Zatem:
$\{x_s = \frac{x_1+x_2}{2} |$.

Zadania.

1. Dane są punkty $A\,(-2, -11)$, $B(3, -1)$, $D(-5, 3)$. Wyznacz:

a) współrzędne wektorów $\vec{\mathrm{AD}}$ i $\vec{\mathrm{AB}}$,

b) długość wektora $\vec{\mathrm{AB}}$,

c) współrzędne wektora $-3\vec{\mathrm{AD}}$,

d) współrzędne wektora $\frac{1}{5}\vec{\mathrm{AB}} + \vec{\mathrm{AD}}$,

e) współrzędne wektora $\vec{\mathrm{AB}} - 4\vec{\mathrm{AD}}$,

f) środek odcinka **BD,**

g) współrzędne punktu **E**, jeśli $\vec{\mathrm{AE}} = [-5, -2]$,

1.5 Iloczyn skalarny

Definicja

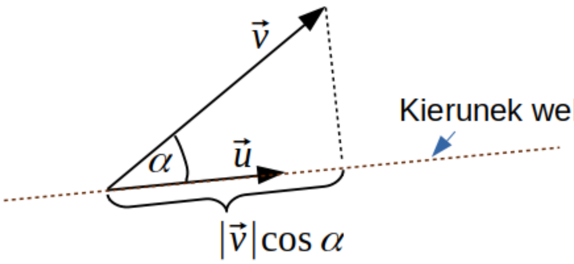
Iloczyn skalarny dwóch wektorów definiujemy następująco:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha \tag{1}$$

Jeśli pogrupujemy elementy we wzorze (1) to możemy iloczyn skalarny zapisać jako iloczyn dwóch członów (rysunek 5) będących długościami dwóch wektorów zapisanych w nawiasach:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = (|\vec{u}|)\ (|\vec{v}| \cos \alpha) \tag{2}$$

pierwszy człon $|\vec{u}|$ to długość wektora $\vec{u}$, $|\vec{v}| \cos \alpha$ - długość rzutu wektora $\vec{v}$ na kierunek wektora $\vec{u}$

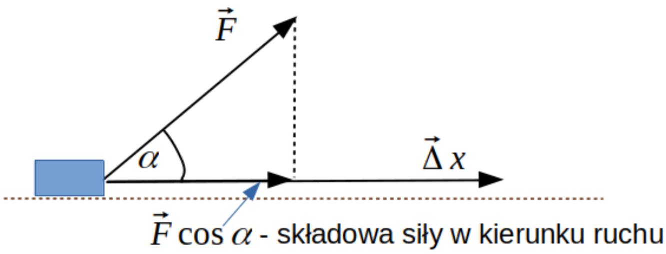


Rysunek 5. Iloczyn skalarny równy jest długości wektora $\vec{u}$ razy długość rzutu wektora $\vec{v}$ na kierunek wektora $\vec{u}$

Przykład - praca

Praca W wykonana przez siłę F przy przesuwaniu ciała na odcinku $\vec{\Delta x}$ równa jest iloczynowi skalarnemu siły razy przesunięcie (rysunek 6):

$$W = \vec{F} \circ \vec{\Delta x} = |\vec{F}| \cos \alpha |\vec{\Delta x}| \tag{3}$$



Rysunek 6. Praca jako iloczyn skalarny. Praca równa jest iloczynowi składowej siły w kierunku ruchu razy przesunięcie. Wektor $\vec{F} \cos \alpha$ ma długość $|\vec{F} \cos \alpha| = |\vec{F}| \cos \alpha$

Uwaga: we wzorze (3) występuje długość rzutu wektora siły $\vec{F}$ na kierunek ruchu $\vec{\Delta x}$, na rysunku 6 zaznaczony jest wektor $\vec{F} \cos \alpha$.

własności iloczynu skalarnego Dla dowolnych wektorów (rzeczywistych) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ i liczby rzeczywistej α zachodzą własności:

1. $(\vec{v} + \vec{u}) \circ \vec{w} = \vec{v} \circ \vec{w} + \vec{u} \circ \vec{w}$

2. $(\alpha\vec{v}) \circ \vec{u} = \alpha(\vec{v} \circ \vec{u})$

3. $\vec{v} \circ \vec{u} = \vec{u} \circ \vec{v}$

Własności te oznaczają, że mnożenie wektorów $\circ$ jest liniowe.

UWAGA

Funkcja $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jest liniowa jeśli $f(x + y) = f(x) + f(y)$ oraz $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Podobnie jest dla funkcji zdefiniowanej na przestrzeni wektorów. Funkcja na wektorach $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbf{R}$ jest liniowa jeśli $f(\vec{v} + \vec{u}) = f(\vec{v}) + f(\vec{u})$ oraz $f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$ dla $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}$ i $\alpha \ \in \mathbf{R}$, gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią wszystkich wektorów.

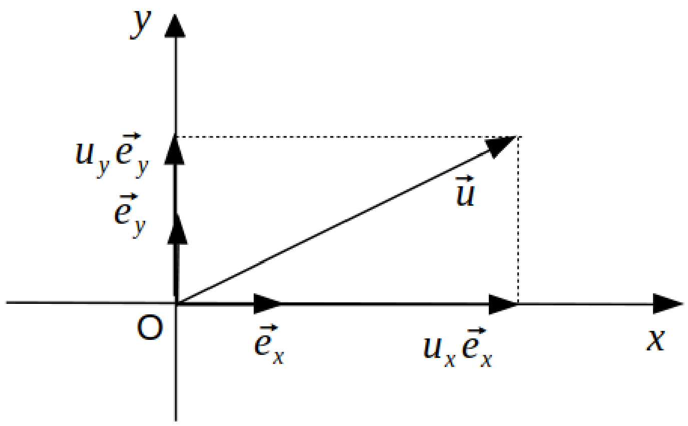
1.6 Wektor w układzie współrzędnych - wersory osi

zapis wektora w układzie współrzędnych w postaci:

$$\overrightarrow{u} = [u_x, u_y] \tag{4}$$

zawiera założenie, że współrzędne u_x, u_y zapisane są w jakimś układzie współrzędnych.

Układ współrzędnych jest zdefiniowany przez punkt odniesienia i wersory osi. Wersowy osi sa to wektory jednostkowe wyznaczające kierunki tych osi. W przypadku układu kartezjańskiego OXY są to dwa wektory jednostkowe e_x i e_y (rysunek 7)



Rysunek 7. Wektory w układzie współrzędnych, zaznaczone wersory osi $\vec{e}_x$ i $\vec{e}_y$

Wektor w układzie współrzędnych (OXY) należy zapisać jako sumę składowych $u_x\vec{e}_x$ i $u_y\vec{e}_y$:

$$\vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y \tag{5}$$

Zapis $[u_x, u_y]$ jest skrótem myślowym ponieważ nie zawiera informacji o układzie współrzędnych. Współrzędne wektora u_x i u_y nie są składowymi wektora, bowiem składowymi wektora $\vec{u}$ są wektory $\vec{u}_x = u_x\vec{e}_x$ oraz $\vec{u}_y = u_y\vec{e}_y$. Składowe wektora są wektorami, wektor $\vec{u}$ jest bowiem suma składowych $\vec{v} = \vec{u}_x + \vec{u}_y$. W algebrze wektorów wektor można rozłożyć na dowolne dwa wektory (a nie liczby).

1.7 zadania

Zad 1. Udowodnij, że iloczyn skalarny w układzie współrzędnych ma postać:
$[v_x, v_y] \circ [u_x, u_y] - v_x u_x + v_y u_y$

Skorzystaj z zapisu wektora jak we wzorze (5) oraz z tego, że:
$\vec{e}_x \circ \vec{e}_x = 1$ i $\vec{e}_y \circ \vec{e}_y = 1$ oraz $\vec{e}_x \circ \vec{e}_y = 0$.