1 Termodynamika - równanie stanu gazu doskonałego

Zad 1. Korzystając z równania stanu gazu doskonałego i I zasady termodynamiki, wyprowadzić wzory na ciepło ΔQ, pracę ΔW i przyrost energii wewnętrznej ΔU n moli gazu doskonałego w podstawowych przemianach. Dane są ciepła molowe gazu przy stałej objętości c_v i stałym ciśnieniu c_p.

Odp. (a) przemiana izotermiczna w temperaturze T: $\Delta U = 0$, $\Delta Q = \Delta W = nRT\ln(V_2/V_1)$, gdzie V_1 — objętość początkowa, V_2 — końcowa;

(b) przemiana izobaryczna pod ciśnieniem p: $\Delta Q = (c_p p/R)(V_2 - V_1)$, $\Delta W = p(V_2 - V_1)$, $\Delta U = (c_v p/R)(V_2 - V_1)$;

(c) przemiana izochoryczna w objętości V: $\Delta W = 0$, $\Delta Q = \Delta U = (c_v V/R)(p_2 - p_1)$, gdzie p_1 — ciśnienie początkowe, p_2 — końcowe.

(d) przemiana adiabatyczna z wykładnikiem κ: $\Delta Q = 0$,

$$\Delta W = -\Delta U = -\frac{p_1 V_1}{\kappa - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right]$$

Zad 2. Znaleźć molowe ciepło właściwe c dla gazu doskonałego, rozszerzającego się zgodnie z prawem

(a) $p^2V = const$ (b) $pV^2 = const.$

Wsk. Skorzystać z I zasady termodynamiki i równania stanu gazu doskonałego dla 1 mola $dQ = c_V dT + pdV$, $pV = RT$ w celu wyznaczenia ciepła molowego przemiany $c = \frac{dQ}{dT} = c_V + p\frac{dV}{dT}$

Odp. (a) $c = c_V + 2R$, (b) $c = c_V - R$

Zad 3. Znaleźć równanie przemiany gazu doskonałego, jeżeli wiadomo że ciepło właściwe w tej przemianie jest liniową funkcją temperatury gazu, $c = aT + b$, $a, b = const.$

Wsk. Skorzystać z I zasady termodynamiki w postaci $dQ = cdT = (aT + b)\,dT = c_V dT + pdV$

Odp.$VT^{\frac{R}{b-c_V}} e^{\frac{aT}{R}} = const$

Zad 4. Znaleźć wzory na przyrost entropii gazu doskonałego w podstawowych przemianach (oznaczenia jak w zad.1).

Odp. (a) przemiana izotermiczna: $\Delta S = nR\ln(V_2/V_1)$;

(b) przemiana izobaryczna: $\Delta S = c_p n\ln(T_2/T_1)$;

(c) przemiana izochoryczna: $\Delta S = c_v n\ln(T_2/T_1)$;

(d) przemiana adiabatyczna: $\Delta S = 0$.

Zad 5. Obliczyć przyrost entropii dwutlenku węgla o masie $m = 1$kg podczas przemiany prowadzącej od ciśnienia $p_1 = 2 \cdot 10^5$Pa i temperatury $T_1 = 313$K do ciśnienia $p_2 = 45 \cdot 10^5$Pa i temperatury $T_2 = 526$K. Dla dwutlenku węgla $c_v = 654$J/kg K.

Wsk. Entropia jest funkcją stanu i jej zmiana nie zależy od drogi, po jakiej zaszła przemiana.

Odp. $\Delta S = m\left[\left(c_v + \frac{R}{\mu}\right)\ln\frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{\mu}\ln\frac{p_2}{p_1}\right] = -150$J/K, gdzie μ — masa molowa.

Zad 6. O ile wzrośnie całkowita entropia w wyniku zmieszania azotu o masie $m_1 = 3$ kg i dwutlenku węgla o masie $m_2 = 2$ kg? Przed zmieszaniem temperatury i ciśnienia obu gazów były jednakowe.

Wsk. Proces izotermiczny (początkowe temperatury jednakowe). Zmieszanie różnych gazów o jednakowych ciśnieniach polega na rozprężeniu się każdego z nich do objętości $V = V_{10} + V_{20}$, gdzie V_{10} jest początkową objętością pierwszego, a V_{20} — drugiego gazu.

Odp. $\Delta S = R\left(n_1\ln\frac{n_1+n_2}{n_1} + n_2\ln\frac{n_1+n_2}{n_2}\right)$ gdzie $n_1 = m_1/\mu_1$, $n_2 = m_2/\mu_2$ — ilości moli.

Zad 7. Naczynie cylindryczne podzielone jest wewnątrz tłokiem na dwa obszary. W każdym z nich znajduje się 1 mol gazu doskonałego o parametrach p, V. Masa tłoka wynosi m, a powierzchnia A. W pewnym momencie naczynie zaczęło się poruszać ze stałym przyśpieszeniem a w kierunku prostopadłym do płaszczyzny tłoka. Wiedząc, że tłok w naczyniu może poruszać się bez tarcia, a temperatura gazu nie uległa zmianie, znaleźć przesunięcie tłoka x oraz zmianę entropii w tym procesie.

Odp. $x = \frac{V\sqrt{p^2A^2 + m^2a^2} - pAV}{maA}$, $\Delta S = R\ln\frac{V^2 - A^2x^2}{V^2}$.

Zad 8. Ciepło właściwe ciał stałych w niskich temperaturach zmienia się zgodnie z prawem $c = aT^3$, $a = const.$ Znaleźć entropię ciała stałego w takich warunkach.

Odp. $S = C/3$

Zad 9. Znaleźć sprawność cyklu Diesla, przedstawionego na rysunku. Proces BC jest izobaryczny, DA – izochoryczny, procesy AB i CD – adiabatyczne.

Ciałem roboczym jest gaz doskonały, znane są wartości V_A, V_B, V_C, c_V, $c_p = c_V + R$.

Odp.

$$\eta = 1 - \frac{c_V}{c_p}\left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\frac{R}{c_V}} \frac{1-\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\frac{R+c_V}{c_V}}}{1-\frac{V_B}{V_C}} \tag{1}$$

Statystyczny opis gazu doskonałego

Zad 10. Znaleźć średnią wartość modułu x-owej składowej prędkości cząsteczek gazu, znajdującego się w warunkach równowagi w temperaturze T. Masa cząsteczki gazu m.

Odp.

$$<|v_x|>= \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \tag{2}$$

Zad 11. Emisja termoelektronowa polega na wysyłaniu elektronów przez ogrzane metale. Elektron może opuścić metal, gdy jego energia kinetyczna, odpowiadająca składowej wektora prędkości prostopadłej (normalnej) do powierzchni metalu jest większa od pracy wyjścia W_0. Opierając się na klasycznym rozkładzie Maxwella, wyprowadzić wzór na gęstość prądu elektronów emitowanych z metalu w zależności od temperatury.

Wsk. Gęstość prądu $j = ez$, gdzie e jest ładunkiem elektronu, a z – średnią liczbą elektronów emitowanych przez jednostkę powierzchni metalu w jednostce czasu. Emitowane są tylko te elektrony, które zderzają się z powierzchnią i mają prędkość w kierunku normalnym do powierzchni $v > v_{min} = \sqrt{2W_0/m}$ (czyli energię kinetyczną większą od pracy wyjścia).

Odp.

$$j = \frac{1}{4}en_0\bar{v}e^{-W_0/kT} = en_0\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}e^{-W_0/kT} \tag{3}$$

gdzie n_0 jest koncentracją elektronów (ilością elektronów na jednostkę objętości) w metalu, a $\bar{v}$ jest średnią wartością ich prędkości.

Zad 12. Tarcza kołowa o promieniu R wiruje z prędkością kątową ω w naczyniu zawierającym gaz o tak niskim ciśnieniu, że długość drogi swobodnej jest dużo większa od R. Obliczyć moment hamujący, wywierany przez uderzające o tarczę cząsteczki gazu, przy założeniu, że uderzająca cząsteczka jest na moment chwytana, a potem wyparowuje w kierunku przypadkowym.

Wsk. Por. rysunek. Liczba zderzeń cząsteczek z elementem powierzchni tarczy $dS = rdrd\phi$ w czasie dt wynosi $dN = 2 \cdot \frac{1}{4}n_0\bar{v}rdrd\phi$, gdzie n_0 jest koncentracją cząsteczek gazu, $\bar{v}$ – ich średnią prędkością, a czynnik 2 we wzorze pochodzi stąd, że cząsteczki uderzają z obu stron tarczy. Po zderzeniu cząsteczki te uzyskują momentalnie pęd $dP = m\omega rdN$ i odpowiedni moment pędu $dL = rdP$. Moment hamujący, zgodnie z II zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego wynosi $M = dK/dt$, gdzie dK jest całkowitym momentem pędu, uzyskiwanym w czasie dt przez wszystkie cząstki, uderzające w całą powierzchnię tarczy.

Odp.

$$M = \frac{1}{4}\pi m n_0 \omega \bar{v} R^4 \tag{4}$$

Cykle gazowe

Zad 13. Jaką pracę musi wykonać sprężarka w idealnej chłodziarce, wykorzystującej odwrotny cykl Carnota (rys.1), aby z zamrażalnika o temperaturze $T_2 = -10°\mathrm{C}$ pobrać $Q_2 = 100\mathrm{kJ}$ ciepła?. Temperatura cieczy chłodzącej $T_1 = 10°\mathrm{C}$. **Odp.** $W = Q_2\left(T_1 - T_2\right)/T_2$.

Zad 14. Znaleźć sprawność cyklu Otta, przedstawionego na rys.2. Procesy CD i EB są izochoryczne, procesy BC i DE — adiabatyczne. Ciałem roboczym jest gaz doskonały, znane są wartości V_D, V_E oraz $\kappa = c_p/c_v$. **Odp.** $\eta = 1 - \left(V_D/V_E\right)^{\kappa-1}$.

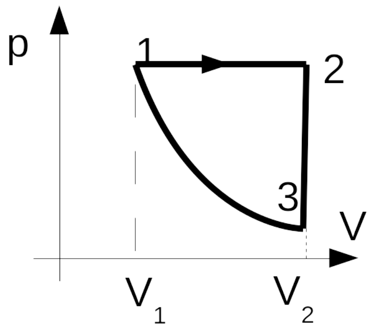
Zad 15. Znaleźć sprawność cyklu Diesla, przedstawionego na rys.3. Proces BC jest izobaryczny, DA – izochoryczny, procesy AB i CD – adiabatyczne. Ciałem roboczym jest gaz doskonały, znane są wartości V_A, V_B, V_C, c_V, $c_p = c_V + R$.

Odp. $\eta = 1 - \frac{c_V}{c_p}\left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\frac{R}{c_V}} \frac{1-\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\frac{R+c_V}{c_V}}}{1-\frac{V_B}{V_C}}$

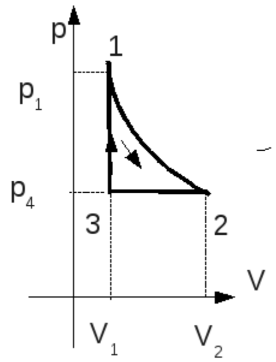
Zad 16. Znaleźć sprawność cyklów, przedstawionych na rys.4. Przyjąć jako dane wielkości zaznaczone na rys.

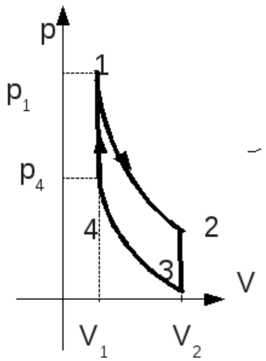
Statystyczny opis gazu doskonałego

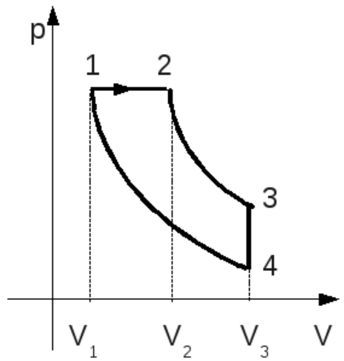
Zad 17. W naczyniu znajduje się gaz doskonały o temperaturze T i koncentracji cząsteczek n. Znaleźć średnią liczbę zderzeń cząsteczek z jednostkową

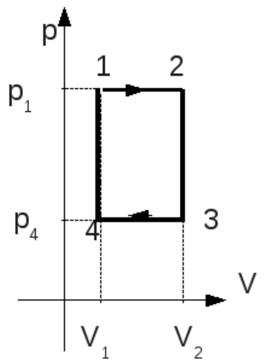


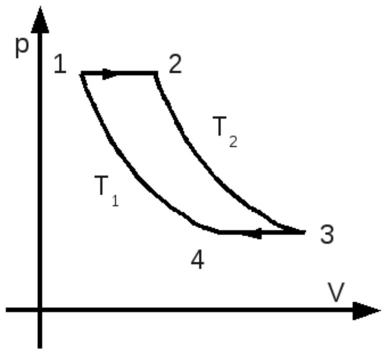
izobara-izochora-izoterma











powierzchnią ścianki naczynia w jednostce czasu. **Odp.** $z = n\bar{v}/4$, gdzie $\bar{v} = \sqrt{8kT/\pi m}$ — średnia prędkość cząsteczek.

Zad 18. W ściance naczynia Dewara (po ludzku: termosu) powstała maleńka szczelinka o przekroju S. Początkowo w naczyniu panuje próżnia. Po jakim czasie ciśnienie p między ściankami będzie równe połowie ciśnienia atmosferycznego p_0?. Temperatura powietrza wynosi T, a przekrój S jest na tyle mały, że w każdej chwili ciśnienie między ściankami jest dobrze określone.

Wsk. Posłużyć się wzorem na średnią ilość zderzeń cząsteczek ze ściankami naczynia (zad.5) w zależności od koncentracji n, aby określić ilość cząsteczek wpadających i opuszczających naczynie w czasie dt, a stąd zmianę ilości cząsteczek w naczyniu dN w czasie dt. Zmianę koncentracji $dn = dN/V$ można powiązać ze zmianą ciśnienia dp przez obustronne zróżniczkowanie równania stanu gazu doskonałego $p = nRT$, $n = N/V$. **Odp.** $t_s = (4V/\bar{v}S)\ln 2$

Zad 19. Znaleźć średnią wartość modułu x-owej składowej prędkości cząsteczek gazu, znajdującego się w warunkach równowagi w temperaturze T. Masa cząsteczki gazu m. **Odp.** $<|v_x|>= \sqrt{2kT/\pi m}$

Zad 20. Emisja termoelektronowa polega na wysyłaniu elektronów przez ogrzane metale. Elektron może opuścić metal, gdy jego energia kinetyczna, odpowiadająca składowej wektora prędkości prostopadłej (normalnej) do powierzchni metalu jest większa od pracy wyjścia W_0. Opierając się na klasycznym rozkładzie Maxwella, wyprowadzić wzór na gęstość prądu elektronów emitowanych z metalu w zależności od temperatury.

Wsk. Gęstość prądu $j = ez$, gdzie e jest ładunkiem elektronu, a z – średnią liczbą elektronów emitowanych przez jednostkę powierzchni metalu w jednostce czasu. Emitowane są tylko te elektrony, które zderzają się z powierzchnią i mają prędkość w kierunku normalnym do powierzchni $v > v_{min} = \sqrt{2W_0/m}$ (czyli energię kinetyczną większą od pracy wyjścia).

Odp. $j = 0.25en_0\bar{v}\exp(-W_0/kT) = en_0\sqrt{kT/2\pi m}\exp(-W_0/kT)$, gdzie n_0 jest koncentracją elektronów, a $\bar{v}$ jest średnią wartością ich prędkości.

Zad 21. Tarcza kołowa o promieniu R wiruje z prędkością kątową ω w naczyniu zawierającym gaz o tak niskim ciśnieniu, że długość drogi swobodnej jest dużo większa od R. Obliczyć moment hamujący, wywierany przez uderzające o tarczę cząsteczki gazu, przy założeniu, że uderzająca cząsteczka jest na moment chwytana, a potem wyparowuje w kierunku przypadkowym.

Wsk. Por. rysunek. Liczba zderzeń cząsteczek z elementem powierzchni tarczy $dS = rdrd\phi$ w czasie dt wynosi $dN = 2 \cdot \frac{1}{4} n_0 \bar{v} r dr d\phi$, gdzie n_0 jest koncentracją cząsteczek gazu, $\bar{v}$ – ich średnią prędkością, a czynnik 2 we wzorze pochodzi stąd, że cząsteczki uderzają z obu stron tarczy. Po zderzeniu cząsteczki te uzyskują momentalnie pęd $dP = m\omega r dN$ i odpowiedni moment pędu $dL = rdP$. Moment hamujący, zgodnie z II zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego wynosi $M = dK/dt$, gdzie dK jest całkowitym momentem pędu, uzyskiwanym w czasie dt przez wszystkie cząstki, uderzające w całą powierzchnię tarczy. **Odp.** $M = 0.25\pi m n_0 \omega \bar{v} R^4$