Analiza danych doświadczalnych - zadania

Michał K. Urbański

1 Zadania

Zad 1. Obiekty rzeczywistości opisujemy podając cechy tych obiektów. Rozważmy przykład szuflady ze skarpetkami, wtedy Zbiór zdarzeń opisany warunkiem Γ opisujemy wzorem:

$$A_\Gamma = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in \Gamma\} \tag{1}$$

Zapisz warunek Γ i zbiór Ω dla zbioru czerwonych skarpetek w szafie.

Zad 2. Uogólnij opis przedmiotów przedstawiony w zadaniu 1 wykonując własny opis przedmiotów użytku domowego w języku fizyki i matematyki. Należy to zrobić tak użyć jedynie definicje pojęć podstawowych (definicje pojęć podstawowych należy znaleźć w literaturze).

Zad 3. Kość dwunastościenna ma boki opisane kolejnymi literami od A do L. Prawdopodobieństwa wyrzutu ściany od A do G wynosi $\frac{1}{10}$ a dla pozostałych liter $\frac{6}{100}$. Zmienna losowa X przybiera dwie wartości 0 lub 1 i zadana jest regułą:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \omega \quad \text{jest samogłoską} \\ 1 & \text{jeżeli } \omega \quad \text{jest spółgłoską} \end{cases} \tag{2}$$

Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, czyli wyznacz: $P(X = 0)$ oraz $P(X = 1)$.

Zad 4. Kość sześcienna ma boki opisane kropkami, bok z n kropkami oznaczymy B_k. Założymy, że prawdopodobieństwa pojawienie się w wyniku rzutu n kropek wynosi dla każdego n tyle samo. Gra polega na wykonaniu ruchów pionkiem na na planszy, przy czym pionek porusza się po ścieżce bez rozgałęzień. Założymy, że liczba kroków k zadana jest tabelką:

bok	liczba kroków
B_1	0
B_2	0
B_3	0
B_4	2
B_5	3
B_6	3

(3)

Wyznacz rozkład tak zdefiniowanej zmiennej losowej, czyli wyznacz prawdopodobieństwa $P(\text{liczba kroków}) = k$ dla $k = 1, 2, 3$.

Zad 5. Rozważmy rzut dwoma kostkami sześciennymi symetrycznymi. Stany jednej kostki zapisujemy jako A_k, gdzie A_k oznacza, że po rzucie kostką widać k oczek ($k = 1, \ldots, 6$). Zmienna losową X zdefiniowaną na zbiorze stanów elementarnych rzutu dwoma kostkami definiujemy jako:

$$X(\omega) = X(A_k, A_n) = k + n \tag{4}$$

czyli wartościami zmiennej losowej są sumy oczek dwóch kości. Opisz zbiór zdarzeń elementarnych wzorem Zakładając, że kostka jest idealna (czy prawdopodobieństwa wyrzucenie dowolnego oczka są jednakowe) wyznacz rozkład zmiennej losowej X, zapisz zmienną losową oraz jej rozkład w postaci tabelek.

Zad 6. Udowodnij, że $E(X - E(X)) = 0$.

Zad 7. Udowodnij, że jeżeli zmienne losowe X i Y są niezależne to

$$Cov(X, Y) = E\left((X - E(X))\,(Y - E(Y))\right) = 0 \tag{5}$$

Zad 8. Udowodnij, że jeżeli zmienne losowe X_n opisujące próby losowe mają jednakowa wartość oczekiwaną $E(X_n) = a$ to:

$$E\left(\sum_{n=1}^{N} X_n\right) = Na.$$

Zad 9. Udowodnij, że jeżeli zmienne losowe X_n opisujące próby losowe mają jednakowe rozkłady prawdopodobieństwa i są nieskorelowane to:

$$\sigma^2\left(\sum_{n=1}^{N} X_n\right) = N\sigma(X).$$

Zad 10. Zmienna losowa opisana jest rozkładem danym w tabelce. **Wyznacz**: Wartość oczekiwaną $E(X)$, odchylenie standardowe $\sigma(X)$, wartość oczekiwaną kwadratu zmiennej losowej $E(X^2)$.

i	x_i	p_i
1	1	0.5
2	2	0.25
3	4	0.25

Zad 11. Zmienna losowa opisana jest rozkładem danym w tabelce.
Wyznacz: Wartość oczekiwaną $E(X)$, odchylenie standardowe $\sigma(X)$, wariancję $V(X)$, wartość oczekiwaną kwadratu zmiennej losowej $E(X^2)$, oraz sześcianu $E(X^3)$.

i	x_i	p_i
1	-2	1/2
2	2	1/4
3	4	1/8
4	8	1/8

Zad 12. Wylicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe dla rozkładu równomiernego opisanego na przedziale $[a, b]$. Zapisz wzorem rozkład prawdopodobieństwa i wykonaj unormowanie.

Zad 13. Zmienna losowa ma rozkład trójkątny w przedziale $[a, b]$, przy czym maksimum rozkładu jest dla $c \in [a, b]$. Wyznacz:
a) funkcję rozkładu prawdopodobieństwa z warunku "unormowania",
b) wartość oczekiwaną,
c) odchylenie standardowe,
d) medianę.

Zad 14. Zmienna losowa ma rozkład jednostajny w przedziale $[-a, b]$ (gdzie: $a > 0, b > 0$). Wyznacz wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe.

Zad 15. W grze w karty każdy gracz dostaje 5 kart z talii 52 kart. Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych opisujących jednego gracza, oraz warunek opisujący zdarzenie polegające na tym, że dostaniemy dwie pary kart (np dwie piątki i dwa króle). Zapisz warunek równaniami.

Zad 16. Gra polega na rzucie monetą i przemieszczaniu pionka na linijce. Założono, że po wyrzuceniu orła pionek posuwa się o dwa centymetry do przodu ($X(O) = 2cm$) a przy wyrzuceniu reszki cofa się o jeden centymetr ($X(R) = -1cm$). Wyznacz wartość oczekiwaną przemieszczenia zakładając idealną monetę.

Zad 17. Wykonać eksperyment z rejestracją wielokrotną zjawiska losowego, np.: rzut kością (np. suma oczek dwóch kości), generator liczb losowych, stan giełdy, rzut do tarczy, szumy termiczne itp. Dla otrzymanych danych:

1. wyznacz i narysuj histogram oraz dystrybuantę empiryczną (wykres częstości skumulowanej).

2. obliczyć wartość średnią, estymator odchylenia standardowego, trzeci moment centralny, współczynnik asymetrii,

3. zweryfikować hipotezę o tym, że empiryczny rozkład jest:

   a) równomierny,

   b) normalny,

   c) trójkątny.

   d) Weibulla.

Zad 18. Omów metodę najmniejszych kwadratów. Wyprowadź wzór dla przypadku wyznaczenia nachylenia a funkcji liniowej $y = ax$, gdy wszystkie pomiary $\{x_i, y_i\}$ wykonane zostały z taką sama niepewnością. udowodnij, że $a = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}$.

Zad 19. Rzuć 100 razy 10 kośćmi. Wyznacz z każdego rzutu 10 kośćmi średnią, medianę oraz środek. Dla uzyskanych 100 wartości średniej, 100 median i 100 środkowych narysuj odpowiednie histogramy. Wyznacz odchylenia standardowe tych wielkości i oceń który estymator jest najlepszy. Środek n liczb zdefiniowany jest: $x_0 = \frac{1}{2}(x_{max} + x_{min})$, x_{max} i x_{min} są maksymalną i minimalną wartością z n liczb.

Zad 20. Wynik pomiaru napięcia za pomocą woltomierza analogowego klasy 1% o zakresie pomiarowym $U_{zakr} = 15V$, i maksymalnej liczbie działek $\alpha_{max} =$ 75działek, wyniósł $\alpha_U = 62,5$dz. Oblicz wartość zmierzonego napięcia oraz niepewność standardową i rozszerzoną pomiaru (bezwzględną i względną).

Zad 21. W wyniku pomiaru natężenia prądu multimetrem analogowym uzyskano następujące wyniki (w mA):

2,0 2,2 1,8 2,1 1,9 2,2 1,8 2,3 1,7 2,4 1,6

wyznacz:

a) wartość średnią,
b) estymator odchylenia standardowego,
c) estymator odchylenia standardowego wartości średniej,
d) niepewność standardową z złożoną.

Multimetr jest klasy 5%, pomiar wykonywany był na zakresie $I_z = 5mA$.

Zad 22. Pokój zmierzono miarką z podziałką centymetrową i uzyskano wyniki: $x = (5.51 \pm 0.01)m$ i $y = (4.02 \pm 0.01)m$.
Ponadto stwierdzono, ze ściana jest nierówna i oszacowano nierównomierność na 100mm. Oszacuj niepewności pomiaru długości boków i wyznacz niepewność pola powierzchni.

Zad 23. W celu pomiaru objętości kuli wykonano 11 pomiarów obwodu sznurkiem nawiniętym stycznie do wielkiego koła tej kuli i uzyskano (w mm):

40 44 36 42 38 44 36 46 34 48 32

zakładając, że pomiar wykonano miarką z podziałka milimetrową i sznurek ma grubość 1mm, wyznacz objętość i niepewność objętości.

Zad 24. W celu wyznaczenia rezystancji wykonano pomiary napięcia U i natężenia prądu I. Natężenie prądu zmierzono amperomierzem cyfrowym o błędzie maksymalnym (największym błędzie dopuszczalnym) względnym 1% i rozdzielczości dwóch ostatnich cyfr, a napięcie woltomierzem analogowym klasy 5%. Wyniki pomiarów przedstawione są w tabelce:

$I(mA)$	$I - zakr(mA)$	$U(V)$	$U - zakr(V)$
$2,00$	3	$1,00$	3
$5,00$	10	$2,0$	3
$8,00$	10	$4,00$	10
$13,0$	30	$6,0$	10
$17,0$	30	$9,0$	10
$20,0$	30	11	30
$31,0$	100	15	30
$40,0$	100	20	30

Wyznacz metodą najmniejszych współczynnik nachylenia prostej na płaszczyźnie (U, I) i na tej podstawie opór elektryczny korzystając ze wzoru otrzymanego w zadaniu 2. Narysuj wyniki pomiarowe na wykresie zależności $U = f(I)$, zaznacz słupki błędów, narysuj prostą (na oko) najlepiej pasującą do danych oraz określa na rysunku błąd (graniczny) wyznaczenia rezystancji. Która składowa błędu jest większa systematyczna (instrumentalna) czy przypadkowa? Oblicz błąd wynikający z rezystancji wewnętrznej woltomierza ($R_v = 10k\Omega/V$).

Zad 25. W celu wyznaczenia pola powierzchni pokoju wykonano pomiary długości ścian miarką o z podziałką milimetrową. Dokładność z jaka udało się przyłożyć miarkę do ściany wynosi 4mm. Natomiast ustalono, że ściany są nierówne i ta nierówność wynosi ok 1cm. Wyznacz pole powierzchni i niepewność pola powierzchni jeśli zmierzone długości ścian wynoszą: $5,21$m i $4,03$m. Wylicz składowe niepewności granicznej wynikającą z błędów pomiaru długości poszczególnych ścian. Niepewność całkowitą wyznacz zakładając, że składowe błędów są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Zad 26. W celu wyznaczenia wysokości budynku zmierzono długość cienia h_1 pręta (o wysokości $h_0 = 1m$) i długość cienia budynku h_2. Długość cienia pręta wyniosła $h_1 = 1m$, przy czym rozmycie cienia wyniosło $\Delta h_1 = 1cm$, natomiast długość cienia budynku wynosi $h_2 = 10m$, a rozmycie tego cienia $\Delta h_2 = 10cm$, pomiary cienia pręta i długości pręta wykonano miarką z podziałka $1mm$, natomiast długość cienia budynku taśmą mierniczą z podziałką $1cm$. Wyznacz wysokość budynku i niepewność (wyliczenie wysokości bez niepewności nie zalicza). Niepewność całkowitą wyznacz zakładając, że rozmycie cienia można potraktować jako błąd graniczny i składowe błędów są niezależnymi zmiennymi losowymi (czyli sumowanie jest zgodnie z pierwiastkiem kwadratów).

Zad 27. Termometr rezystancyjny składa się z opornika, którego opór zależy od temperatury, źródła prądowego oraz woltomierza, którego wskazania wyskalowane są w ^{0}C na podstawie wzoru: $R(t) = R_0(1 + \alpha_0(t - t_0))$, gdzie α_0 jest współczynnikiem temperaturowym odnoszącym się temperatury t_0. Wypisz źródła błędów, korzystając z ogólnego schematu pomiaru i wynikającej z niego klasyfikacji źródeł błędów. Napisz równanie pomiaru czyli równanie opisujące zależność mierzonej temperatury od napięcia i natężenia prądu. Rezystancja termometru dla t=20.00^{0}C (0,01^{0}C) wynosi $(100,000 \pm 0,001)$, współczynnik temperaturowy platyny (odniesiona do 20^{0}C) $\alpha_{20} = (0,0040 \pm 0,0001)$ 1/K (0,0001 jest błędem granicznym). W wyniku pomiaru napięcia uzyskano u=1,010V, a natężenie prądu wynosiło I=10,00mA. Napięcie i natężenie zmierzono przyrządem cyfrowym wyświetlającym cztery cyfry, na zakresach odpowiednio 2V i 20mA. Klasa obu przyrządów wynosi 0,2% (błąd przyrządu cyfrowego ma dwie składowe: błąd kwantowania i błąd systematyczny wynikający z klasy przyrządu). Wyznacz temperaturę i jej niepewność.

Zad 28. W celu wyznaczenia przyśpieszenia grawitacyjnego g wykonano pomiar okresu drgań wahadła matematycznego. Wylicz g (i jego niepewność) jeśli czas 10 wahnięć zmierzony stoperem wynosi $T_{10} = 20,2s$, długość wahadła $L = 1,03cm$. Błąd graniczny stopera wynosi 0,1s, długość mierzono miarką z podziałką 1mm. Oblicz niepewność uwzględniając refleks (ok. 0,2s). Błąd pomiaru długości spowodowany niedokładną lokalizacją środka zawieszonego ciała, jak i osi obrotu. Ciało miało ok. 2cm promienia i środek można określi z dokładnością 5mm. Do zawieszenia ciała użyto przewodu w igelicie o średnicy 0,7mm. Błąd określenia punktu zaczepienia szacujemy na maksimum 2mm. Przyśpieszenie grawitacyjne wylicz z przybliżonego wzoru $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$, oszacuj błąd g spowodowany użyciem tego wzoru jeśli kąt wahnięć wahadła wynosi 20°.