Rozwiązanie i uwagi do kol. z dn. 28-11-2013

Zadanie 1. Załóż, że zbiór zdarzeń elementarnych składa się z N elementów: $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$. Prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych oznaczymy $p_j = P(a_j)$.
Wartości zmiennej losowej wynoszą $X(a_j) = y_j$, dla $j = 1, \ldots, N$.

Podaj definicje (wzory dla rozkładu dyskretnego)

a) wartości oczekiwanej

b) odchylenia standardowego.

Wyjaśnij użyte symbole. Podaj przykład, w którym wykorzystujemy monetę do gry.

Rozwiązanie

Wartość oczekiwana zmiennej losowej dyskretnej:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{N} p_j y_j, \tag{1}$$

wartości zmiennej losowej $X(a_i)$ oznaczone są w zadania jako y_i, i nie powinno się użyć innych oznaczeń, chyba że wprowadzono w rozwiązaniu własne oznaczenia, co powinno być opisane.

Odchylenie standardowe zmiennej losowej X z definicji: $\sigma(X) = \sqrt{E\left(X - E(X)\right)^2}$. We wzorze tym mamy wartość oczekiwaną wielkości $\left(X - E(X)\right)^2$. Jeśli wykorzystamy wzór u na wartość oczekiwaną (1) (dla zmiennej losowej dyskretnej) otrzymamy:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} p_j \left(y_j - E(X)\right)^2}. \tag{2}$$

Odchylenie standardowe jest miarą rozrzutu danych pomiarowych.

Przykład: moneta ma dwa stany ($N = 2$) orzeł „O” i reszka „R” , zgodnie z oznaczeniami zadania zapiszemy je jako $a_1 = O$ i $a_2 = R$. Przyjmiemy, że prawdopodobieństwa są różne: $p(a_1) = p(O) = p_1$ i $p(a_2) = p(R) = p_2$, dla celów wykonania obliczeń założymy, że $p_1 = 0,25$ i $p_2 = 1-0,25 = 0,75$. Przyjmie my, że gra polega na tym, że za orła dostajemy 8zł (czyli $X(a_1) = X(O) = 8$zł) z za reszkę płacimy 4zł, czyli czyli $X(a_2) = X(R) = -4$zł. Wartość oczekiwana wynosi: $E(X) = p_1 X(O) + p_2 X(R) = 0,25 \cdot 8\text{zł} - 0,75 \cdot 4\text{zł} = -1\text{zł}$ (gra nie opłaca się). Odchylenie standardowe $\sigma(X) = \sqrt{0,25(8-(-1))^2 + 0,75(-4-(-1))^2} = \sqrt{27} \approx 5,2$ (jednostką też są złote).

Zadanie 2. Omów metodę najmniejszych kwadratów. Wyprowadź wzór dla przypadku wyznaczenia nachylenia a funkcji liniowej $y = ax$, gdy wszystkie pomiary $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{N}$ wykonane zostały z taką sama niepewnością. Udowodnij, że współczynnik nachylenia wynosi $a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$. Wypisz wszystkie założenia.

Rozwiązanie

Metodą najmniejszych kwadratów stosuje się w celu najlepszego dopasowania funkcji do danych doświadczalnych. Dopasowanie funkcji polega na wyborze jednej z funkcji ze zbioru funkcji nazywanej rodziną funkcji. Rodzina funkcji opisana jest wzorem z parametrem, którego wartość należy wyznaczyć.

Funkcja o postaci $y = ax$ jest jedno-parametryczną rodziną funkcji liniowych. w celu wyznaczenia parametru a należy poszukać minimum funkcji:

$$I(a) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - a x_i\right)^2 \tag{3}$$

gdzie y_i i x_i są danymi pomiarowymi, dla których spodziewamy się zależności $y = a\ x$. Warunek minimum ma postać: $\frac{dI(a)}{da} = 0$, obliczamy pochodną:

$$\frac{d}{da} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - a x_i\right)^2 = 2 \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - a x_i\right)(-x_i) = -2 \sum_{i=1}^{N} y_i x_i + 2 \sum_{i=1}^{N} a x_i^2 = 0 \tag{4}$$

Po przekształceniach otrzymujemy $a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$.

Zadanie 3. Zmienna losowa opisana jest rozkładem danym w tabelce.
Wyznacz: Wartość oczekiwaną $E(X)$, odchylenie standardowe $\sigma(X)$, wartość oczekiwaną kwadratu zmiennej losowej $E(X^2)$.

i	x_i	p_i
1	1	1/2
2	2	1/4
3	4	1/4

Rozwiązanie

W zadaniu dana jest zmienna losowa i jej rozkład. Należy wyliczyć wartość oczekiwaną (oznaczymy ją m) ze wzoru: $m = E(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i$ oraz odchylenie standardowe (wygodniej wyliczyć $\sigma^2(X)$ w tabeli) ze wzoru:

$$\sigma^2(X) = \sum_{j=1}^{N} p_j \left(x_j - E(X)\right)^2 \tag{5}$$

i	x_i	p_i	$p_i x_i$	$x_i - m$	$p_i(x_i - m)^2$	x_i^2	$p_i x_i^2$
1	1	$0,5$	$0,5$	-1	$0,5$	1	$0,5$
2	2	$0,25$	$0,5$	0	0	4	1
3	4	$0,25$	1	2	1	16	4
		$E(X) =$	$\sum p_i x_i = 2$	$\sigma^2(X) =$	$\sum p_i(x_i - m)^2 = 1,5$	$E(X^2) =$	$\sum p_i x_i^2 = 5,5$

Wartość oczekiwana równa jest więc $E(X) = 2$, odchylenie standardowe $\sigma(X) = \sqrt{1,5}$, a $E(X^2) = 5,5$. Można sprawdzić, że zachodzi wzór: $E(X^2) = \sigma^2(X) + (E(X))^2 = 1,5 + 2^2 = 5,5$

Typowe błędy

Nie można wyliczać średniej z trzech liczb $1, 2, 4$ bowiem te liczby nie są próba losową (czyli wynikiem eksperymentu) ale są wartościami zmiennej losowej dla zdarzeń elementarnych.

Częstym błędem jest użycie wzoru na odchylenie standardowe z wartością średnią, np:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 p_i} \tag{6}$$

Wzór ten jest błędny! Przypomina on równanie (5) ale zamiast wartości oczekiwanej $E(X)$ jest średnia $\bar{x}$, co jest niepoprawne. Podobnie we wzorze na wartość oczekiwana nie może być czynnika $\frac{1}{N}$.

Wzór: $E(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} p_i x_i$ jest błędny.

Zadanie 4. W wyniku pomiaru natężenia prądu miernikiem analogowym klasy 5% na zakresie $5mA$ uzyskano następujące wyniki (w mA):

4	4,8	3,2	4,6	3,4	4,0	4,0	3,4	4,8	3,2	4,6

Wyznacz:

a) wartość średnią

b) estymator odchylenia standardowego (odchylenie standardowe próby),

c) estymator odchylenia standardowego wartości średniej,

d) niepewność rozszerzoną złożoną (całkowitą).

UWAGA przyjmij w przybliżeniu że: $\sqrt{10 \cdot 11} \approx 10$. Podaj wzory z których korzystasz.

Rozwiązanie

Obliczamy średnią: $\bar{x}\frac{1}{N}(4 + 4,8 + 3,2 + 4,6 + 3,4 + 4,0 + 4,0 + 3,4 + 4,8 + 3,2 + 4,6) = 4$, gdzie $N = 11$ oraz x_i wartości zmierzonego natężenia prądu.

Estymator odchylenia standardowego wynosi:

$s(X) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{4}{10}} \approx 0,63$

Estymator odchylenia standardowego wartości średniej $s(\bar{x}) = \frac{s(X)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{4}{10 \cdot 11}} =\approx 0,2$.

Z danych dotyczących miernika wynika błąd graniczy $\Delta I = 5\% 5mA = 0,25mA$.

Niepewność złożona pomiaru natężenia prądu $u(I) = \sqrt{s^2(X) + \frac{1}{3}(\Delta I)^2} = \sqrt{\frac{4}{110} + \frac{1}{3}(0,25)^2} = \sqrt{\frac{4}{110} + \frac{1}{48}} \approx \sqrt{\frac{4}{100} + \frac{2}{100}} = \sqrt{\frac{6}{100}} \approx 0,24$.

Niepewność rozszerzona na poziomie ufności $p = 0,95$ wynosi $U_{0,95}(I) = 2 \cdot u(I) \approx 0,5$

Zadanie 5. W celu wyznaczenia rezystancji wykonano pomiary napięcia i natężenia prądu. Natężenie prądu zmierzono amperomierzem analogowym klasy 2% a napięcie woltomierzem cyfrowym o błędzie względnym 1% i rozdzielczości dwóch ostatnich cyfr (czyli równej dwa razy ostatnia cyfra). Uzyskane wyniki są następujące: natężenie $I = 2,5$mA na zakresie 3mA, oraz $U = 8,00V$ na zakresie 20,00V. Wyznacz rezystancje i jej niepewność. Wylicz składowe niepewności granicznej wynikając z błędów woltomierza i amperomierza. Niepewność całkowitą (złożoną) wyznacz zakładając, że składowe błędów są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Rozwiązanie

Natężenie prądu $I = 2,5$mA, błąd graniczny $\Delta I = 2\% 3mA = 0.06mA$.

Napięcie elektryczne $U = 8,00V$, błąd graniczny $\Delta U = 1\% 8V + 2 \cdot 0,01V = 0,1V$.

Rezystancja $R = \frac{U}{I} = \frac{8V}{2,5mA} = \frac{8 \cdot 4}{10} k\Omega = 3,2k\Omega$. Różniczka zupełna opisuje błędy (czyli błędy prawdziwe których nie znamy):

$$dR = \frac{dR}{dU}dU + \frac{dR}{dI}dI = \frac{1}{I}dU - \frac{U}{I^2}dI \tag{7}$$

Błędy są zmiennymi losowymi, zakładamy, że mają rozkład jednostajny w przedziale o promieniu równym błędowi granicznemu (nazwijmy go Δx), odchylenie standardowe rozkładu jednostajnego wynosi $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta x$. Niepewność standardowa równa jest odchyleniu standardowemu:

$$u(R) = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\frac{\Delta U}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{U}{I^2}\frac{\Delta I}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{0,1V}{2,5mA}\right)^2 + \left(\frac{0,06mA}{2,5^2(mA)^2}\,8V\right)^2} \approx 0,05k\Omega \tag{8}$$

Niepewność standardowa pomiaru rezystancji wynosi 0,05 $k\Omega$.