OPRACOWANIE DANYCH DOŚWIADCZALNYCH

dr hab. inż. Michał K. Urbański, prof. uczelni.

Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej
Zakład V "Badań strukturalnych„
Gnach Elektrotechniki Klatka A, pok. 538 lub 539
Michal.Urbanski@pw.edu.pl,
strona http:
//www.if.pw.edu.pl/ ˜murba/
strona wydziału ⇒ pracownicy ⇒ link do strony przy nazwisku

ZASADY ZALICZANIA:

- 4 kartkówki po 20 min, każda za 5 punktów,
- w przypadku przejścia na tryb zdalny kolokwia zaliczające mogą odbyć się stacjonarnie,
- praca domowa - sprawozdanie z własnych pomiarów za 20 punktów

WARUNKI ZALICZENIA:

1. **zaliczenie kartkówek (od 11 p**
2. **zaliczenie pracy domowej od 11 p**

oceny na podstawie liczby punktów:

- 5.0 – od 91%
- 4.5 – od 81%
- 4.0 – od 71%
- 3.5 – od 61%
- 3.0 – od 51% (od 22p)
- ndst – od 0 do 51%

ŚLUBOWANIE AKADEMICKIE
Ślubuję:

- strzec godności akademickiej i dobrego imienia Politechniki Warszawskiej,
- wytrwale zdobywać wiedzę i umiejętności oraz stale je pogłębiać,
- dociekać prawdy, głosić ją oraz dawać jej świadectwo swoim postępowaniem,
- przestrzegać zasad tolerancji światopoglądowej,
- przyczyniać się do pomnażania dorobku społeczności akademickiej Politechniki Warszawskiej.

realizacja prawdy i tolerancji w pomiarach i analizie danych

Prawda

zgodność zdań orzekających z rzeczywistością

Jak porównać teorię z doświadczeniem?

1. Porównujemy opis doświadczenia z teorią
2. Opis doświadczenia wymaga analizy danych

światopogląd

zbiór lub system przekonań, „ogląd intelektualny"

metoda naukowa

1. eksperyment - metoda pracy doświadczalnej
2. teoria - model matematyczny

Co będzie?

Co będzie?

zbiór recept: **jak analizować dane doświadczalne?**

Co będzie?

zbiór recept: **jak analizować dane doświadczalne?**

Każdy kto ma dobry przyrząd twierdzi, że mierzyć umie, ale ...

Co będzie?

zbiór recept: **jak analizować dane doświadczalne?**

Każdy kto ma dobry przyrząd twierdzi, że mierzyć umie, ale ...

wyznaczać niepewność (błędy)
i interpretować wyniki

Co będzie?

zbiór recept: **jak analizować dane doświadczalne?**

Każdy kto ma dobry przyrząd twierdzi, że mierzyć umie, ale ...

wyznaczać niepewność (błędy)
i interpretować wyniki

jest sztuką

Co jest niezbędne aby zrozumieć analizę danych doświadczalnych?

Co jest niezbędne aby zrozumieć analizę danych doświadczalnych?

- Teoria pomiarów
- Metrologia - technika mierzenia, budowa przyrządów
- Prawa fizyki
- Teoria prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna
- Analiza sygnałów
- Elektronika

Co jest niezbędne aby zrozumieć analizę danych doświadczalnych?

- Teoria pomiarów
- Metrologia - technika mierzenia, budowa przyrządów
- Prawa fizyki
- Teoria prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna
- Analiza sygnałów
- Elektronika

my mamy 10 godzin ćwiczeń (po 10 tygodniach będą konsultacje)

Co jest niezbędne aby zrozumieć analizę danych doświadczalnych?

- Teoria pomiarów
- Metrologia - technika mierzenia, budowa przyrządów
- Prawa fizyki
- Teoria prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna
- Analiza sygnałów
- Elektronika

my mamy 10 godzin ćwiczeń (po 10 tygodniach będą konsultacje)

a kiedyś to był to jedynie wykład wstępny do laboratorium

Co jest niezbędne aby zrozumieć analizę danych doświadczalnych?

- Teoria pomiarów
- Metrologia - technika mierzenia, budowa przyrządów
- Prawa fizyki
- Teoria prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna
- Analiza sygnałów
- Elektronika

my mamy 10 godzin ćwiczeń (po 10 tygodniach będą konsultacje)

a kiedyś to był to jedynie wykład wstępny do laboratorium 45minut.

Co jest niezbędne aby zrozumieć analizę danych doświadczalnych?

- Teoria pomiarów
- Metrologia - technika mierzenia, budowa przyrządów
- Prawa fizyki
- Teoria prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna
- Analiza sygnałów
- Elektronika

my mamy 10 godzin ćwiczeń (po 10 tygodniach będą konsultacje)

a kiedyś to był to jedynie wykład wstępny do laboratorium 45minut.

a ja teraz w $10 \times 45 min$ **mam Was nauczyć statystyki, analizy danych i pisania sprawozdań**

Program studiów

1. Matematyka
2. Fizyka ogólna i działy podstawowe:
   - Mechanika
   - Elektrodynamika
   - Mechanika kwantowa
   - Optyka
   - Fizyka statystyczna i termodynamika
   - Fizyka ciała stałego, półprzewodniki, przewodniki jonowe
   - Fizyka jądra atomowego
3. Analiza danych doświadczalnych
4. Elektronika: od obwodów elektrycznych do mikrokontrolerów.
5. Programowanie

Program przedmiotu ODD

1. Pomiar, organizacja eksperymentu, zbieranie danych.
2. Teoria pomiarów, teoria reprezentacji.
   Reprezentacja przedziałowa, pomiar z błędem systematycznym.
3. Błąd i niepewność pomiaru. Statystyczna analiza niepewności.
4. Podstawy probabilistyki: Zmienna losowa, rozkład prawdopodobieństwa, wartość oczekiwana, wariancja, rozkłady statystyczne, niezależna zamienne losowe, korelacja.
5. Elementy statystyki: próba losowa, histogram, estymatory wartości oczekiwanej i wariancji, średnia z próby losowej, wariancja średniej z próby losowej,
6. Testowanie hipotez statystycznych.
7. Metoda najmniejszych kwadratów,
8. Pisanie sprawozdań z badań (z eksperymentu), raport.

Literatura

1. Guide to the Expresion of Uncertaity in Measurement, ISO/BIMP 1993/2007 http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html
2. Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik, GUM, 1999.
3. M.K. Urbański, Opracowywanie danych doświadczalnych, skrypt na stronie internetowej
4. J.R.Taylor, Wstęp do analizy błędu pomiarowego. PWN 1995.
5. S. Brandt, Analiza danych, PWN 1998.
6. J. Arendarski, Niepewność Pomiarów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2003.
7. E. Mulas, Roman Rumianowski, Rachunek niepewności Pomiaru, Oficyna Wydawnicza PW, 1997.
8. H. Abramowicz, Jak analizować wyniki pomiarów, PWN, W-wa, 1992.
9. W.T. Eadie, D. Drijard, F.E. James, M. Roos, B. Sadoulet, Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej, PWN 1989.
10. J. Jaworski, R. Morawski, J. Olędzki, Wstęp do metrologii i techniki eksperymentu, WNT, 1992.
11. A. Plucińska, E. Pluciński, Elementy probabilistyki, PWN, W-wa, 1979.

Pomiary studentów i pomiary nauczycieli

Studenci będą mierzyć w
Laboratorium
wielkości fizyczne,

a ja

Pomiary studentów i pomiary nauczycieli

Studenci będą mierzyć w Laboratorium wielkości fizyczne,

a ja

będę musiał mierzyć wiedzę i umiejętności

wyznaczając przy pomocy zadań, testów i sprawozdań wartość wielkości wiedzy i umiejętności

Rysunek: Temida, źródło Wikipedia

Eksperyment domowy

Jakiś dobry pomysł ... poszukać w umyśle

CEL WYKŁADU I LABORATORIUM

Moim celem, jako nauczyciela, jest nauczyć:

1. Wiedza:
   - definicja pomiaru
   - zasady organizacji eksperymentu.
   - podstawy probabilistyczne i statystyczne analizy danych
   - metody analizy danych empirycznych
2. Umiejętności:
   - organizować pomiar, zbudować układ pomiarowy
   - mierzyć
   - analizować dane
   - pisać raport
3. Kompetencje
   - jaką role pełnią pomiary w życiu społeczeństwa (przemysł, handel).

CEL WYKŁADU I LABORATORIUM

Moim celem, jako nauczyciela, jest nauczyć:

1. Wiedza:
   - definicja pomiaru
   - zasady organizacji eksperymentu.
   - podstawy probabilistyczne i statystyczne analizy danych
   - metody analizy danych empirycznych
2. Umiejętności:
   - organizować pomiar, zbudować układ pomiarowy
   - mierzyć
   - analizować dane
   - pisać raport
3. Kompetencje
   - jaką role pełnią pomiary w życiu społeczeństwa (przemysł, handel).

Studenci chcą zaliczyć

i tu bywają sprzeczności interesów.
Ja bym chciał abyśmy to pogodzili

Gdzie uczą analizy danych

FIZYKA

Analiza danych z podstawami matematycznymi i metrologią jest tylko na fizyce

Studia inżynierskie

Metrologia jest na studiach technicznych: elektronika, elektryczny, mechatronika (nie ma na informatyce), ale brak im fizyki.

Matematyka

Matematycy uczą się statystyki ale nie umieją mierzyć

Nauki społeczne

Psycholodzy, socjolodzy, ekonomiści mają statystykę ale nie rozumieją rachunku prawdopodobieństwa i brak im matematyki.

Ale tylko FIZYCY
mogą być najlepsi

Macie być elitą intelektualną
i elitą metrologiczną.

Taki jest mój plan.

Macie być elitą intelektualną i elitą metrologiczną.

Taki jest mój plan.

I czy Wasz też?

Przystępujemy do mierzenia Świata

Metoda naukowa w fizyce:

1. Pomiar - źródłem informacji
2. Model matematyczny - język opisu zjawisk

Planowanie eksperymentu, siedem faz eksperymentu

1. Cel badań i model wyjściowy badanych zjawisk. Zebranie danych literaturowych, opracowanie teorii.
2. Zebranie zespołu badawczego o odpowiednich kompetencjach, plan finansowy.
3. Dobór narzędzi badawczych, zestawienie układu pomiarowego, testowanie i zapewnienie warunków.
4. Wykonanie eksperymentu pomiarowego i odczytanie wskazań przyrządów pomiarowych (*odczyty z przyrządów są danymi surowymi i wymagają opracowania*).
5. przetworzenie uzyskanych danych: wykonanie obliczeń w celu wyznaczenia wartości mierzonych wielkości (*dla założonego modelu zjawiska*).
6. Ocena niepewności („rachunek błędów")
7. Interpretacja wyników, zbadanie zgodność z teorią, wnioski i dalsze plany.

Cel badań i model wyjściowy badanych zjawisk. Zebranie danych literaturowych, opracowanie teorii

Cele badań:

1. poznawcze
2. aplikacyjne

W obu przypadkach posługujemy się modelem.
Rola modelu:

1. Wyodrębnianie obiektu.
2. Definicja mierzonej wielkości.
3. Metoda pomiarowa i konstrukcja przyrządów pomiarowych.

ad.1–każdy obiekt jest wyróżniany z rzeczywistości.
ad.2–definicja wielkości mierzonej jest parametrem modelu.
ad.3–przyrząd jest skonstruowany na podstawie teorii, modelu zjawisk.

Zespół badawczy, środki finansowe

Dobór współpracowników i organizacja pracy:

1. Uzupełniające się kompetencje. Zbyt wielu wąskich specjalistów z jednej dziedziny może być utrudnieniem. Dla trudnych zadań niezbędne są zespoły interdyscyplinarne. Zespół studencki–podział zadań.
2. Zasady współpracy: należy wykorzystywać zalety a nie wady. Nadmierne wytykanie wad generuje konflikty, utrudnia współpracę.
3. Klarowny obieg informacji, tworzenie przejrzystych dokumentów, protokółów i raportów.

Wykonanie eksperymentu

Jak wszystko jest gotowe to eksperyment wykona małpa

Wykonanie eksperymentu

Jak wszystko jest gotowe to eksperyment wykona małpa
a tym bardziej ...

Wykonanie eksperymentu

Jak wszystko jest gotowe to eksperyment wykona małpa
a tym bardziej ...student

Wykonanie eksperymentu

Jak wszystko jest gotowe to eksperyment wykona małpa
a tym bardziej ...student

Analiza i interpretacja wyników

Czy uzyskaliśmy potwierdzenie teorii czy też nowe zjawisko?
Przyczyny odstępstw teorii od pomiarów.
Dobór parametrów równań teoretycznych
Testowanie hipotez statystycznych.

Wykonanie eksperymentu

Jak wszystko jest gotowe to eksperyment wykona małpa
a tym bardziej ...student

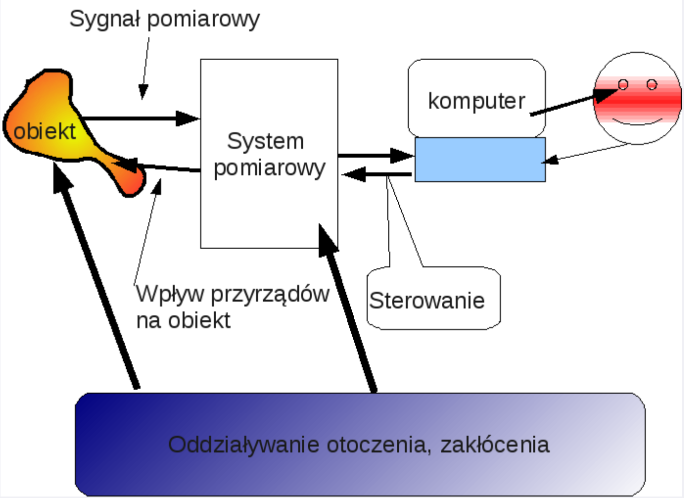
Analiza i interpretacja wyników

Czy uzyskaliśmy potwierdzenie teorii czy też nowe zjawisko?
Przyczyny odstępstw teorii od pomiarów.
Dobór parametrów równań teoretycznych
Testowanie hipotez statystycznych.

Analiza niepewności.

Najtrudniejszy element sprawozdania.
podam recepty i możliwe wyjaśnienia.

System pomiarowy



Oddziaływania na obiekt i układ pomiarowy

Rodzaje pomiarów, dwa typy pomiarów:

1. pomiar bezpośredni,
   wartość mierzonej wielkości pokazuje przyrząd, przykłady masa (ciężar) mierzona wagą szalkową, długość mierzona linijką, czas mierzony zegarkiem, napięcie mierzone woltomierzem
2. pomiar pośredni:
   - wyznaczenia wartości mierzonej wielkości poprzez wyliczenie ze wzoru opisującego zjawisko:

     $$z = f(x, y) \tag{1}$$

     gdzie: x i y wielkości mierzone bezpośrednio. np: $R = U/I$,
     gdzie: U–napięcie zmierzone woltomierzem,
     I–natężenie prądu mierzone amperomierzem.
   - metoda najmniejszych kwadratów, metoda statystyczna analizy zależności zmierzonych empirycznie.

Pomiar

Wielkość fizyczna β - reprezentowana funkcją Φ_β:

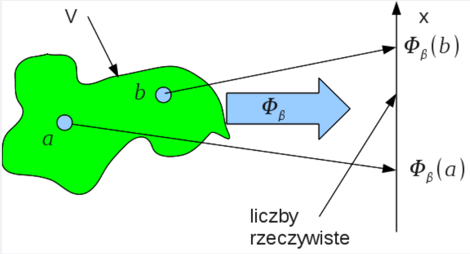
$$\Phi_\beta : V \to \mathbb{R} \qquad (2)$$

Wartość wielkości: wartość funkcji Φ_β dla obiektu $a \in V$:

$$\Phi_\beta(a) \qquad (3)$$

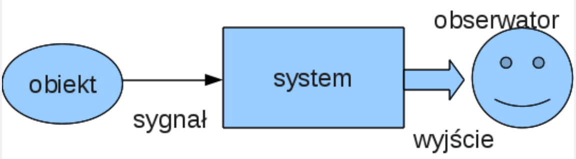
jeśli wartość zmierzoną oznaczymy x to:

$$x = \Phi_\beta(a) \qquad (4)$$



Sygnał

Sygnał opisuje oddziaływanie pomiędzy obiektami
– technologia pudełkowa.



Sygnał przekazuje informację:
wyróżniany:

- nośnik sygnału - wielkość fizyczna, dzięki której zachodzi oddziaływanie
- treść sygnału, informacja o badanej rzeczywistości.

Składniki systemu pomiarowego

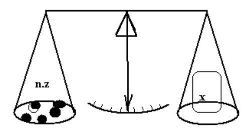
Pomiar wielkości ekstensywnej, dwie operacje:

- składanie obiektów,
- komparacja obiektów.

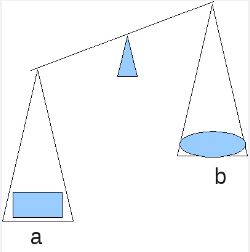
Empiryczny system obserwacyjny:

$$\langle V, \prec, \circ \rangle \qquad (5)$$

V, zbiór obiektów (ciał), $\prec$ - relacja poprzedzania określona przez komparator, $\circ$ - operacja składania obiektów.



składanie obiektów i ich komparacja.



Relacja poprzedzania $b \prec a$

Pomiar - homomorfizm struktur

System empiryczny:

$$\langle V, \prec, \circ \rangle \tag{6}$$

system liczbowy

$$\langle \mathbf{R}, <, + \rangle \tag{7}$$

Pomiar Φ:

$$\Phi : V \to \mathbf{R} \tag{8}$$

właściwości Φ:

$$\Phi(a \circ b) = \Phi(a) + \Phi(b) \tag{9}$$

$$a \prec b \Leftrightarrow \Phi(a) < \Phi(b) \tag{10}$$

Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa - pojęcia podstawowe

Ω – zbiór zdarzeń elementarnych,
jest to zbiór elementów, z którego możemy złożyć wszystkie zdarzenia.
Zdarzenia mają postać podzbioru zbioru zdarzeń elementarnych:
Zdarzenie $A \subset \Omega$

rzut kością

Zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\boxdot, \}$

Prawdopodobieństwo

Definicja prawdopodobieństwa:
Prawdopodobieństwo P to miara na przestrzeni $\Gamma = 2^{\Omega}$ wszystkich podzbiorów Ω:
$P : \Gamma \rightarrow [0, 1]$
P spełnia własności:

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ jeżeli $A \cap B = \emptyset$

gdzie $\emptyset$ zbiór pusty, Ω wszystkie zdarzenia elementarne.
Prawdopodobieństwo opisuje populację czyli zbiór obiektów (zespół statystyczny) a nie opisuje pojedynczych zdarzeń.

Wyznaczanie prawdopodobieństwa
Model teoretyczny: zakładamy, że wszystkie zdarzenia elementarne (lub inny zbiór) są jednakowo prawdopodobne, wtedy:

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \frac{\#A}{\#\Omega} \tag{11}$$

gdzie $\overline{A} = \#A$ - liczebność (liczność) zbioru A, $\overline{\Omega}$ – liczebność Ω.
przykład - rzut kością zakładamy, że wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne, wtedy dla każdego zdarzenia:

$$P(bok_k) = \frac{1}{6} \tag{12}$$

Zmienna losowa

Zmienna losowa:

$$X : \Omega \rightarrow \Re \tag{13}$$

Ω – zbiór zdarzeń elementarnych, $\Re$ – liczby rzeczywiste.
$x = X(\omega)$ – wartość zmiennej losowej dla zdarzenia losowego $\omega \in \Omega$.
Zmienna losowa dyskretna – zbiór zdarzeń losowych jest przeliczalny: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K\} = \{\omega_k\}_{i=1}^{K} = \{\omega_k : k = 1, ..., K\}$
gdzie: K - liczność zbioru zdarzeń elementarnych Ω, $\{\omega_k\}$ - skrócony zapis zbioru zdarzeń elementarnych.
Zmienna losowa ciągła - zbiór Ω jest nieskończony i "ciągły".
$x_k = X(\omega_k)$ – realizacja zmiennej losowej – wynik eksperymentu losowego.

Przykład

rzucamy kością

przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$\Omega = \{bok_1, bok_2, bok_3, bok_4, bok_5, bok_6\}$

wartości zmiennej losowej:

$x_1 = X(bok_1) = 1$

$x_2 = X(bok_2) = 2$

$x_3 = X(bok_3) = 3$

$x_4 = X(bok_4) = 4$

$x_5 = X(bok_5) = 5$

$x_6 = X(bok_6) = 6$

Ale wartości zmiennej losowej mogą być inne:

$x_k = k^2 + 3$ czyli $x_1 = 4$ i $x_2 = 7$ itd...

Eksperyment losowy rzucamy kością N razy i uzyskujemy ciąg zdarzeń (realizacji zmiennej losowej X):

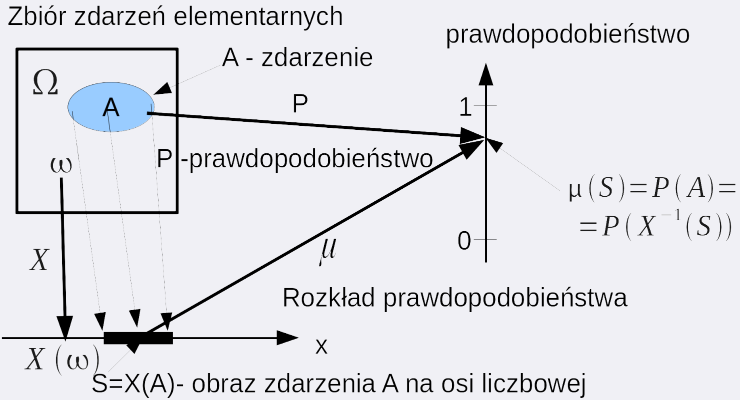
$\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3}, \ldots, \tilde{x_N}, \ldots, \tilde{x_N}$.

Przykład: $1, 1, 2, 2, 6, 4, 5, 3, 3, 2, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 3, 2, 3, 4, 4, 5, ..$

w realizacjach zdarzeń losowych liczby mogą się powtarzać.

Zmienna losowa

Zmienna losowa – funkcja X, która zdarzeniom przyporządkowuje liczby: $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

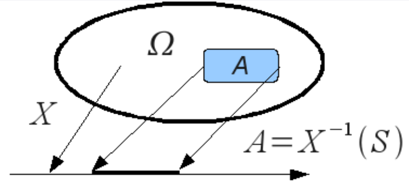


Miara probabilistyczna: μ zbiorowi $S \in \mathbb{R}$ przyporządkowuje prawdopodobieństwo, $S = X(A)$.

Dystrybuanta

$$F(x) = P\left(X^{-1}(-\infty, x]\right) \tag{14}$$

gdzie X^{-1} jest funkcją odwrotną do zmiennej losowej. $X^{-1}(S)$ przeciwobrazem zbioru S, czyli zbiorem zdarzeń elementarnych $\omega \in \Omega$, dla których $X(\omega) \in S$.

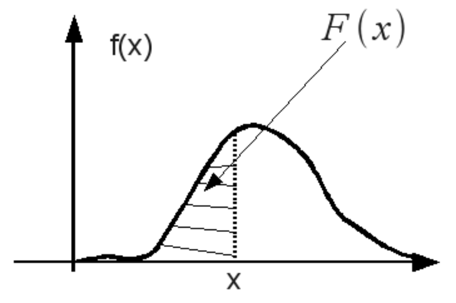


W skrócie pisze się: $F(x) = P((-\infty, x]) = P(-\infty < X < x)$

Gęstość prawdopodobieństwa

Gęstość prawdopodobieństwa definiuje wzór:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{15}$$



Dystrybuanta jest równa polu pod wykresem gęstości prawdopodobieństwa.

Wartość oczekiwana:

$$E(X) = \sum_{k=1,K} x_k p_k \tag{16}$$

$x_k = X(\omega_k)$ – wartość zmiennej losowej dla zdarzenia losowego $\omega \in \Omega$.
Zmienna losowa dyskretna:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K\} = \{\omega_k\}_{i=1}^{K} = \{\omega_k : k = 1, ..., K\}$
K - liczność zbioru zdarzeń elementarnych Ω,
p_k prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia ω_k:
$p_k = P(X = x_k)$

Wartość średnia z próby losowej.

Próba losowa - wynik powtórzenia eksperymentu:

a) N razy rzucamy kością

b) Rzucamy N kośćmi.

Takie dwa eksperymenty są równoważne jeśli zbiór obiektów jest powieleniem jednego obiektu.

W badaniach biologicznych i społecznych zakładamy, że obiektem badań jest cała populacja.

Średnia z próby:

$$\overline{X} = x_{sr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1,N} \widetilde{x}_i \tag{17}$$

gdzie: x_i wynik i-tego eksperymentu losowego, i-ty pomiar. $\{\widetilde{x}_i\}$ - zbiór realizacji zdarzeń losowych.

Suma w 17 jest po zbiorze realizacji.

Średnia z próby losowej jest **estymatorem wartości oczekiwanej**

Twierdzenie:

$$\overline{X} = x_{sr} = \sum_{k=1}^{K} x_k p_k \tag{18}$$

Gdzie: $\{x_k\}_{k=1,K}$ - zbiór zdarzeń elementarnych,
Suma we wzorze (18) jest po zbiorze zdarzeń elementarnych
Dowód:

$$x_{sr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1,N} \widetilde{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K} n_k x_k = \sum_{k=1}^{K} \frac{n_k}{N} x_k = \sum_{k=1}^{K} p_k x_k \tag{19}$$

gdzie: $\sum_{k=1}^{K}$ jest sumą po zdarzeniach elementarnych
$\sum_{i=1}^{N}$ jest sumą po realizacjach.
w granicy:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{k=1,N} \frac{n_k}{N} = E(X) \tag{20}$$

Własności wartości oczekiwanej:
E jest operatorem liniowym:
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
$E(\alpha X) = \alpha E(X)$

Przykłady obliczania wartości oczekiwanej:
Załóżmy, że kość jest niedokładnie wykonana prawdopodobieństwa różne,
każdemu wylosowanemu symbolowi przyporządkowujemy wartość liczbową x_i

$$\begin{array}{cccc} Nr & p_i & x_i & p_i x_i \\ 1 & 0.4 & 1 & 0.4 \\ 2 & 0.15 & 10 & 1.5 \\ 3 & 0.25 & 5 & 1.25 \\ 4 & 0.03 & 25 & 0.75 \\ 5 & 0.15 & 8 & 1.2 \\ 6 & 0.03 & 95 & 1.9 \\ \sum p_i = & 1.0 & \sum(p_i \cdot x_i) = & 7 \end{array} \tag{21}$$

Odchylenie standardowe – miara rozrzutu.

$$(\sigma(X))^2 = \sigma_X^2 = V(X) \tag{22}$$

$V(X)$ – wariancja

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=N}^{N} p_i(x_i - E(X))^2 \tag{23}$$

Własności wariancji:

$$V[X] = \sigma^2[X] = \sigma_X^2 = E[(X)^2] - E^2(X) \tag{24}$$

Dowód: $V[X] = E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + E^2(X)] =$
$E[X^2] - 2E(X)E(X) + E^2(X)$
czyli
$V[X] = E(X^2) - E^2(X)$
Wariancja sumy zmiennych losowych nieskorelownych:

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \text{ czyli } \sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)} \tag{25}$$

Jest to zasada propagacji niepewności standardowej.

przykład

odchylenie standardowe zdarzenia dwupunktowego
$P(A) = p$ oraz $P(B) = 1 - p$
wartośći zmiennej losowej:
$x(A) = 1$ oraz $x(B) = 1$
Wartość oczekiwana $E(X) = 1p + 0(1 - p) = p$
wariancja

$$V(X) = p(1-p)^2 + 0(0-p)^2 = p(1-p) \tag{26}$$

odchylenie standardowe – zdarzenia równomierne –np. trafianie do celu. $E(X) = 2.5$

$$
\begin{array}{cccccc}
i & p_i & x_i & x_i - E(X) & (x_i - E(X))^2 & (x_i - E(X))^2 p_i \\
1 & \frac{1}{6} & 0 & -2.5 & 6.25 & \frac{6.25}{6} \\
2 & \frac{1}{6} & 1 & -1.5 & 2.25 & \frac{2.25}{6} \\
3 & \frac{1}{6} & 2 & -0.5 & 0.25 & \frac{0.25}{6} \\
4 & \frac{1}{6} & 3 & 0.5 & 0.25 & \frac{0.25}{6} \\
5 & \frac{1}{6} & 4 & 1.5 & 2.25 & \frac{2.25}{6} \\
6 & \frac{1}{6} & 5 & 2.25 & 6.25 & \frac{6.25}{6} \\
\hline
suma & 1 & & suma & = & \frac{17.5}{6} = 2.9167
\end{array}
\tag{27}
$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - E(X))^2 = 2.9167$$

$$\sigma(X) = 1.7$$

Dystrybuanta dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \tag{28}$$

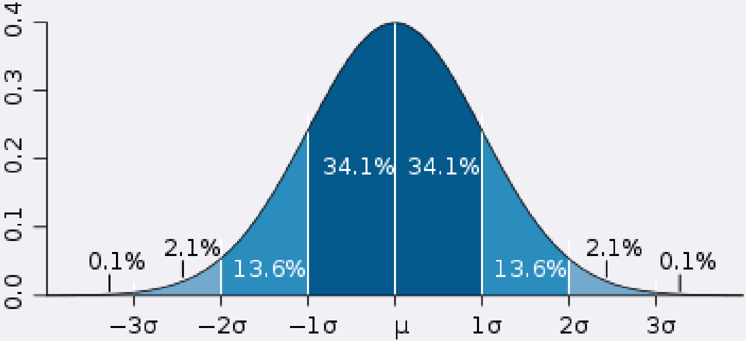
dla zmiennej losowej ciągłej:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi \tag{29}$$

Rozkład normalny

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{30}$$

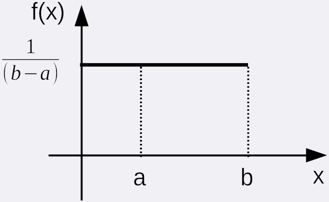
gdzie: σ – odchylenie standardowe
μ – wartość oczekiwana.



Rozkład równomierny

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} C & dla \quad a \leq x \leq b \\ 0 & dla \quad x < a \text{ lub } x > b \end{cases}$$



Wartość oczekiwana $E(X) = \frac{1}{2}(b+a)$

Odchylenie standardowe: $V(X) = \sigma^2(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2 = \frac{1}{3}\Delta^2 x$

METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Badane zjawisko (obiekt) opisane jest równaniem

$$y = f(x) \tag{31}$$

W wyniku pomiarów mamy serię danych $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{N}$
Zadaniem jest znaleźć funkcję najlepiej pasująca do danych doświadczalnych.
Mamy dwa zagadnienia:

1. dobór rodziny funkcji,
2. określenie kryterium dopasowania.

Rodziny funkcji

Rodzinę funkcji opisuje się wzorem, w którym funkcja zależy od prametru:
przykłady funkcji:

1. funkcja liniowa: $f(x) = ax + b$
   a i b sa parametrami (które wskaźnikuja rodzinę funkcji liniowych).
2. funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$
   ta rodzina ma trzy parametry.
   Ogólnie może być dowolny wielomian n–tego rzędu.
3. funkcja wykładnicza $f(x) = ae^{(bx)}$
   parametry a i b nie wyczerpują możliwości.
4. wymierna: $f(x) = A\dfrac{x-a}{x-b}$, jest to przypadek ilorazu wielomianów pierwszego rzędu.
5. funkcja Lorentza $f(x) = \dfrac{A}{b-(x-a)^2}$

Kryteria dopasowania

Kryterium dopasowania jest minimalizacja miary I różnicy pomiędzy danymi doświadczalnymi a funkcją opisana wzorem.

Celem jest taki dobór paramterów opisujących funkcję, dla których miara różnicy pomiędzy danymi doświadczalnymi a równaniem funkcji jest jak najmniejsza.

Przykładem miary najczęściej stosowanej jest suma różnic kwadratów:

$$I(a, b, c, \cdots) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - f_{a,b,c}(x))^2 \qquad (32)$$

Szukamy takich parametrów a, b, c dla których ta zależność jest minimalna.
Używa się też sumy kwadratów ale z wagami zależnymi od niepewności pomiarów.

przykład, dopasowanie danych do prostej

Szukamy takiego a dla którego miara odległości $I(a)$ jest najmniesza.

$$I(a, b, c, \cdots) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - f_{a,b,c}(x))^2 \tag{33}$$

Dla funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ szukamy minimum:

$$I(a) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2 \tag{34}$$

przykład, dopasowanie danych do prostej $f(x) = ax$

szukamy minimum:

$$I(a) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i))^2 \tag{35}$$

Czyli:

$$\frac{d}{da} I(a) = \frac{d}{da} \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i)^2 = 0 \tag{36}$$

$$\frac{d}{da} \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b)) (-a) = 0$$

czyli:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i x_i - a \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 0 \text{ ostatecznie: } a = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

Testowanie hipotez

W wyniku obserwacji mamy dane pomiarowe $\{x_i\}_{i=1}^{N}$.
Nie znamy rozkładu prawdopodobieństwa a chcemy odpowiedzieć na pytanie: czy na podstawie zmierzonych wartości można powiedzieć, że

1. wartość oczekiwana jest równa pewnej liczbie a,
2. dwa obiekty a i b dla których wykonano pomiary a_i i b_i $(i = 1, \cdots, N)$ charakteryzują się różnymi wartościami oczekiwanymi.
3. empiryczny rozkład statystyczny jest zgodny z hipotezą f.

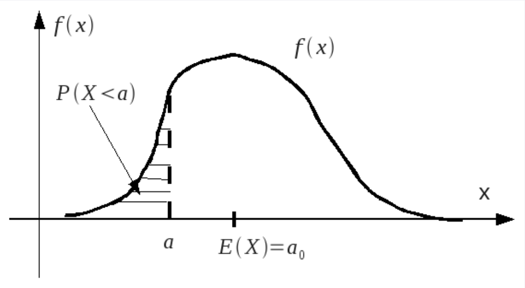
Testowanie hipotez

W wyniku obserwacji mamy dane pomiarowe $\{x_i\}_{i=1}^{N}$.
Nie znamy rozkładu prawdopodobieństwa a chcemy odpowiedzieć na pytanie: czy na podstawie zmierzonych wartości można powiedzieć, że

1. wartość oczekiwana jest równa pewnej liczbie a,
2. dwa obiekty a i b dla których wykonano pomiary a_i i b_i $(i = 1, \cdots, N)$ charakteryzują się różnymi wartościami oczekiwanymi.
3. empiryczny rozkład statystyczny jest zgodny z hipotezą f.

Zasada weryfikacji hipotezy:
Określamy z jaki prawdopodobieństwem może być zaobserwowany wynik uzyskany w doświadczeniu, przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza.

Hipoteza: czy wartość oczekiwana jest równa a czyli:
$H_0 : E(X) = a$.

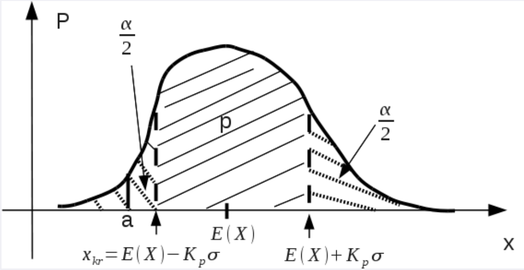


Jeśli prawdopodobieństwo $P(X < a)$ jest małe (mniejsze od α) to mamy powód odrzucenia hipotezy.

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx < \alpha \tag{37}$$

Zazwyczaj $\alpha = 0,05$

Jak policzyć test z danych doświadczalnych.

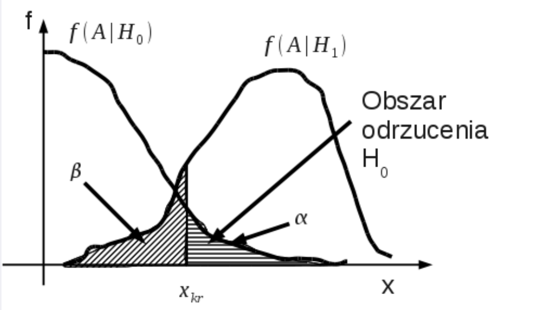


Przedział ufności

$$P\left(E(X) - K_p\sigma(X) < X < E(X) + K_p\sigma(X)\right) = p \qquad (38)$$

czyli: $E(X) - K_p\sigma(X) > a$
gdzie: $p = 1 - 2\alpha$, wartość oczekiwana $E(X)$ i odchylenie standardowe zastępujemy estymatorami. K_p współczynnik zależny od rozkładu prawdopodobieństa.

Test chi-kwadrat hipotezy o rozkładzie statystycznym.



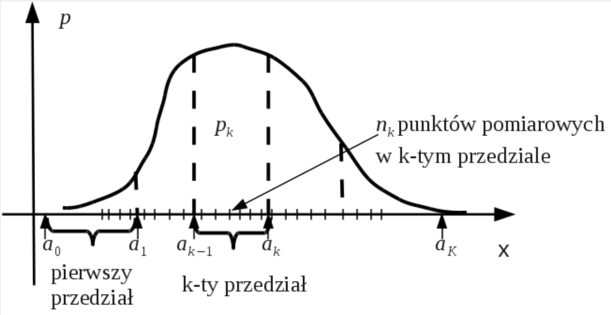
Miarą różnicy pomiędzy danymi eksperymentalnymi $\{x_i\}$ a rozkładem hipotetycznym p_i jest:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(n_k - Np_k)^2}{Np_k} = \sum_{k=1}^{K} \frac{(f_k - p_k)^2}{p_k} \tag{39}$$

n_k–liczba wystąpień wyników z k–tego przedziału.

$N = \sum_{k=1}^{K} n_k$–ilość prób. $f_k = \frac{n_k}{N}$–zaobserwowana częstość.

Dane doświadczalne: x_i, dzielimy na przedziały:



W każdy przedziale powinno być przynajmniej 12 punktów (aby rozkład zmiennej n_k był zblizony do normalnego).
p_k–prawdopodobieńswo tego, że wynik jest w przedziale k–tym $[a_{k-1}, a_k]$:

$$p_k = P(a_{k-1}, X < a_k) = \int_{a_{k-1},}^{a_k} f(x)dx \tag{40}$$

Dziękuję za uwagę