Ćw. 27. Badanie właściwości statystycznych elektronów emitowanych z katody lampy próżniowej

Michał Urbański

1. Wprowadzenia

Kinetyczna teoria gazów i materii została sformułowana pod koniec XIXw. i spowodowała rewolucję w nauce. Podstawowy wkład do rozwoju teorii kinetycznej materii wnieśli Rudolf Clausius, James Clerk Maxwell, Ludwig Boltzmann, Josiah Willard Gibbs, William Thomson (Lord Kelvin), Josef Loschmidt, Albert Einstein i Marian Smoluchowski. Kinetyczna teoria pozwala na wyjaśnienie właściwości makroskopowych materii na podstawie modelu mikroskopowego.

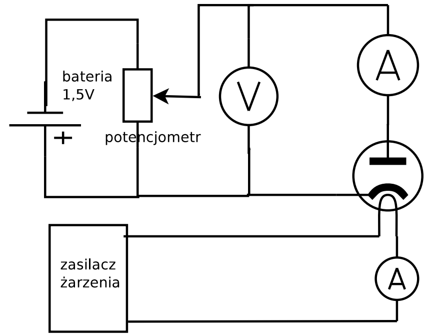
Celem ćwiczenia jest empiryczne wykazanie, że elektrony emitowane przez katodę w lampie próżniowej opisane są rozkładem Maxwella. Układ pomiarowy składa się z lampy elektronowej (diody), baterii zadającej prąd anodowy, mierników napięcia i prądu elektrycznego oraz układu zasilania żarzenia. W lampie elektronowej jest próżnia wobec tego elektrony nie zderzają się z cząstkami powietrza. Katoda lampy elektronowej jest grzana wobec tego niektóre elektrony (prawdopodobieństwo tego będzie obliczone) mają wystarczającą energie aby opuścić metal. Elektrony te tworzą prąd elektryczny, który będzie mierzony amperomierzem. Prąd ten zależy od napięcia hamującego. Wynikiem pomiarów będzie zależność prądu diody (czyli prądu elektronów które opuszczą katodę) od napięcia hamującego.

W celu wyprowadzenia wzorów na natężenie prądu diody należy założyć, że elektrony można opisać jako gaz elektronów swobodnych i obliczyć ile średnio elektronów może opuścić katodę i dotrzeć do anody. Poniżej przedstawione będą podstawowe fakty niezbędne do wyprowadzenia wzorów i zrozumienia ćwiczenia, jednak zaleca się zapoznać z podręcznikami np. [3, 1, 2].

2. Układ pomiarowy

Ćwiczenie będzie polegało na pomiarze zależności prądu anodowego diody od napięcia przyłożonego na diodę. W tym ćwiczeniu będziemy mierzyli jedynie prąd przy napięciu hamującym ruch elektronów czyli gdy bateryjka podłączona jest biegunem ujemnym do anody (czyli elektrony będą odpychane od anody).

Układ pomiarowy przedstawiony jest na rysunku 1



Rysunek 1: Schemat układu do pomiaru zależności prądu anodowego od napięcia. Potencjometr służy do regulacji napięcia w zakresie 0-1,5V.

3. Rozkład statystyczny cząstek w gazie

Gaz doskonały opisany jest równaniem stanu wiążącym ciśnienie p, objętość V, liczbę moli cząstek gazu n i temperaturę T:

$$pV = nRT \tag{1}$$

gdzie R - stała gazowa (stał gazowa może być wyrażona przez liczbę Avogadro N_A i stałą Boltzmana k_B następująco: $R = N_A k_B$).

Równanie gazu doskonałego można wyprowadzić przyjmując następujące założenia dotyczące właściwości cząsteczek z których składa się gaz: spełnia następujące założenia:

1) Energia potencjalna oddziaływań cząsteczek jest zerowa $E_p = 0$, jedyną formą oddziaływania cząstek gazu są zderzenia sprężyste.
2) Rozmiary cząstek są bardzo małe, można uznać, że są punktowe.
3) Ruch cząsteczek można opisać modelem probabilistycznym, w którym zakłada się, że prędkości wszystkich cząsteczek opisane są taki samym rozkładem praw-

dopodobieństwa, rozkłady te są wzajemnie niezależne i nie ulegają zmianie w wyniku zderzeń sprężystych.

Z założeń tych wynika:

1) Energia całkowita gazu U (energia wewnętrzna) zawartego w pewnej objętości V jest równa sumie energii kinetycznych cząsteczek:

$$U = \sum_{i=1}^{N} E_{k,i} = N \langle E_k \rangle = nN_A \langle E_k \rangle \tag{2}$$

gdzie N - liczba cząsteczek w gazie (w rozpatrywanej objętości), $E_{k,i}$ - energia kinetyczna i-tej cząstki, $\langle E_k \rangle$ - energia średnia kinetyczna jednej cząstki.

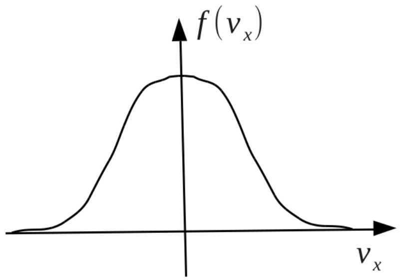
2) rozkład prawdopodobieństwa jednej składowej wektora prędkości opisany jest równaniem (rys. 2):

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\Pi k_B T}}\ e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} \tag{3}$$

gdzie k_B - stała Boltzmana, m - masa cząstek,

3) związek pomiędzy ciśnieniem, objętością, i temperaturą opisuje równanie stanu gazu doskonałego (1).

Równanie (3) można wyprowadzić rozważając symetrię zderzeń sprężystych w gazie (np. [3]).



Rysunek 2: Rozkład składowej v_x prędkości elektronów swobodnych w metalu.

Modelem gazu jest więc zbiór cząsteczek o bardzo małych rozmiarach, poruszających się we wszystkich kierunkach z jednakowym prawdopodobieństwem, a wektor prędkości ma rozkład Maxwella. Energia wewnętrzna gazu może być wyznaczone na podstawie średniej statystycznej (wzór (2)) gdzie energia jednego stopnia swobody (czyli dla składowej związanej z prędkości v_x) wynosi:

$$\langle E_k(v_x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{mv_x^2}{2} f(v_x) dv_x = \frac{1}{2} k_B T \tag{4}$$

Rozkład statystyczny interpretujemy jako częstość występowania zjawiska (wzór (6)).

Jeśli w naczyniu o objętości V jest N cząstek to liczba cząstek $\Delta N(v_x)$ o składowej x-owej prędkości zawartej w przedziale $[v_x, v_x + \Delta v_x]$ wynosi:

$$\Delta N(v_x) = Nf(v_x) = N\sqrt{\frac{m}{2\Pi k_B T}}\ e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} \tag{5}$$

Przypomnijmy, że w teorii prawdopodobieństwa dla dowolnego zdarzenia A prawdopodobieństwo $P(A)$ zdarzenia A interpretujemy jako stosunek liczby zdarzeń $N(A)$ realizujących zdarzenie A do całkowitej liczby zdarzeń:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \tag{6}$$

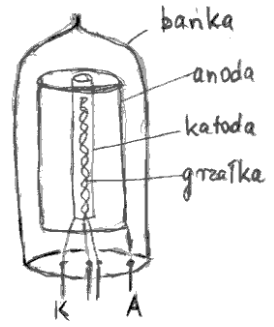
Jeśli wykonamy pewien eksperyment N, a zdarzenie A pojawi się $N(A)$ to równanie (6) określa prawdopodobieństwo empiryczne, jeśli liczba powtórzeń eksperymentu jest nieskończona to wzór ten określa prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia A. Wzór ten jest tym dokładniejszy im większe jest N. W przypadku rozważanego gazu we wzorze (5) liczba cząstek N jest na tyle duża, że wzór ten można traktować jako dokładny.

4. Gaz elektronowy w diodzie próżniowej

Dioda próżniowa składa się z metalowej katody wyposażonej w grzejnik oraz anody. Wszystko umieszczone jest w bańce próżniowej na tyle szczelnej, że można założyć, że w bańce praktycznie nie ma żadnych cząstek. Elektrony po opuszczeniu katody mogą się więc poruszać w próżni swobodnie i w zależności od ich energii mogą dotrzeć do anody.

Elektrony w metalu można opisać w przybliżeniu jak gaz elektronów. Ponieważ znajdują się one w polu jonów więc w przybliżeniu można uznać, że elektrony nie oddziałują ze sobą, czyli można opisać elektrony jako gaz doskonały. Elektrony oddzielone są od otocznia barierą potencjału nazywana pracą wyjścia (oznaczymy ją W). Można sobie wyobrazić elektrony jako piłki na boisku oddzielonym od otocznia wysokim płotem. Każdy elektron ma inną prędkość, przy czym rozkład statystyczny tych prędkości opisany jest równaniem (3). W analogii z piłkami na boisku, piłki rzucane są z różnymi prędkościami. przez barierę potencjału (czyli płot) przelecą te elektrony, które mają energię kinetyczna większą od energii potencjalnej bariery W:

$$\frac{mv_k^2}{2} > W \tag{7}$$



Rysunek 3: Dioda próżniowa, zaznaczone są katoda i anoda w postaci koncentrycznych rur.

gdzie v jest prędkością elektronu niezbędną do opuszczenia metalu.

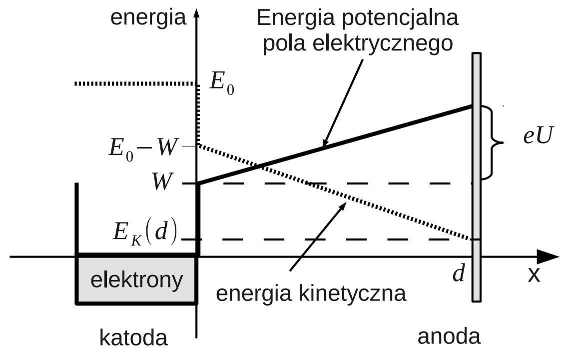
Ponieważ diodę połączyliśmy z baterią tak, że minus jest na anodzie (schemat 1) więc pole wytworzone przez napięcie anodowe będzie hamować ruch elektronów. Na rysunku 4 pokazano energie potencjalna w funkcji położenia x (x - odległość od katody). Do anody dotrą elektrony (znajdujące się w katodzie), które mają energię kinetyczną większa od sumy pracy wyjścia i energii pola elektrycznego wytworzonego przez baterię. Warunek dotarcia elektronu do anody ma więc postać:

$$\frac{mv^2}{2} > W + eU \tag{8}$$

gdzie U jest napięciem baterii a eU- energia potencjalna elektronu o ładunku e w polu o różnicy potencjałów U [1]. Do anody dotrą więc te elektrony, które mają prędkość większą od prędkości krytycznej v_k:

$$v_k = \sqrt{\frac{2(W + eU)}{m}} \tag{9}$$

Na rysunku 4 pokazano zależność energii potencjalnej i kinetycznej od położenia x względem katody. Pokazana jest energia kinetyczna elektronu od położenia w przypadku gdy energia początkowa elektrony E_0 jest na tyle duża, że elektron oderwie się od katody i dotrze do anody. Energia elektronu $E(x)$ jest sumą energii kinetycznej $E_k(x)$ i potencjalnej $E_p(x)$ dla każdego położenia x: $E(x) = E_K(x)+E_p(x)$. Energia ta jest stała i równa energii początkowej E_0, czyli $E_0 = E_k(x) + E_p(x)$. Energia potencjalna wynosi więc: $E_k(x) = E_0 - E_p(x)$. Warunkiem dotarcia do anody jest to aby energia kinetyczna była większa od zera dla $x = d$: $E_k(d) > 0$, czyli $E_0 - E_p(d) > 0$. Ponieważ $E_p(d) = eU + W$ więc warunek dotarcia elektronu do anody ma postać: $E_0 > eU + W$. Energia początkowa E_0 jest energią kinetyczną, można ja zapisać w postaci: $E_0(x) = \frac{mv^2}{2}$ (gdzie v - prędkość początkowa elektronu), warunek dotarci do anody ma więc postać $\frac{mv^2}{2} > W + eU$ co jest zapisane równaniem (8), jest to przedstawione na rys. 4.



Rysunek 4: Wykres zależności energii potencjalnej (linia ciągła) i kinetycznej (linia przerywana) elektronów w diodzie połączonej z źródłem napięcia o polaryzacji hamującej od położenia x - względem granicy katody (metalicznej). Linia prosta pomiędzy katodą a anodą opisuje zależność energii potencjalna pola elektrycznego wytworzonego przez baterię (podłączoną pomiędzy katodę i anodę) od odległości od katody. Liną przerywaną zaznaczono zależność energii kinetycznej elektronu od położenia dla energii początkowej $E_0 > eU + W$. Energia kinetyczna $E_K(d)$ przy anodzie jest większa od zera, d - odległość anody od katody.

Należy dodać, że gaz elektronowy podlega zasadom mechaniki kwantowej, jednak dla elektronów, które mają na tyle dużą energię, że mogą opuścić metal można w przybliżeniu zastosować rozkład Maxwella. (3).

4.1. Prąd elektronów w diodzie

Prąd jest strumieniem elektronów jaki przepływa przez pewną powierzchnię, natężenie prądu I zdefiniowane jest jako stosunek ładunku Δq jaki przepłynął przez

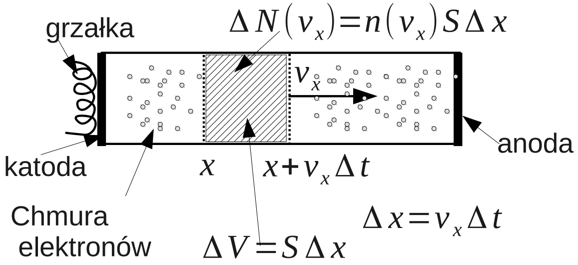
[1] Napięcie $U_{A,B}$ pomiędzy punktem A i B jest to praca na jednostkowy ładunek: $U = \frac{W_{A,B}}{q}$, $W_{A,B}$ - praca potrzebna do przeniesienia ładunku q pomiędzy punktem A i B, praca ta jest równa różnicy energii potencjalnych.

pewną powierzchnie S do czasu w jakim ten ładunek przepłyną:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \tag{10}$$

gdzie Δq jest ładunkiem jaki przepłynie przez powierzchnię S w czasie Δt.

W celu wyprowadzenia wzoru na natężenie prądu płynącego od katody do anody diody próżniowej założymy, że dioda ma symetrię płaską, czyli katoda i anoda są płaszczyznami, wtedy należy rozważyć strumień elektronów poruszających się równolegle i przepływających przez pewną powierzchnię S. W celu ułatwienia obliczeń wyobraźmy sobie, że elektrony mieszczą się w rurze, której przekrój ma pole powierzchni S.



Rysunek 5: Natężenie prądu obliczymy rozważając ilość elektronów jaka przepływa w czasie Δt przez powierzchnię S. W objętości ΔV znajduje się $\Delta N(v_x) = n(v_x)S\Delta x = n(v_x)Sv_x\Delta t$ elektronów
o prędkości v_x.

Jeśli rozważymy elektrony poruszające się od katody do anody z prędkością v_x to ładunek niesiony przez te elektrony wynosi:

$$\Delta q = \Delta N(v_x)e = n(v_x)eSv_x\Delta t \tag{11}$$

Prąd utworzony przez elektrony o prędkości v_x, płynący od katody do anody może być opisany wzorem:

$$I(v_x) = n(v_x)eSv_x \tag{12}$$

gdzie $n(v_x)$ - liczba elektronów w jednostce objętości o prędkości v_x.

Gaz elektronowy składa się z cząstek o różnej prędkości, rozkład tej prędkości zadany jest wzorem Maxwella (3). Dlatego musimy zapisać wzór na prąd (12) dla cząstek o prędkości z przedziału $[v_x, v_x + \Delta v_x]$:

$$\Delta I(v_x) = \Delta n(v_x)\ eSv_x = n_0 f(v_x)\Delta v_x eSv_x \tag{13}$$

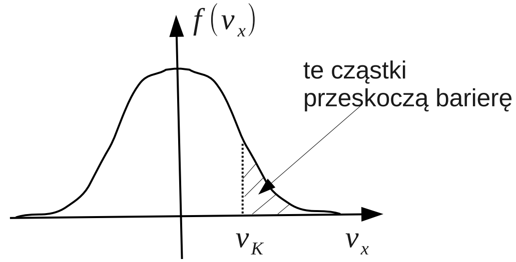
gdzie n_0 jest liczbą cząstek (elektronów) w jednostce objętości.

Pisząc ten wzór w równaniu (11) zamiast gęstości ładunku $n(v_x)$ (czyli liczby cząstek o prędkości v_x na jednostkę objętości) wstawiliśmy $\Delta n(v_x) = n_0 f(v_x)\Delta v_x$, czyli liczbę cząstek mających prędkość w przedziale $[v_x, v_x + \Delta v_x]$ na jednostkę objętości. Wynika to ze wzoru (5) podzielonego przez objętość (tak aby uzyskać gęstość):

$$\Delta n(v_x) = \frac{\Delta N(v_x)}{V} = \frac{N}{V} f(v_x) = n_0 f(v_x) \tag{14}$$

Z anody do katody dotrą tylko te elektrony, których energia kinetyczna jest większa od pracy wyjścia W i energii pola elektrycznego hamującego ruch elektronów (wzór (8)). Oznacza to, ze w celu wyliczenia prądu anodowego diody musimy wysumować (czyli scałkować) składniki prądu z równania (13):

$$I = \int\limits_{v_x > v_K} dI(v_x) = \int\limits_{v_x > v_K} n_0 eSv_x f(v_x) dv_x \tag{15}$$



Rysunek 6: Rozkład Maxwella prędkości elektronów na powierzchni katody poruszających się w kierunku anody. Zaznaczono pole pod krzywą rozkładu reprezentujące cząstki, które pokonają barierę potencjału i dotrą do anody.

Całkując równanie (15) otrzymamy
(wykorzystujemy że $\int x \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = -\exp(-x^2)$:

$$I = Sn_0 e \int\limits_{v_K}^{\infty} v_x f(v_x) dv_x = Sn_0 e \sqrt{\frac{m}{2\Pi k_B T}} \int\limits_{v_K}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}} v_x dv_x =$$

$$Sn_0 e \sqrt{\frac{m}{2\Pi k_B T}} \frac{k_B T}{m} \left[-e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}} \right]_{v_K}^{\infty} = Sn_0 e \sqrt{\frac{m}{2\Pi k_B T}} \frac{k_B T}{m}\ e^{-\frac{eU+W}{k_BT}}$$

ostatecznie wynik zapiszemy jako:

$$I = I_0 e^{-\frac{eU}{k_B T}} \tag{16}$$

gdzie stała $I_0 = S n_0 e \sqrt{\frac{m}{2\Pi k_B T}} \frac{k_B T}{m}\ e^{-\frac{W}{k_B T}}$

Równanie (16) można zlinearyzować logarytmując:

$$y = \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{e}{k_B T} U \tag{17}$$

Równanie to ma postać $y = aU$, gdzie a jest nachyleniem prostej i zgodnie z równaniem powinno wynosić:

$$a = -\frac{e}{k_B T} \tag{18}$$

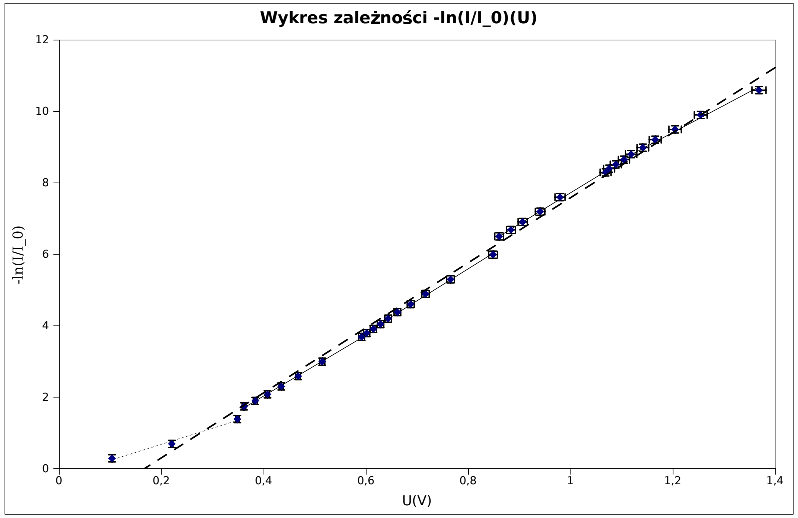
W opracowaniu danych należy metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć współczynnik nachylenia danych zależności $\ln \frac{I}{I_0}$ od napięcia i następnie należy wyznaczyć temperaturę z równania (18).

5. Pomiary i opracowanie danych

Natężenie prądu diody (wzór (16) silnie zależy od temperatury i napięcia. Należy wykonać pomiary natężenia prądu anodowego od napięcia w możliwie szerokim zakresie napięć. Należy ustawić woltomierz na zakres 2V i nie zmieniać w trakcie pomiaru. Natężenie prądu należy zmierzyć tak aby dla każdego zakresu pomiarowego wykonać ponad 10 pomiarów. Pomiary zależności prądu od napięcia należy wykonać dla dwóch prądów żarzenia (ok 0,6A i 0,5A). Uzyska się kilka serii danych które należy wykreślić w skali logarytmicznej czyli $ln(I)$ w funkcji napięcia U.

W opracowania należy, dla każdej wartości prądu żarzenia, wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów współczynniki nachylenia dla zależności empirycznej $y = ln(I)$ od U (czyli dla równania (17)) dla poszczególnych zakresów pomiaru prądu i dla całości danych (dotyczących jednej wartości prądu żarzenia). Takie obliczenia należy wykonać dla każdej wartości żarzenia i dla każdej wartości żarzenia należy wyznaczyć temperaturę ze wzoru 18. Należy pamiętać o tym, że zazwyczaj wykreśla się zależność logarytmu prądu od modułu napięcia (napięcie hamujące jest ujemne) wtedy współczynnik nachylenia jest dodatni wynosi $a = \frac{e}{k_B T}$ (patrz wzór (18)).

Wynikiem obliczeń będą więc temperatury wyznaczone dla serii pomiarowych wykonanych dla jednego zakresu (przynajmniej 10 pomiarów) i dla wszystkich danych dla jednej wartości prądu żarzenia. Otrzymane wyniki dla jednego prądu żarzenia mogą się różnić i należy przedyskutować możliwe przyczyny tego zjawiska



Rysunek 7: Wykres zależności logarytmu prądu diody od napięcia dla pędu żarzenia $I_z = 0,59A$. Pokazane są trzy proste uzyskane metoda najmniejszych kwadratów dla trzech zakresów pomiarowych amperomierza oraz prosta dla wszystkich danych (prosta przerywana). Widać różnice w uzyskanych nachylenia szczególne dla małych napięć.

(efekt dekadowy związany ze zmiana parametrów przyrządu przy zmianie zakresów pomiarowych). Przykład uzyskanego wykresu pokazuje rysunku 7

W analizie danych należy wyznaczyć niepewności temperatury (na podstawie niepewności nachylenia) i przedyskutować uzyskany wynik. We wnioskach należy podsumować metodę pomiaru, wynik pomiaru i podać interpretację.

Literatura

[1] W. Bogusz, J. Garbarczyk, F. Krok, Podstawy fizyki, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1999.

[2] F. Reif, Fizyka statystyczna, PWN 1971.

[3] A. W. Astachow, Mechanika Teoria kinetyczna, WNT, 1988.