

FIZYKA LABORATORIUM

dr hab. inż. Michał K. Urbański,
Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej,
pok 18 Gmach Fizyki, murba@if.pw.edu.pl
www.if.pw.edu.pl/~murba
konsultacje pon 17-18 pok 18 Gmach Fizyki
strona Wydziału Fizyki
www.fizyka.pw.edu.pl

4 października 2017

Harmonogram ćwiczeń

<i>zesp</i>	1	2	3	4	5	6	7
1 – 4	<i>czas – dl</i>	<i>ohm</i>	<i>wah</i>	<i>rez</i>	χ^2	<i>gamma</i>	...
5 – 8	<i>czas – dl</i>	<i>ohm</i>	χ^2	<i>gamma</i>	<i>Maxwell</i>	<i>Broglie</i>	...
9 – 12	<i>czas – dl</i>	<i>ohm</i>	<i>Maxwell</i>	<i>Broglie</i>	<i>lepkosc</i>	<i>prz – ciepl</i>	...
13 – 16	<i>czas – dl</i>	<i>ohm</i>	<i>lepkosc</i>	<i>prz – ciepl</i>	<i>itd</i>

Ohm–ćw.1, Metody pomiarowe ...

czas-dl – ćw.1A - statystyka pomiarów czasu i długości

ohm – ćw.1 - weryfikacja prawa Ohma, metoda najmniejszych

kwadratów χ^2 – ćw.7, Statystyczny charakter rozpadu

promieniotwórczego

lepk– ćw.19, Laminarny przepływ cieczy.

odb– ćw.30, Badanie odbicia światła od powierzchni dielektryka

rez– Rezonans elektryczny ćw25..

Źródła informacji

www.if.pw.edu.pl/~murba

na mojej stronie można znaleźć:

instrukcję pisania sprawozdań, instrukcję do ćwiczeń, regulamin, skrypt z opracowywania danych doświadczalnych dla wydz Fizyki. Jeśli nie ma instrukcji na mojej stronie należy zapoznać się z instrukcją ze strony CLF.

<http://clf.if.pw.edu.pl>

strona CLF (użytkownik student, hasło fizyka).
Zamieszczone są instrukcje, regulaminy.

Materiał obowiązujący

To co w instrukcji (mojej i z CLF), wiedza ogólna z fizyki (podręczniki), wiedza matematyczna z probabilistyki statystyki. Nie należy traktować instrukcji jako jedyne źródła informacji

CEL ZAJĘĆ, czyli co was czeka

- 1 Fizyka - przypomnieć sobie podstawy fizyki z liceum
- 2 Pomiar - zapoznać się z przyrządami pomiarowymi
- 3 Statystyczna analiza danych - opracować statystycznie dane zebrane samodzielnie
- 4 Sprawozdanie - napisać raport z wykonanych pomiarów i zinterpretować otrzymane wyniki

CEL ZAJĘĆ, czyli co was czeka

- 1 Fizyka - przypomnieć sobie podstawy fizyki z liceum
- 2 Pomiar - zapoznać się z przyrządami pomiarowymi
- 3 Statystyczna analiza danych - opracować statystycznie dane zebrane samodzielnie
- 4 Sprawozdanie - napisać raport z wykonanych pomiarów i zinterpretować otrzymane wyniki

Nie mam złudzeń i wiem, że fizyków z Was nie zrobię

CEL ZAJĘĆ, czyli co was czeka

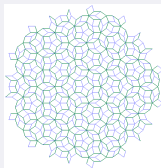
- 1 Fizyka - przypomnieć sobie podstawy fizyki z liceum
- 2 Pomiar - zapoznać się z przyrządami pomiarowymi
- 3 Statystyczna analiza danych - opracować statystycznie dane zebrane samodzielnie
- 4 Sprawozdanie - napisać raport z wykonanych pomiarów i zinterpretować otrzymane wyniki

Nie mam złudzeń i wiem, że fizyków z Was nie zrobię

Zazwyczaj Matematycy analizują cudze dane, taka okazja samodzielnego zbierania danych może się już nie zdarzyć.

sławni matematycy

- **Newton** zapoczątkował fizykę jako „Matematyczne podstawy filozofii przyrody - był profesorem matematyki na uniwersytecie w Cambridge.
- **Gauss** analizował dane dla geodezji, opracował metodę najmniejszych kwadratów, statystykę, tw Gaussa i inne no i ... żył nieźle,
- **Riemann**, najgenialniejszy matematyk, robił ogólna teorię pola, zapoczątkował geometrię różniczkową - ale umarł za młodu na gruźlicę lub mukowiscydozę.
- **Penrose** - matematyczne podstawy fizyki, jest profesorem matematyki na uniwersytecie w Cambridge.



CO TO FIZYKA

CO TO FIZYKA

nauka o materii

CO TO FIZYKA

nauka o materii – ale po co matematykowi materia?????

CO TO FIZYKA

nauka o materii – ale po co matematykowi materia?????

Fizyka to: model matematyczny i metoda pomiarowa

CO TO FIZYKA

nauka o materii – ale po co matematykowi materia?????

Fizyka to: model matematyczny i metoda pomiarowa
skąd się wzięła fizyka?

CO TO FIZYKA

nauka o materii – ale po co matematykowi materia?????

Fizyka to: model matematyczny i metoda pomiarowa

skąd się wzięła fizyka?

z ciekawości

CO TO FIZYKA

nauka o materii – ale po co matematykowi materia?????

Fizyka to: model matematyczny i metoda pomiarowa

skąd się wzięła fizyka?

z ciekawości — ale na początku była matematyka

CO TO FIZYKA

nauka o materii – ale po co matematykowi materia?????

Fizyka to: model matematyczny i metoda pomiarowa

skąd się wzięła fizyka?

z ciekawości — ale na początku była matematyka

W starożytnej Grecji matematyka była w królową nauk, ale była matematyką przyrody a nie nauką abstrakcji.

CO TO FIZYKA

nauka o materii – ale po co matematykowi materia?????

Fizyka to: model matematyczny i metoda pomiarowa

skąd się wzięła fizyka?

z ciekawości — ale na początku była matematyka

W starożytnej Grecji matematyka była w królową nauk, ale była matematyką przyrody a nie nauką abstrakcji.

Dopiero w XIX wieku matematyka oddzieliła się od opisywania przyrody.

CO TO FIZYKA

nauka o materii – ale po co matematykowi materia?????

Fizyka to: model matematyczny i metoda pomiarowa

skąd się wzięła fizyka?

z ciekawości — ale na początku była matematyka

W starożytnej Grecji matematyka była w królową nauk, ale była matematyką przyrody a nie nauką abstrakcji.

Dopiero w XIX wieku matematyka oddzieliła się od opisywania przyrody.

Niestety rozwód matematyki z fizyką jest trwały

CO TO FIZYKA

nauka o materii – ale po co matematykowi materia?????

Fizyka to: model matematyczny i metoda pomiarowa

skąd się wzięła fizyka?

z ciekawości — ale na początku była matematyka

W starożytnej Grecji matematyka była w królową nauk, ale była matematyką przyrody a nie nauką abstrakcji.

Dopiero w XIX wieku matematyka oddzieliła się od opisywania przyrody.

Niestety rozwód matematyki z fizyką jest trwały

No czasem jakiś matematyk zdobędzie nagrodę Nobla z ekonomii

REGULAMIN

- 1 **Warunkiem zaliczenia laboratorium jest zaliczenie wszystkich 13 ćwiczeń.**
- 2 Podstawa zaliczania: Ocena z wejściówki (pisemnej) i sprawozdania.
- 3 w planie 15 spotkań: wykład wstępny, 13 ćwiczeń i termin do odrabiana.
- 4 Protokół – dokładny zapis przebiegu ćwiczeń, aparatura, schematy, wyniki pomiarów, niepewności. Każdy protokół musi być podpisany przez prowadzącego laboratorium. Protokół musi mieć pieczętkę i pisany musi być długopisem, sprawozdanie nie może być zaliczone jeśli nie ma protokołu.
- 5 Sprawozdanie (jedno na zespół) zawiera: opis podstaw teoretycznych, metodę pomiaru wyniki, opracowanie i wnioski.
- 6 Prawo autorskie - sprawozdanie zawiera jedynie własną pracę.

I. PRZEPISY PORZĄDKOWE

1. Na ćwiczenia należy przychodzić punktualnie.
2. Odzież wierzchnią należy zostawiać w szatni.
3. Palenie tytoniu, spożywanie posiłków i używanie telefonów komórkowych w laboratorium jest zabronione.
4. Studenci obowiązani są do przebywania w czasie pracy w laboratorium wyłącznie przy swoim stanowisku pomiarowym.
5. Nie wolno zamykać obwodów elektrycznych przed sprawdzeniem ich przez prowadzącego ćwiczenia.
6. Nie wolno modyfikować układów pomiarowych.
7. Po zakończeniu pomiarów należy:
 - a) zgłosić prowadzącemu zakończenie pracy,
 - b) wyłączyć zasilanie urządzeń pomiarowych,
 - c) uporządkować stanowisko pracy.

I. PRZEPISY PORZĄDKOWE, cd.

8. Przyrządy odbiera się od studentów na 15 min. przed zakończeniem ćwiczeń. W przypadku wcześniejszego wykonania pomiarów studenci opracowują sprawozdanie.

9. Komputery służą wyłącznie w celu wykonania ćwiczenia. Wszelkie inne działania (użycie własnych nośników pamięci, używanie innych programów niż wskazany) skutkują natychmiastowym usunięciem zespołu z zajęć.

10. Studenci wykonujący ćwiczenia, w których stosowane są źródła promieniowania, zobowiązani są do zapoznania się z odpowiednimi przepisami wywieszonymi w sali B.

Asystent prowadzący ćwiczenia jądrowe pobiera preparaty do ćwiczeń przed zajęciami, a po skończeniu zajęć zdaje pobrane źródła.

11. W przypadkach szczególnych nie ujętych w regulaminie decyzję podejmuje prowadzący zajęcia w porozumieniu z kierownikiem laboratorium.

II. ORGANIZACJA PRACY W LABORATORIUM

1. Ćwiczenia wykonywane są w zespołach trzyosobowych.
2. Na drugie zajęcia studenci obowiązani są dostarczyć teczki (1 na zespół). Teczka powinna być opisana zgodnie ze wzorem podanym w gablocie.
3. Każdy zespół wykonuje protokół i sprawozdanie.
4. Przed ćwiczeniem każdy student powinien przygotować protokół według wzoru podanego w gablocie.
5. Protokół musi być wykonany na papierze podaniowym (arkusz kancelaryjny) w kratkę (format $A4 \times 2$). Tabelka informacyjna na pierwszej stronie protokołu musi być wypełniona w całości i po zakończeniu ćwiczenia protokół na każdej stronie musi być opatrzony **podpisem prowadzącego ćwiczenia lub kierującego przedmiotem.**

II. ORGANIZACJA PRACY W LABORATORIUM, cd. 6.

Wyniki pomiarów należy wpisywać do protokołu w formie tabel, które powinny być zaprojektowane przed przystąpieniem do ćwiczenia z zaznaczeniem jednostek, w jakich wyrażane są poszczególne wielkości.

Protokół musi być czytelny, a wyniki pomiarów wpisane atramentem lub długopisem.

7. Protokół sprawdza i podpisuje prowadzący ćwiczenie.

Protokół bez podpisu prowadzącego jest nieważny.

Na podstawie wyników zawartych w protokole każdy student sporządza sprawozdanie.

8. Przy wykonywaniu pomiarów należy przestrzegać poleceń zawartych w instrukcji do ćwiczenia. W razie wątpliwości należy zwrócić się o pomoc do prowadzącego ćwiczenie.

II. ORGANIZACJA PRACY W LABORATORIUM, cd 9.

Protokoły wraz z dołączonymi do nich sprawozdaniami są zbierane na następnych zajęciach przez opiekuna grupy z jednoczesnym odnotowaniem tego faktu na liście.

Nie oddanie sprawozdania w przewidzianym terminie powoduje obniżenie końcowej oceny z ćwiczenia.

10. Na sprawozdaniu prowadzący ćwiczenie zaznacza dostrzeżone błędy, niedociągnięcia oraz braki i wpisuje wystawioną ocenę lub oddaje sprawozdanie do poprawy.

11. Sprawdzone sprawozdania wraz z protokołami przechowywane są w teczkach. Do uzyskania zaliczenia ćwiczeń wymagany jest komplet sprawdzonych sprawozdań. Brak protokołu lub sprawozdania jest powodem nie zaliczenia danego ćwiczenia.

III. ZASADY ZALICZEŃ

1. Na ocenę końcową z ćwiczenia składa się ocena z kolokwium wstępnego, pisemnego („wejściówka”) i ocena ze sprawozdania.
2. Do zaliczenia ćwiczeń laboratoryjnych wymagane jest uzyskanie pozytywnych ocen z wszystkich wykonanych ćwiczeń.
3. W czasie zajęć w laboratorium student zdaje kolokwium pisemne, którego materiał obejmuje:
 - * ogólne wiadomości z działu którego dotyczy dane ćwiczenie.
 - * wiadomości szczegółowe na temat badanego zjawiska.
 - * znajomość metody pomiarowej stosowanej w danym ćwiczeniu.Ocena niedostateczna z kolokwium wstępnego może być poprawiona na najbliższych zajęciach.

III. ZASADY ZALICZEŃ – sprawozdanie

4. Sprawozdanie z ćwiczenia powinno zawierać:

- * krótką część teoretyczną: cel ćwiczenia, istota badanego zjawiska, podstawowe definicje i wzory,
- * metoda wykonywania pomiarów, schematy układów pomiarowych,
- * tablice z wynikami pomiarów,
- * wykresy na papierze milimetrowym lub logarytmicznym
- * analizę danych, obliczenia wyznaczanych wielkości i niepewności pomiarowych,
- * fizyczną interpretację wyników i wnioski własne obejmujące: zgodności z teorią, głównych źródeł błędów, metody poprawienia pomiarów, porównanie z danymi literaturowymi.

5. **Prawo autorskie (Copyright) zabrania umieszczać w sprawozdaniach przekopiowanych:**

oryginalnych części tekstu, wzorów lub rysunków z instrukcji, książek czy internetowych źródeł.

Wzory, rysunki, tekst i schematy muszą wykonane **samodzielnie**.

III. ZASADY ZALICZEŃ – ćwiczenia niezaliczone

4. Jedno niezaliczone ćwiczenie może być poprawione w terminie dodatkowym, ustalonym przez opiekuna grupy.
5. Prowadzący ćwiczenie ma prawo nie dopuścić studenta do wykonywania pomiarów, jeżeli stopień przygotowania uniemożliwia wykonanie przez niego pomiarów poprawnie i ze zrozumieniem. W tym przypadku student może uzupełnić swoje przygotowanie w czasie zajęć, mając jednak mniej czasu na wykonanie pomiarów.
6. Niewykonanie pomiarów w czasie zajęć powoduje nie zaliczenie ćwiczenia.

III. ZASADY ZALICZEŃ – nieobecności

7. Nieobecność na zajęciach:

- * nieobecność nieusprawiedliwiona na zajęciach laboratoryjnych powoduje, że ćwiczenie będzie niezaliczone,
- * jedno ćwiczenie zaległe z powodu nieobecności usprawiedliwionej może być wykonane w terminie dodatkowym, wyznaczonym przez opiekuna grupy,
- * dwa lub więcej ćwiczenia zaległe z powodu nieobecności usprawiedliwionej mogą być odrobione, ale wymaga to odrębnej decyzji kierownika laboratorium.

Regulamin BHP

Wykonywanie ćwiczeń w laboratorium fizyki wiąże się z koniecznością pracy z urządzeniami elektrycznymi, laserami oraz stycznością z promieniowaniem jonizującym oraz mikrofalami. Pomimo, że stosowana aparatura posiada zabezpieczenia fabryczne a obsługa laboratorium dodatkowo instaluje konieczne blokady i osłony zabezpieczające, to wykonywanie ćwiczeń wymaga od studentów zachowania niezbędnej ostrożności. Ze względu na stosowanie bardzo wielu urządzeń i przyrządów oraz częstą ich wymianę, w przypadkach budzących wątpliwość należy zwracać się do prowadzącego ćwiczenie.

Praca z urządzeniami elektrycznymi

Podczas przepływu prądu przez ciało człowieka następują zmiany wskutek wydzielania znacznych ilości ciepła, zjawisk elektrolizy i podrażnienia układu nerwowego.

Przeciętna oporność ciała ludzkiego wynosi około $1M\Omega = 10^6\Omega$, ale wskutek różnych czynników zewnętrznych może obniżyć się do $1k\Omega = 1000\Omega$.

Ponieważ natężenie prądu przemiennego wynoszące 24 mA nie wywołuje poważniejszych następstw, przyjęto na tej podstawie napięcie 24 V uznawać jako bezpieczne. Większość przyrządów i mierników używanych w pracowni zasilana jest napięciem zmiennym 220 V.

Układy zasilane z baterii nie są niebezpieczne, ale prąd baterii może zniszczyć przyrządy. Układy zasilane bateryjnie może włączyć tylko prowadzący.

Pracując z urządzeniami elektrycznymi należy przestrzegać następujących zasad bezpieczeństwa:

- * włączając układ (np. do sieci, generatora, baterii) można tylko po sprawdzeniu go przez prowadzącego zajęcia i w jego obecności,
- * nie wolno dokonywać samowolnie zmian w obwodach elektrycznych,
- * wszelkie zmiany w obwodach elektrycznych należy dokonywać po uprzednim wyłączeniu źródeł napięcia,
- * należy pamiętać by w momencie włączenia mierniki były ustawione na zakres największy a zasilacze na minimalny,
- * przed włączeniem napięcia suwaki opornic powinny być w pozycji środkowej,
- * niedopuszczalne jest wyciąganie przewodów z kontaktu w inny sposób jak trzymając za wtyczkę,

W razie nagłego wyłączenia napięcia z sieci należy wyłączyć wszystkie urządzenia elektryczne i włączyć w odpowiedniej kolejności, dopiero po pojawieniu się napięcia, w razie zaobserwowania nieprawidłowości w działaniu układu należy go bezzwłocznie odłączyć od źródła napięcia.

Praca z laserami

Używane w pracowni lasery wysyłają promieniowanie w zakresie promieniowania widzialnego i z tych względów zakres zagrożenia jest porównywalny do napromieniowania światłem (białym). Lasery używane w pracowni posiadają moc kilku mW.

Oddziaływanie wysyłanego przez nie promieniowania na skórę można uznać za nieszkodliwe. Oddziaływanie światła laserowego na oczy jest szkodliwe i posługując się laserem należy przestrzegać następujących zaleceń:

- * nie wolno dopuścić do bezpośredniego działania wiązki światła laserowego na gałkę oczną,
- * nie wolno posługiwać się w sposób nie kontrolowany przedmiotami odbijającymi promieniowanie (lustra), które mogą skierować promieniowanie laserowe w oczy osoby postronnej.

Prace ze źródłem mikrofal

Mikrofale (fale elektromagnetyczne o długościach leżących w zakresie od 30 cm do 0,1 cm) w oddziaływaniu na organizm ludzki wywierają skutek cieplny. Przegrzewają i niszczą komórki zarówno na powierzchni jak i w głębokich partiach ciała. Przy pracy ze źródłem mikrofal należy przestrzegać następujących zaleceń:

- * nie wolno zbliżać się do nadajnika (anteny nadawczej) na odległość mniejszą niż 20 cm,
- * zbliżać głowy (oczu) do obszaru skolimowanej wiązki mikrofal,
- * nie należy bez potrzeby przebywać w strefie promieniowania anteny nadawczej.

Praca ze źródłami promieniowania jonizującego

Promieniowanie jądrowe, a także promieniowanie rentgenowskie wywiera ujemny wpływ na organizm ludzki poprzez jonizację cząsteczek, z których składają się podstawowe jednostki organizmu - komórki. Jonizacja pociąga za sobą dalsze procesy fizyko-chemiczne prowadzące do zaburzeń syntezy białek i przemiany węglowodorowej. Wrażliwość komórek jest wprost proporcjonalna do szybkości ich rozmnażania i odwrotnie proporcjonalna do stopnia zróżnicowania. Z tego powodu, najbardziej wrażliwe są gonady i szpik kostny a najmniej wrażliwe są ręce, przedramiona i stopy. Z powyższego wynika, że o stopniu szkodliwości biologicznej promieniowania decyduje jego zdolność do jonizacji. Dla celów ochrony radiologicznej wprowadzono pojęcie współczynnika skuteczności biologicznej (WSB). Dla promieniowania rentgenowskiego, gamma i beta $WSB = 1$, dla cząstek alfa, protonów i neutronów $WSB = 10$. W laboratorium studenci pracują ze źródłami zamkniętymi, których moc dawki nie stwarza zagrożeń biologicznych.

Ze względu na fakt, że dawka pochłonięta przez organizm kumuluje się konieczne jest zachowanie niezbędnej ostrożności:

* **Ochrona przez odległość** jest podstawową zasadą ochrony radiologicznej. Wynika z faktu, że moc dawki promieniowania jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od źródła. Dlatego nawet w przypadku korzystania ze słabych źródeł izotopowych nie należy ich brać do ręki. W celu przeprowadzanie jakichkolwiek manipulacji ze źródłami promieniotwórczymi należy posługiwać się manipulatorami, pęsetą lub szczypcami. W czasie wykonywania ćwiczenia źródła promieniowania należy umieszczać na stole laboratoryjnym w możliwie dużej odległości.

* **Ochrona przez osłony.**

Umieszczając między źródłem a eksperymentatorem odpowiednio grubą osłonę możemy niemal w dowolnym stopniu zmniejszyć poziom promieniowania.

Najłatwiej osłonić się przed promieniowaniem **alfa** dla którego kartka papieru lub kilkunastocentymetrowa warstwa powietrza całkowicie pochłaniają to promieniowanie.

W celu osłabienia promieniowania **beta** stosuje się osłony z materiałów o małej liczbie atomowej, Z np. ze szkła organicznego i aluminium.

Promieniowanie **gamma** jak również rentgenowskie jest najbardziej przenikliwe. Ponieważ współczynnik osłabienia promieniowania jest tym większy im większa jest liczba porządkowa, osłony przed tym promieniowaniem wykonuje się głównie z ołowiu.

SPRAWOZDANIE

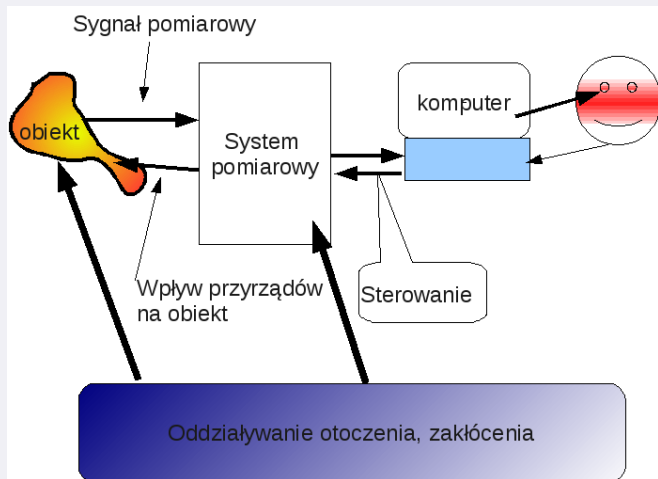
Nie przepisywać instrukcji i nie kopiować rysunków (prawo autorskie).

Podać uzasadnienie wyliczeń. (nie może być „gołego” wyniku liczbowego).

Sprawozdanie składa się z:

- 1 Wstęp: opis zjawiska, teoria , wyprowadzenie wzorów używanych w opracowaniu. Metoda obserwacji zjawiska. Możliwie krótkie.
- 2 Układ pomiarowy, zasady pomiaru, opis przyrządów
- 3 Wyniki pomiarów, tabele, wykresy.
- 4 opracowanie danych, statystyki, obliczenia, **analiza niepewności**.
- 5 Wnioski:
 - czy zgodność z teorią?
 - Główne źródła błędów, co największe?
 - Jak zmniejszyć niepewność.
 - porównać z wynikami pomiarów z literatury, **tablic**, **internetu**.

System pomiarowy



Oddziaływania na obiekt i układ pomiarowy

Rodzaje pomiarów, dwa typy pomiarów:

- 1 pomiar bezpośredni,
wartość mierzonej wielkości pokazuje przyrząd, przykłady
masa (ciężar) mierzona wagą szalkową, długość mierzona
linijką, czas mierzony zegarkiem, napięcie mierzone
woltomierzem
- 2 pomiar pośredni:
 - wyznaczenia wartości mierzonej wielkości poprzez wyliczenie ze wzoru opisującego zjawisko:

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

gdzie: x i y wielkości mierzone bezpośrednio. np: $R = U/I$,
gdzie: U –napięcie zmierzone woltomierzem,
 I –natężenie prądu mierzone amperomierzem.

- metoda najmniejszych kwadratów, metoda statystyczna analizy zależności zmierzonych empirycznie.

Błąd i niepewność

Błąd różnica pomiędzy wartością zmierzona a poprawną („prawdziwą”):

x_0 – wartość poprawna („prawdziwa”)

\tilde{x} wartość zmierzona (odczytana z przyrządu)

Δx – błąd.

$$\tilde{x} = x_0 + \Delta x \quad (2)$$

Błąd i niepewność

Błąd różnica pomiędzy wartością zmierzona a poprawną („prawdziwą”):

x_0 – wartość poprawna („prawdziwa”)

\tilde{x} wartość zmierzona (odczytana z przyrządu)

Δx – błąd.

$$\tilde{x} = x_0 + \Delta x \quad (2)$$

ALE

Nie znamy ani wartości prawdziwej ani błędu,
mamy tylko odczyt z przyrządu.

Błąd i niepewność

Błąd różnica pomiędzy wartością zmierzona a poprawną („prawdziwą”):

x_0 – wartość poprawna („prawdziwa”)

\tilde{x} wartość zmierzona (odczytana z przyrządu)

Δx – błąd.

$$\tilde{x} = x_0 + \Delta x \quad (2)$$

ALE

Nie znamy ani wartości prawdziwej ani błędu,
mamy tylko odczyt z przyrządu.

Możemy tylko oszacować błędy, takie oszacowane nazywamy:

NIEPEWNOŚCIĄ

Źródła błędów

Źródłem błędów są:

- 1 Model obiektu, założenia dotyczące języka opisu obiektów.
- 2 Doprowadzenie wielkości mierzonej do przyrządu, zakłócenia sygnałów.
- 3 Wpływ przyrządu na obiekt mierzony.
- 4 Wzorce – odniesienia, względem których mierzone są wartości wielkości
Wzorcowanie – przenoszenie wartości wzorcowej na przyrząd.
- 5 Działanie przyrządu pomiarowego, histereza, nieliniowości, błąd przetwarzania.
- 6 Błędy odczytu.
- 7 Błędy interpretacji

Metody szacowania niepewności ujęte są zasadami ISO
(International Organization for Standardization www.iso.org).

Podstawowy dokument

GUIDE TO THE EXPRESSION OF UNCERTAINTY IN
MEASUREMENT, ISO/GIMP

w skrócie „Przewodnik”

BIMP – Bureau International des Poids et Mesures

Dokument ten został ratyfikowany przez

Główny Urząd Miar Rzeczypospolitej Polskiej

Fizyczna klasyfikacja błędów - model „stary”

Założenia modelu:

- 1 istnieje wartość „prawdziwa” x_0 (nazywana w metrologii poprawną)
- 2 wynik pomiaru X różni się wartości prawdziwej o wartość błędu Δx :

$$\tilde{x} = x_0 + \Delta x \quad (3)$$

- 3 błędy są addytywne - błąd jest sumą składników opisujących różne źródła błędów
- 4 dwa typy błędów: przypadkowe i systematyczne

$$\Delta x = \Delta x_s + \Delta x_r \quad (4)$$

Δx_s – składowa systematyczna błędu,

- 5 Δx_r – składowa przypadkowa błędu, zakładamy, że Δx_r jest zmienną losową.

Błąd systematyczny, błąd graniczny

Założmy, że pomiar jest jednokrotny lub też składowa przypadkowa jest bardzo mała.

$$\tilde{x} = x_0 + \Delta x \quad (5)$$

jeśli $\Delta x \in [-\Delta x_{max}, \Delta x_{max}]$

to: $x_0 \in [\tilde{x} - \Delta x_{max}, \tilde{x} + \Delta x_{max}]$ co zapiszemy:

$$x_0 = \tilde{x} \pm \Delta_{max}x \quad (6)$$

inaczej: wynik pomiaru reprezentowany jest przedziałem:

$$[\tilde{x} - \Delta x_{max}, \tilde{x} + \Delta x_{max}] \quad (7)$$

Jeśli wielkość mierzona jest sumą dwóch wielkości:
 $z = x + y$ to wynik reprezentowany jest przedziałem:

$$[\tilde{x} - \Delta x_{max}, \tilde{x} + \Delta x_{max}] + [\tilde{y} - \Delta y_{max}, \tilde{y} + \Delta y_{max}] = \quad (8)$$

$$= [\tilde{x} + \tilde{y} - (\Delta x_{max} + \Delta y_{max}), \tilde{x} + \tilde{y} + \Delta x_{max} + \Delta y_{max}] \quad (9)$$

gdzie Δx i Δy są błędami granicznymi wielkości x i y , a \tilde{x} i \tilde{y} , wynikami pomiarów, tak więc:

$$\Delta z_{max} = \Delta x_{max} + \Delta y_{max} \text{ oraz:} \quad (10)$$

$$\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y} \quad (11)$$

wzór powyższy opisuje propagację błędu granicznego.

ALE

„Przewodnik” (GUM) zaleca, aby w każdym przypadku stosować model probabilistyczny.

Metody wyznaczania niepewności – dwa algorytmy

GUM wyróżnia dwie metody wyznaczania niepewności:

- A. metoda A oparta o metody statystyczne serii danych czyli korzystając z rozkładu *textita*-posteriori
- B. metoda B wykorzystująca inne niż statystyczne metody w celu wyznaczenia rozkładu *a-priori*.

Metoda **statystyczna** polega na analizie statystycznej serii pomiarów

Metoda **niestatystyczna** – polega na ustaleniu rozkładu prawdopodobieństwa *a-priori* opisujące możliwe rodzaje błędów na podstawie:

analiza systemu pomiarowego i oceny składowych systematycznych (nielosowych) i przypadkowych wynikających z:

budowy przyrządu, dokładności wzorcowania, oddziaływań środowiska (zakłóceń), doprowadzenia mierzonej wielkości do przyrządu, wpływu przyrządu na obiekt, modelu obiektu mierzonego.

Metoda statystyczna oceny niepewności

$\{x_i\}_{i=1}^N$ seria N danych pomiarowych wykonanych jednym przyrządem w warunkach powtarzalności dla tego samego obiektu. Estymator wartości zmierzonej – średnia z próby:

$$x_{sr} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (12)$$

Niepewność standardowa = estymator odchylenia standardowego wartości średniej:

$$u(x) = s(\bar{x}) = s\left(\{x_i\}_{i=1}^N\right) \quad (13)$$

Estymacja niepewności

s estymator odchylenia standardowego:

$$s(x) = s\left(\{x_i\}_{i=1}^N\right) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (14)$$

Odchylenie standardowe średniej:

$$s(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}} s(x) \quad (15)$$

Niepewność standardowa $u(x)$:

$$u(x) = s(\bar{x}) = s\left(\{x_i\}_{i=1}^N\right) = \sqrt{\frac{1}{(N-1)N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (16)$$

Niestatystyczne metody szacowania niepewności

Błąd **systematyczny** – nie zmienia się przy kolejnych pomiarach. Nie znamy błędu i szacujemy niepewność na podstawie analizy działania przyrządu i metod pomiarowych.

Zazwyczaj przyjmujemy, że niepewnością jest **błąd graniczny** – maksymalna wartość błędu jaka wynika z analizy przyrządu (oznaczamy $\Delta_{max}x$ lub w skrócie Δx).

Przedział $[\tilde{x} - \Delta_{max}x, \tilde{x} + \Delta_{max}x]$ interpretujemy jako przedział, w którym na pewno znajduje się wartość prawdziwa (poprawna).

Niestatystyczne metody szacowania niepewności

Błąd **systematyczny** – nie zmienia się przy kolejnych pomiarach. Nie znamy błędu i szacujemy niepewność na podstawie analizy działania przyrządu i metod pomiarowych.

Zazwyczaj przyjmujemy, że niepewnością jest **błąd graniczny** – maksymalna wartość błędu jaka wynika z analizy przyrządu (oznaczamy $\Delta_{max}x$ lub w skrócie Δx).

Przedział $[\tilde{x} - \Delta_{max}x, \tilde{x} + \Delta_{max}x]$ interpretujemy jako przedział, w którym na pewno znajduje się wartość prawdziwa (poprawna).

zazwyczaj będziemy pomijać oznaczenie *max* i przedział będziemy oznaczać: $[\tilde{x} - \Delta x, \tilde{x} + \Delta x]$. Jeżeli szukana wielkość x_0 :

$$x_0 \in [\tilde{x} - \Delta x, \tilde{x} + \Delta x] \Leftrightarrow x_0 = \tilde{x} \pm \Delta x \quad (17)$$

gdzie \tilde{x} – wartość zmierzona.

Przykład mierzymy długość miarka z podziałką milimetrową, zazwyczaj przyjmujemy niepewność $1mm$.

niepewność złożona (całkowita)

Błąd całkowity jest sumą składowych:

$$\Delta x = \Delta x_A + \Delta x_B \quad (18)$$

całkowite odchylenie standardowe:

$$\sigma^2(\Delta x) = \sigma^2(\Delta x_A) + \sigma^2(\Delta x_B) \quad (19)$$

odchylenie standardowe składowej typu B

Jeśli błąd maksymalny wynosi Δx_m to przy założeniu, że składowa ta ma rozkład jednostajny:

$$\sigma(\Delta x_B) = \frac{\Delta x_m}{\sqrt{3}} \quad (20)$$

niepewność złożona (całkowita)

$$u_p(X) = \sigma(\Delta x) = \sqrt{(s(\bar{x}))^2 + \frac{1}{3}(\Delta x)^2} \quad (21)$$

Niepewność rozszerzona złożona

Niepewność złożona (całkowita) rozszerzona dla prawdopodobieństwa p :

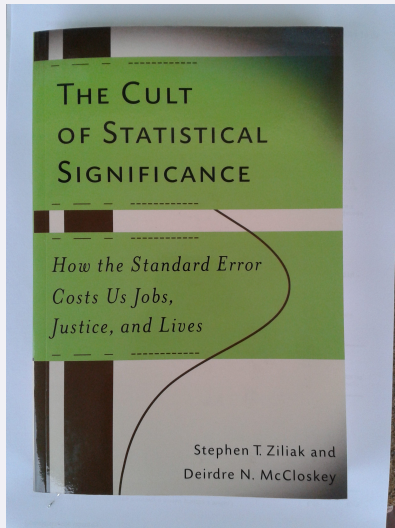
$$U_p(X) = K_p \sqrt{(s(\bar{x}))^2 + \frac{1}{3} (\Delta x)^2} \quad (22)$$

gdzie $K_{0,95} = 2.0$, ($p = 0,95$).

Δx składowa systematyczna (aparaturowa) niepewności przyrządu.

$s(\bar{x})$ – estymator odchylenia standardowego wartości średniej z danych pomiarowych.

Rozpoznanie statystyczne, test hipotez



Waga - komparator ciężaru i sprawiedliwości



Sprawiedliwość -czy ślepa Temida?

Sprawiedliwość - Poczucie słuszności.

Jeśli założymy, że:

- 1 procesy społeczne są opisywalne procesem stochastycznym
- 2 poczucie sprawiedliwości (poczucie słuszności) można opisać wartością oczekiwaną procesu stochastycznego

to

Sprawiedliwość - czy ślepa Temida?

Sprawiedliwość - Poczucie słuszności.

Jeśli założymy, że:

- 1 procesy społeczne są opisywalne procesem stochastycznym
- 2 poczucie sprawiedliwości (poczucie słuszności) można opisać wartością oczekiwaną procesu stochastycznego

to społeczny proces sprawiedliwy musi być **martyngałem**

Definicja: martyngał proces stochastyczny (ciąg zmiennych losowych), w którym warunkowa wartość oczekiwana zmiennej w momencie t , gdy znamy wartości do jakiegoś wcześniejszego momentu s , jest równa wartości w momencie s .

Czyli ciąg Y_n jest martyngałem w stosunku do ciągu X_n jeśli dla wszystkich n spełnia warunki:

$$\mathbb{E}|Y_n| < \infty \text{ oraz } \mathbb{E}(Y_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = Y_n \quad (23)$$

Sprawiedliwość - problemy

- 1 Czy zmienna losowa opisująca proces społeczny może być addytywna, czyli czy wartość oczekiwana jest statystyką adekwatną?
- 2 Czy miara addytywność miary probabilistycznej odzwierciedla wartościowanie ludzi?

propozycja:

- 1 Nie ma addytywności, potrzebne są statystyki pozycyjne, zamiast średniej mediana (środek jest rozumiany intuicyjnie)
- 2 reguła wyboru lepszego zazwyczaj opiera się na normie max, czyli miarach maksymalnych

Miara Π jest maksymalna jeśli

$$\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)) \quad (24)$$

zamiast probabilistyki niezbędne są zbiory rozmyte.

Ćwiczenie 1A - testowanie hipotez i analiza niepewności

Przebieg ćwiczenia:

- 1 pomiar czasu spadania zakrętki (100 pomiarów)
- 2 pomiar właściwości refleksu
- 3 pomiar średnicy pręta lub długości przedmiotu suwmiarką (30 pomiarów) i mikrometrem (100 pomiarów).

obliczenia:

- 1 średnia i estymator odchylenia standardowego
- 2 przedział ufności
- 3 niepewność
- 4 porównanie czasu lotu z teorią
- 5 test hipotezy dotyczący rozkładu
 - normalny
 - Weibulla
 - jednostajny

Weryfikacja hipotez statystycznych

Hipoteza – model teoretyczny zjawiska,

Weryfikacja hipotezy – badanie zgodności modelu zjawiska z danymi empirycznymi.

Metoda statystyczna weryfikacji hipotezy

Hipoteza: H_0 i $P(A|H_0)$ – prawdopodobieństwo tego, że uzyskamy wynik obserwacji A jeśli prawdziwa jest hipoteza H_0 .

Kryterium odrzucenia hipotezy $P(A|H_0)$ jest zbyt małe.

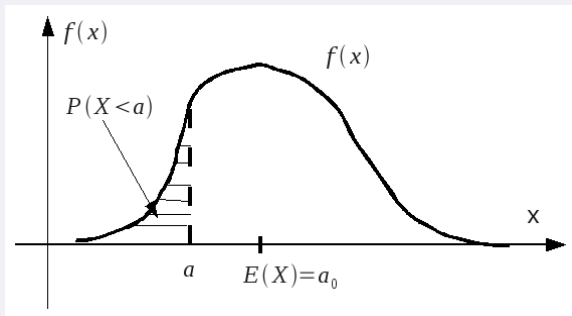
Typowe hipotezy H_0 :

- 1 wartość oczekiwana jest równa pewnej liczbie a ,
- 2 dwa obiekty a i b dla których wykonano pomiary $\{a_i\}_{i=1}^{N_a}$ i $\{b_j\}_{j=1}^{N_b}$ charakteryzują się różnymi wartościami oczekiwanymi.
- 3 empiryczny rozkład statystyczny jest zgodny z hipotezą f .

Konstrukcja testu hipotezy:

Zakładamy hipotezę, ustalamy wielkości obserwowalne (statystykę), wyliczamy $P(A|H_0)$

Hipoteza: czy wartość oczekiwana jest równa a czyli:
 $H_0 : E(X) = a$. Wynik obserwacji: dane pomiarowe $\{x_i\}_{i=1}^N$.



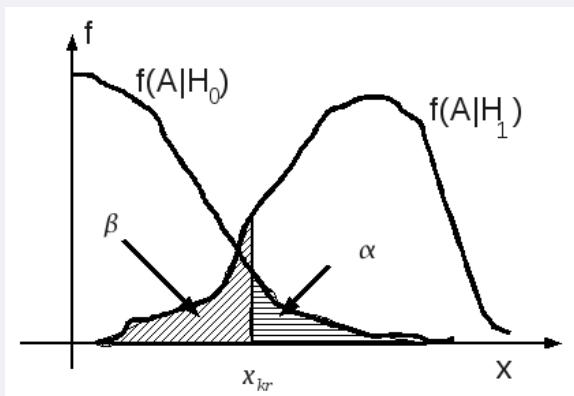
Jeśli prawdopodobieństwo $P(X < a)$ jest małe (mniejsze od α) to mamy powód odrzucenia hipotezy.

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx < \alpha \quad (25)$$

Zazwyczaj $\alpha = 0,05$

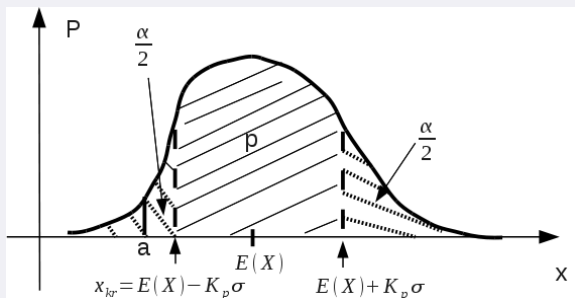
Moc testu, błąd drugiego rodzaju

$\alpha = P(A|H_0)$ - poziom istotności testu: prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy gdy H_0 prawdziwa H_0 jeśli jest prawdziwa



$\beta = 1 - P(A|H_1)$ - moc testu: prawdopodobieństwo nieodrzućenia hipotezy zerowej gdy jest fałszywa (gdy prawdziwa jest alternatywna).

Jak policzyć test z danych doświadczalnych.



Przedział ufności

$$P(E(X) - K_p \sigma(X) < X < E(X) + K_p \sigma(X)) = p \quad (26)$$

jeśli wynik pomiaru $a - E(X) - K_p \sigma(X) > a$ to hipotezę $E(X)$ odrzucamy.

gdzie: $p = 1 - \alpha$, wartość oczekiwana $E(X)$ i odchylenie standardowe zastępujemy estymatorami. K_p współczynnik zależny od rozkładu prawdopodobieństwa.

test chi-kwadrat

Test chi-kwadrat hipotezy o rozkładzie statystycznym.
Miarą różnicy pomiędzy danymi eksperymentalnymi $\{x_i\}$ a rozkładem hipotetycznym p_i jest:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - Np_k)^2}{Np_k} = N \sum_{k=1}^K \frac{(f_k - p_k)^2}{p_k} \quad (27)$$

n_k –liczba wystąpień wyników z k -tego przedziału.

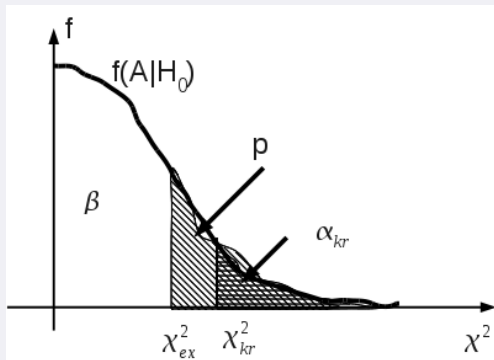
$N = \sum_{k=1}^K n_k$ –ilość prób. $f_k = \frac{n_k}{N}$ –zaobserwowana częstość.

UWAGA

Jeśli $n_k > 10$ to można założyć, że n_k ma rozkład normalny i wtedy χ^2 ma rozkład χ^2 .

p-value:

$$p = P(\chi^2 < \chi_{ex}^2) = \int_{\chi^2=-\infty}^{\chi_{ex}^2} f(\chi^2) d\chi^2 \quad (28)$$



Dane doświadczalne: $x_{i=1}^N = (x_1, \dots, x_N)$, porządkujemy i dzielimy na przedziały o podobnej liczebności (niekoniecznie takiej samej szerokości):

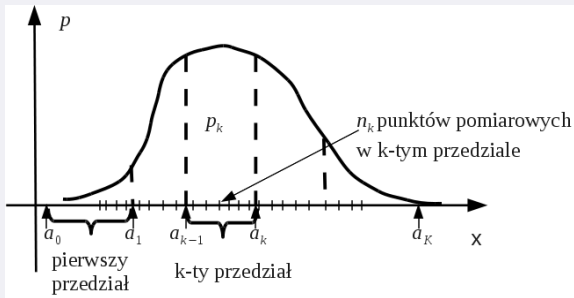
W każdy przedziale powinno być przynajmniej 10 punktów (aby rozkład zmiennej n_k był zbliżony do normalnego).

n_k ma rozkład dwumianowy.

granice przedziałów oznaczmy a_k , czyli k -ty przedział ma postać: $[a_{k-1}, a_k]$.

W k -tym przedziale jest n_k danych.

Do statystyki chi-kwadrat musimy wstawić liczbę n_k punktów pomiarowych w przedziale k -tym, oraz prawdopodobieństwo p_k znalezienia wyniku w tym przedziale policzone dla rozkładu prawdopodobieństwa hipotetycznego f .



p_k – prawdopodobieństwo tego, że wynik jest w przedziale k -tym $[a_{k-1}, a_k]$:

$$p_k = P(a_{k-1} < X < a_k) = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx = F(a_k) - F(a_{k-1}) \quad (29)$$

F dystrybuanta dana w tablicach lub programach komputerowych

Wyznaczenie parametrów rozkładu

- ❶ rozkład jednostajny - krańce a_1 i a_2 : dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{gdy } x \in [a_1, a_2] \\ 0 & \text{gdy } x < a_1 \text{ i } x > a_2 \end{cases} \quad (30)$$

- ❷ rozkład normalny - wartość oczekiwana m i odchylenie standardowe σ :

$$f(x) = C \exp -\frac{(x - m)^2}{2\sigma} \quad (31)$$

- ❸ rozkład Weibulla dwa parametry λ i k :

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad (32)$$

Estymatory parametrów

Dane pomiarowe x_1, \dots, x_N , estymatory mają postać

- 1 krańce rozkładu - $\min(x_1, \dots, x_N)$ i $\max(x_1, \dots, x_N)$
- 2 wartość oczekiwana - $m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$, odchylenie standardowe:

$$s^2(x) = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{n=1}^N (x_n - m)^2$$

- 3 parametry rozkładu Weibulla - estymacja parametrów dystrybuanty

Estymator dystrybuanty $\tilde{F}(x)$ ma postać:

$$\tilde{F}(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{N} \quad (33)$$

gdzie $\#(x_i \leq x)$ liczna wyników pomiarów x_i (dla $i=1, \dots, N$) które są mniejsze od x .

Weibulla. Rozkład Weibulla opisany jest dystrybuantą:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad (34)$$

gdzie λ i k są parametrami rozkładu. W celu wyznaczenia parametrów rozkładu Weibulla należy wykreślić empiryczną dystrybuantę w następującym układzie współrzędnych: na osi pionowej

$y = \ln(-\ln(1 - F(x)))$, a na osi poziomej $z = \ln x$. Zależność (34) w nowych współrzędnych „ y w funkcji z ” ma postać funkcji liniowej: $y = kz - k \ln \lambda$. Jeśli tą funkcję zapiszemy jako $y = az + b$, to współczynniki są równe $a = k$ i $b = -k \ln \lambda$. Wykonać należy taki wykres dla empirycznej dystrybuanty \tilde{F} wg. wzoru na dystrybuantę empiryczną i metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć nachylenie a i współczynnik stały b . Parametry rozkładu wyliczamy jako:

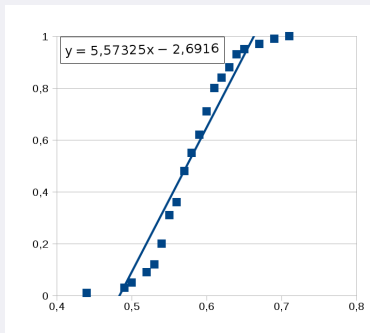
$$k = a \text{ i } \lambda = e^{-\frac{b}{a}}.$$

wyznaczenie parametrów rozkładu jednostajnego

Wykreślamy dystrybuantę i metoda najmniejszych kwadratów ustalamy parametry a i b równania liniowego:

$$F = ax + b \quad (35)$$

gdzie: $a = \frac{1}{a_2 - a_1}$ i $b = \frac{a_2}{a_1 - a_1}$



Rysunek: Dystrybuanta empiryczna pomiaru czasu

Ćwiczenie 1–Metody pomiarowe i opracowywanie danych doświadczalnych.

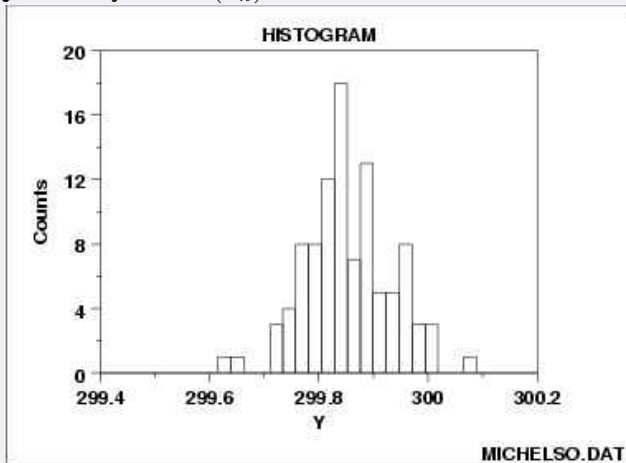
Ćwiczenie ma następujące części:

- 1 Pomiar rezystancji i sprawdzanie prawa Ohma, metoda najmniejszych kwadratów.
- 2 Pomiar średnicy pręta. Wyznaczanie niepewności całkowitej. Histogram.
- 3 Pomiar czasu spadania małego ciała i badanie rozkładu (test hipotezy i metoda chi-kwadrat)
Wykonać $N = 30$ pomiarów średnicy pręta w różnych miejscach.

Histogram

Wykonujemy eksperyment N razy

Histogram - rozkład częstości występowania zjawiska:
jest to wykres: $n(x_k)$



Prawdopodobieństwo empiryczne:

Prawo Ohma: liniowy związek $I = \frac{U}{R}$.

napięcie elektryczne U – bodziec wymuszający przepływ prądu I .
Natężenie prądu elektrycznego – przepływ wymuszony napięciem elektrycznym.

Należy szukać ogólnej postaci równania $I = aU + I_0$

lub

$$U = aI + U_0$$

Fizyka prawa Ohma

Ładunki poruszają się w ośrodku lepkiem – lepkość – zderzenia z siecią krystaliczną. Siły działające na ładunek:

$$\vec{F} = \vec{F}_{pole} + \vec{F}_{zderzenia} = q\vec{E} + \gamma\vec{v}$$

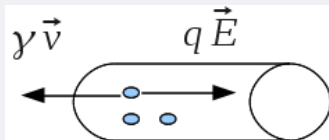
Wypadkowa siła równa jest zeru:

$$q\vec{E} + \gamma\vec{v} = 0$$

$$v = \frac{q}{\gamma}E = \mu E$$

gdzie μ - ruchliwość. Prędkość jest proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego - jest to liniowość wynikająca ze zderzeń z siecią krystaliczną.

Zderzenia z siecią - energia kinetyczna ładunków zamienia się w ciepło.



Prąd elektryczny - ruch ładunków

natężenie prądu: $I = \frac{dq}{dt}$

$$dq = enAdl = enAvdt$$

prąd $I = enAvdt$

gęstość prądu

$$j = \frac{I}{A} = env = en\mu E$$

zapisujemy to jako:

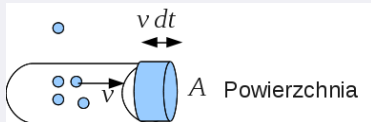
$$j = \sigma E \quad (37)$$

gdzie $\sigma = en\mu$ - przewodność

właściwa. Napięcie: $U = \frac{W}{q}$

$$\text{czyli } U = \frac{Fl}{q} = \frac{Eqql}{q} = El$$

$$\text{ogólnie } U_{A,B} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$



ponieważ $I = Aj = A\sigma E$ a $E = \frac{U}{l}$ to:

$$I = \frac{A\sigma}{l} U \quad (38)$$

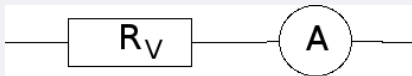
jest to prawo Ohma, gdzie

$$\frac{1}{R} = \frac{A\sigma}{l}.$$

Schemat woltomierza

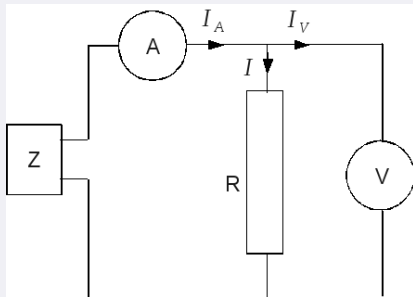
Jeśli amperomierz jest na zakres I_z to aby zbudować woltomierz na zakres U_z musimy użyć opornika:

$$R_V = \frac{U_z}{I_z} = U_z \frac{1}{I_z} \quad (39)$$



Człon $\frac{1}{I_z}$ jest rezystancją na jeden volt.

Pomiar rezystancji małych (w stosunku do rezystancji woltomierza)



$$I_A = I + I_V \quad (40)$$

Zmierzona wartość $\tilde{R} = \frac{U}{I_A}$, wartość mierzona $R = \frac{U}{I}$.

$$\text{Czyli: } \Delta R = \tilde{R} - R = \frac{U}{I + I_V} - R = \frac{U}{I + \frac{U}{R_V}} - R = -\frac{R^2}{R + R_V}$$

POMIARY

Wykonujemy pomiary:

- amperomierzem cyfrowym
- woltomierzem analogowym

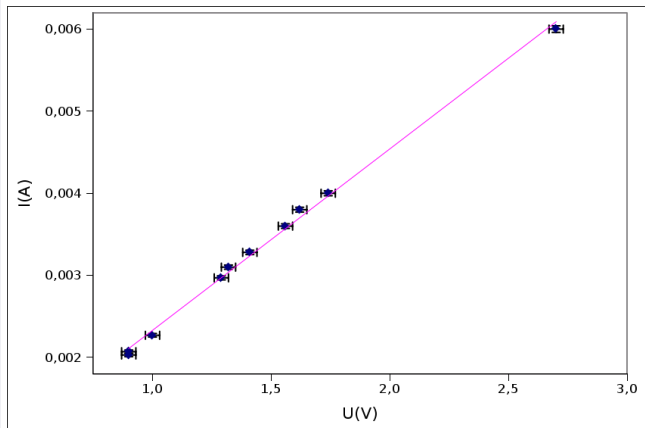
dla trzech zakresów woltomierza analogowego: 1V, 3V, 10V,.
dla każdego zakresu woltomierza dane dobrać tak aby:

- 1 najmniejsza wartość napięcia nie była mniejsza od $\frac{1}{3}$ zakresu, np. dla zakresu woltomierza analogowego na zakresie 10V należy wykonać pomiary dla napięć z przedziału $[3V - 10V]$
- 2 zakres pomiarowy amperomierza należy tak dobrać aby nie zachodziła potrzeba zmieniania zakresu amperomierza dla serii pomiarów wykonanych w jednym zakresie woltomierza.

Powinniśmy uzyskać trzy serie pomiarów, dane w każdej serii wykonane są bez zmiany zakresu woltomierza i amperomierza.

Cały czas kontrolować czy prąd nie jest za duży i czy wskazania nie „skaczą”.

Przykład pomiarów



Dla wszystkich obliczeń rezystancji wyznaczyć niepewność:

- a) metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć:
 - i) wyznaczyć parametry prostej (nachylenie i punkt początkowy),
 - ii) odchylenia standardowe $s(a)$ współczynnika nachylenia i $s(b)$ stałej.
- b) metodą niestatystyczną na podstawie zastosowania wzoru $R=U/I$ przy maksymalnej wartości napięcia dla danego zakresu (danej serii) - określić niepewność złożoną wynikająca z błędów aparaturowych
- c) obliczyć błąd spowodowany prądem woltomierza.

Porównać wyniki rezystancji uzyskane z każdej serii i dwoma metodami i określić czy „efekt dekadowy” jest mniejszy od niepewności aparaturowych.

Metoda najmniejszych kwadratów

dla zależności $I = a U + I_0$ wyznaczyć parametry metodą najmniejszych kwadratów.

Wykonujemy dla każdego zakresu (jak i dla danych łącznych) obliczenia:

- 1 współczynnik nachylenia a i stałą I_0
- 2 odchylenia standardowe powyższych parametrów $s(a)$ i $s(b)$.
- 3 niepewności rezystancji.

$$\text{Rezystancja } R = \frac{1}{a},$$

błąd rezystancji wynikający z błędu współczynnika a :

$$\Delta R = -\frac{1}{a^2} \Delta a,$$

$$\text{niepewność rezystancji } u(R) = \frac{1}{a^2} s(a)$$

Składowa aparaturowa rezystancji

Dla każdego z zakresów wyznaczyć rezystancję na podstawie jednego pomiaru dla największych wartości napięcia i natężenia prądu:

$$R = \frac{U}{I} \quad (41)$$

Niepewność tak wyznaczone rezystancji można oszacować jedynie metodą **B** czyli określając składową aparaturową u_B (instrumentalną) niepewności pochodząca od błędów przyrządów:

$$u_B(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \frac{\Delta^2 I}{3} + \left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 \frac{\Delta^2 U}{3}} \quad (42)$$

gdzie: ΔU i ΔI - błędy graniczne wyznaczone z danych przyrządu. Porównać odchylenie standardowe nachyleń uzyskanych dla każdej serii z niepewnością opisującą błędy aparaturowe.

Wyznaczanie niepewności na podstawie danych producenta

Przyrządy analogowe

Dla przyrządów analogowych podana jest **klasa niepewności** γ_K , niepewność wyznaczamy jako:

$$\Delta x = \gamma_K x_z \quad (43)$$

gdzie x_z jest zakresem pomiarowym przyrządu wykorzystywanym w danym pomiarze.

Klasa określana jest w procentach i opisuje niepewność względem zakresu pomiarowego.

Przyrządy cyfrowe

Dla przyrządów cyfrowych określa się dwa parametry opisujące niepewność: składową addytywną Δx_a i multiplikatywną (niepewność względną γ).

$$\Delta x = \gamma x + \Delta x_a \quad (44)$$

gdzie x – wynik pomiaru, γ – niepewność względna (zazwyczaj w procentach), Δx_a – składowa addytywna niepewności.

błąd spowodowany prądem woltomierza:

$$\Delta R = \frac{R^2}{R_V} \quad (45)$$

gdzie: R – zmierzona rezystancja, R_V rezystancja woltomierza.
Wyprowadzić ten wzór.

Dla woltomierza analogowego podana jest rezystancja wewnętrzna poprzez $k\Omega/V$

Przykład: jeśli miernik ma $20k\Omega/V$ to na zakresie $10V$ rezystancja wynosi $200k\Omega$.

Wynika to z tego, że woltomierz jest amperomierzem (mikroamperomierzem) połączonym szeregowo z rezystorem wyskalowanym wg prawa Ohma.

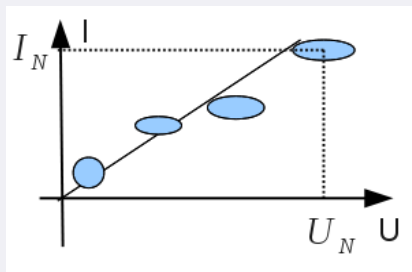
Woltomierz cyfrowy ma $10M\Omega$ niezależnie od zakresu.

OBLICZENIA DLA KAŻDEJ SERII (3 serie)

- 1 wyznaczyć nachylenie metodą najmniejszych kwadratów i z tego wyliczyć rezystancję
- 2 określić niepewność nachylenia na podstawie estymatora odchylenia standardowego s_a dla współczynnika nachylenia. Niepewność $u(a) = s_a$
- 3 Wyznaczyć rezystancję z danych o najwyższym prądzie i wyznaczyć niepewność różniczka zupełną.
- 4 określić błąd spowodowany rezystancją woltomierza.
 $\Delta_R = \frac{R^2}{R_V}$, gdzie R - zmierzona rezystancja, R_V rezystancja woltomierza.

Porównać wszystkie uzyskane nachylenia i ich niepewności.
We wnioskach opisać przyczyny różnic niepewności i wartości rezystancji.

Wyznaczanie rezystancji z jednego punktu pomiarowego



Rysunek: Wykres pomiarowy, punkty są elipsami. Pomiary bez zmiany zakresu przyrządów. Rozrzut punktów spowodowany rezystancją styków.

Rezystancja z najlepszego pomiaru: $R_N = \frac{U_N}{I_N}$

Niepewność rezystancji

$$R = \frac{U}{I} \text{ więc: } \frac{dR}{dI} = -\frac{U}{I} \text{ i } \frac{dR}{dU} = \frac{1}{I}$$

Niepewność rozszerzona składowej systematycznej pochodzącej od przyrządu:

$$u_B(R) = \sigma(R_s) = \sqrt{\left(\frac{dR}{dI}\right)^2 \frac{\Delta^2 I}{3} + \left(\frac{dR}{dU}\right)^2 \frac{\Delta^2 U}{3}} \quad (46)$$

gdzie: ΔU i ΔI wyznacza się z danych przyrządu.

Całkowitą niepewność wynika ze wzoru na składanie niepewności:

$$u(R) = \sqrt{(s(\bar{R}))^2 + u_B(R)^2} \quad (47)$$

\bar{R} wartość średnia serii pomiarowej. $s(\bar{R})$ odchylenie standardowe wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów.

Przedyskutować czy trzeba uwzględniać błąd spowodowany woltomierzem.

Zrobić tabelę:

<i>nr</i>	wielkość	<i>serial1</i>	<i>serial2</i>	...	całość
1	rezystancja z MNK
2	niepewność rezystancji z MNK
3	rezystancja $R=U/I$
4	niepewność aparaturowa
5	niepewność od rezystancji woltomierza
6	niepewność całkowita, złożona

- 1 porównać składowe niepewności (opisane powyżej dla różnych źródeł błędów) dla wszystkich zmierzonych zakresów (serii pomiarowych) i określić czynnik dominujący.
- 2 Pokazać na czym polega efekt dekadowy (zmiana wyznaczonej rezystancji przy zmianie zakresu), podać różnice wyznaczonych rezystancji dla różnych zakresów.
- 3 Sprawdzić czy różnice wartości rezystancji uzyskane dla poszczególnych zakresów mieszczą się w granicach błędów granicznych aparaturowych.

METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Badane zjawisko (obiekt) opisane jest równaniem

$$y = f(x) \quad (48)$$

W wyniku pomiarów mamy serię danych $\{x_i, y_i\}_{i=1}^N$
Zadaniem jest znaleźć funkcję najlepiej pasującą do danych doświadczalnych.

Mamy dwa zagadnienia:

- 1 dobór rodziny funkcji,
- 2 określenie kryterium dopasowania.

Kryteria dopasowania

Kryterium dopasowania jest minimalizacja miary I różnicy pomiędzy danymi doświadczalnymi a funkcją opisana wzorem.

Celem jest taki dobór parametrów opisujących funkcję, dla których miara różnicy pomiędzy danymi doświadczalnymi a równaniem funkcji jest jak najmniejsza.

Przykładem miary najczęściej stosowanej jest suma różnic kwadratów:

$$I(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^N (y_i - f_{a,b,c}(x))^2 \quad (49)$$

Szukamy takich parametrów a, b, c dla których ta zależność jest minimalna.

Używa się też sumy kwadratów ale z wagami zależnymi od niepewności pomiarów.

przykład, dopasowanie parametrów prostej

$$f(x) = ax + b \text{ do danych } \{x_i, y_i\}_{i=1}^N$$

gdy niepewności pomiarowe wszystkich punktów są takie same
szukamy minimum:

$$I(a) = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (50)$$

otrzymujemy:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{n \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} \quad (51)$$

$$b = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i \right) = \bar{y} - a\bar{x} \quad (52)$$

Wzory na a i b można zapisać następująco:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (53)$$

oraz:

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (54)$$

gdzie:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (55)$$

odchylenie standardowe zmiennej a :

$$\sigma^2(a) = \frac{\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \right)^2 \sigma^2(Y)}{\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} = \frac{\sigma^2(Y)}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (56)$$

Model pomiaru, mamy dane pomiarowe $\{x_i, y_i\}_{i=1}^N$, każdy pomiar zmiennej Y obarczony jest błędem przypadkowym ε :

$$Y = f(X) + \varepsilon = aX + b + \varepsilon \quad (57)$$

ε - zmienna losowa opisująca błąd wyznaczenia wartości y .

Odchylenie standardowe $\sigma(Y) = \sigma(\varepsilon)$

Zmienna ε w każdym doświadczeniu ma realizację ε_i :

$$y_i = ax_i + b + \varepsilon_i \quad (58)$$

estymator wariancji $s(y)$:

$$s^2(y) = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (59)$$

estymatory odchylenia standardowego:

$$s_a = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N-2} \frac{1}{\Delta}} \text{ oraz } s_b = s_a \sqrt{\frac{S_{xx}}{N}} \quad (60)$$

gdzie: $\Delta = NS_{xx} - (S_x)^2$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^N x_i^2$, $S_x = \sum_{i=1}^N x_i$,

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^N y_i^2, \quad S_y = \sum_{i=1}^N y_i$$

oraz suma kwadratów błędów: $\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - by)^2$

wzory na a i b : $a = \frac{1}{\Delta} \left(NS_{xx} - (S_x)^2 \right)$ i $b = \frac{1}{\Delta} (S_y S_{xx} - S_x S_{xy})$

UFFFF

UFFFF

To by było na tyle

UFFFF

To by było na tyle

bo więcej się nie zmieściło