

# KWANTOWA TEORIA POMIARU

dr hab. inż. Michał K. Urbański, prof. uczelni  
Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej

- 1 Teoria fizyczna
  - Opis stanu
  - obserwacja - pomiar
  - równania ruchu
- 2 Wektory
- 3 Operatory
- 4 Model pomiaru
  - operacja rzutowania
  - twierdzenie spektralne
  - prawdopodobieństwo kwantowe
  - wartości średnie
  - zasada nieoznaczoności
- 5 Równanie Schrödingera
- 6 Zasada holograficzna

# Opis świata

Składowe opisu:

- 1 stan obiektów - model matematyczny
- 2 metoda obserwacji
- 3 dynamika - zależność czasowa

## stan obiektów rzeczywistości

Stany obiektów - wektory w jakiejś przestrzeni stanów, różne oznaczenia  $\Psi = |\Psi\rangle = \vec{\Psi} = \overline{\Psi}$  będziemy używali  $|\Psi\rangle$

## Pomiar - obserwacja

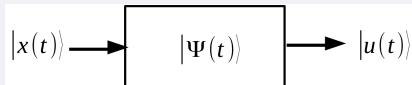
K) pomiar klasyczny - jest to co widać, obserwacja:

- nie zmienia stanu obiektów,
- jest to co widać (wzrok widzi a nie interpretuje).

Q) pomiar kwantowy - widzimy za pośrednictwem przyrządu:

- obserwujemy poprzez stany przyrządu pomiarowego,
- przyrząd filtruje stany rzeczywistości.

# Dynamika - sterowanie systemem



Rysunek: Stan systemu obserwowanego,  $|x(t)\rangle$  - wejście (bodźce wejściowe),  $|u(t)\rangle$  - wyjście,  $|\Psi(t)\rangle$  - stan wewnętrzny

Ogólna postać równania stanu czyli zależności od czasu  $\Psi(t)$  w przybliżeniu liniowym:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0) |\Psi(0)\rangle + \hat{C} |u(t)\rangle \quad (1)$$

$\hat{U}(t - t_0)$  - operator ewolucji,

$\hat{C}$  - operator oddziaływania wejścia

$t$  - czas (chwila obserwacji),  $t_0$  - moment początkowy względem którego mierzymy czas.

# Operator ewolucji

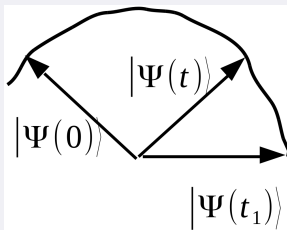
Operator ewolucji ma postać:

$$\hat{U}(t - t_0) = e^{i\frac{S(t-t_0)}{\hbar}} \quad (2)$$

Gdzie:

$S(t - t_0)$  - działanie

$\hbar$  - stała Plancka,  $i = \sqrt{-1}$  - jednostka urojona

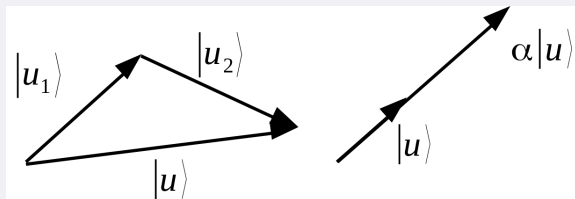


linia ewolucji pokazuje kolejne stany układu.

# Wektor - podstawowe własności

Wektor ma zdefiniowane następujące własności:

- 1 dodawanie  $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}$  (inaczej  $|u_1\rangle + |u_2\rangle = |u\rangle$ )
- 2 mnożenie przez liczbę  $\alpha \vec{u}_1 = \vec{u}$ ,  
 $\alpha$  - liczba rzeczywista lub zespolona.
- 3 iloczyn skalarny dwóch wektorów  $u$  i  $v$ :  $\langle u|v\rangle = \alpha$



# wektory - podstawowe aksjomaty

WEKTORY oznacza się  $\bar{a}$  lub  $\vec{a}$  lub w notacji Diraca  $|a\rangle$ .

Przestrzeń wektorowa  $\mathbb{V}$  nad ciałem algebraiczny  $\mathbb{C}$  zdefiniowana jest przez właściwości:

dla każdego  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in \mathbb{V}$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  zachodzi:

❶ dodawanie (przemienne i łączne):  $|a\rangle + |b\rangle = |c\rangle$

❷ mnożenie przez liczbę:  $\alpha |a\rangle = |b\rangle$

❸ liniowość dodawania:

$$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha |a\rangle + \alpha |b\rangle$$

$$(\alpha + \beta) |a\rangle = \alpha |a\rangle + \beta |a\rangle$$

❹ iloczyn skalarny – liniowy funkcjonał dwóch zmiennych  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ :

$$\mathbb{V}^* \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}:$$

$$\langle (\langle a |) | (| b \rangle) \rangle = \langle a | b \rangle \in \mathbb{C},$$

właściwości iloczynu skalarnego:

- zamiana kolejności - sprzężenie:  $\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle^*$
- mnożenie przez liczbę:  $\langle a | \alpha (| b \rangle) \rangle = \alpha \langle a | b \rangle$
- dodawanie:  $\langle c | (| a \rangle + | b \rangle) \rangle = \langle c | a \rangle + \langle c | b \rangle$

Zbiór wektorów  $|e_n\rangle \in \mathbb{V}$  gdzie  $n \in \mathbb{N}$  nazywamy bazą przestrzeni wektorowej  $\mathbb{V}$ , jeśli każdy wektor  $|a\rangle \in \mathbb{V}$  można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów bazowych:

$$|a\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle \quad (3)$$

Jeśli  $\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{n,m}$ , gdzie  $\delta_{n,m}$  jest deltą Kroneckera to baza jest ortonormalna. W bazie ortonormalnej:

$\langle (a_n | e_n) | (b_m | e_m) \rangle = a_n^* b_m \langle e_n | e_m \rangle \delta_{n,m}$  więc:

$$\begin{aligned} \langle a | b \rangle &= \left\langle \left( \sum_n a_n |e_n\rangle \right) \middle| \left( \sum_m b_m |e_m\rangle \right) \right\rangle = \\ &= \sum_n \sum_m a_n^* b_m \langle e_n | e_m \rangle = \sum_n \sum_m a_n^* b_m \delta_{n,m} = \sum_n a_n^* b_n \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie  $a^*$  liczba zespolona sprzężona do  $a$ .



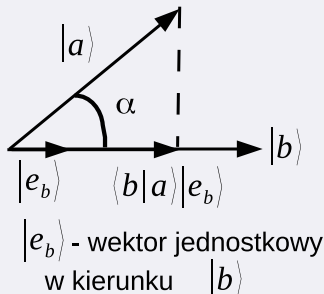
# ILOCZYN SKALARNY

w postaci macierzowej:

$$\langle a|b\rangle = [a_1^* \quad \dots \quad a_n^*] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_n a_n^* b_n \quad (5)$$

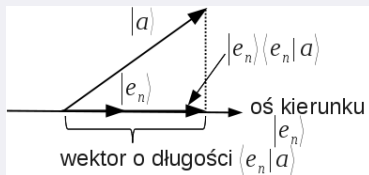
macierz kolumnowa to wektor a pozioma to kowektor.

Iloczyn skalarny wyznacza długość rzutu:  
 $\langle a|b\rangle = a_b \|b\|$ , gdzie:  
 $a_b$  jest to długość rzutu wektora  $|a\rangle$  w kierunku wyznaczonym przez wektor  $|b\rangle$ ,  
 $\|b\|$  długość wektora  $|b\rangle$ ,  
długość wektora zgodna jest z iloczynem skalarnym:  $\|b\|^2 = \langle b|b\rangle$



# ILOCZYN SKALARNY - operator rzutowania

Iloczyn skalarny - zadaje rzut wektora  $|a\rangle$  na kierunek  $|e_n\rangle$ :  
 $|a_n\rangle = \langle e_n|a\rangle |e_n\rangle = |e_n\rangle \langle e_n|a\rangle$   
Wektor  $|a_n\rangle$  ma długość  
 $a_n = \langle e_n|a\rangle$



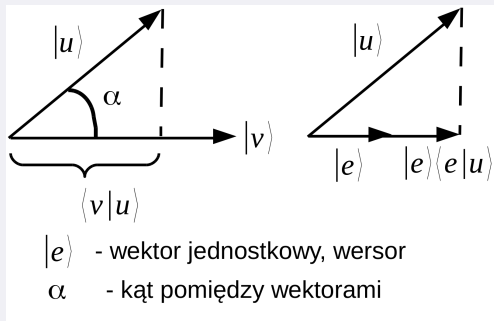
Rysunek: Rzut wektora  $|a\rangle$

Każdy wektor jest kombinacją liniową składowych:

$$|a\rangle = \sum_n |a_n\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle = \sum_n |e_n\rangle a_n = \sum_n |e_n\rangle \langle e_n|a\rangle \quad (6)$$

Gdzie:  $a_n = \langle e_n|a\rangle$   $P_n = |e_n\rangle \langle e_n|$  - operator rzutowania,  
 $\sum_n P_n = \sum_n |e_n\rangle \langle e_n| = \mathbb{I}$ , gdzie  $\mathbb{I}$  - operator jednostkowy.

# Iloczyn skalarny - rzut



Rysunek: iloczyn skalarny i rzut.

iloczyn skalarny - kosinus kąta:

$$\langle u|v\rangle = |u| |v| \cos(\alpha) \quad (7)$$

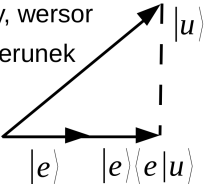
# iloczyn skalarny, długość, rzut

$|e\rangle$  - wektor jednostkowy, wersor  
- wersor zadaje kierunek

$\langle e|e\rangle = 1$

$\hat{P}|u\rangle = |e\rangle\langle e|u\rangle$

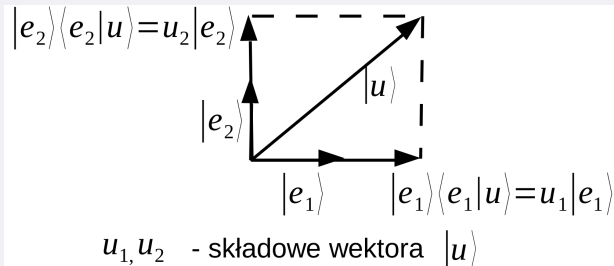
$\hat{P} = |e\rangle\langle e|$  - operator rzutowania



Rysunek: Operator rzutowania

# Baza przestrzeni wektorowej

Aby cokolwiek zaobserwować potrzebny jest układ współrzędnych.



Rysunek: Wektor w układzie współrzędnych

Wektor - suma składowych ( $\vec{u} = (u_1, u_2)$ )

$$|u\rangle = |e_1\rangle \langle e_1|u\rangle + |e_2\rangle \langle e_2|u\rangle = u_1 |e_1\rangle + u_2 |e_2\rangle \quad (8)$$

$$u_1 = \langle e_1|u\rangle \quad \text{oraz} \quad u_2 = \langle e_2|u\rangle \quad (9)$$

# Baza - wiele wymiarów

Założmy, że potrzeba jest  $N$  wektorów bazowych (przestrzeń jest  $N$ -wymiarowa):

$$|u\rangle = \sum_{n=1}^N |e_n\rangle \langle e_n|u\rangle \quad (10)$$

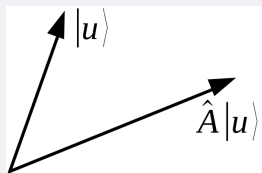
Wzory zapisane poprzednio dla dwóch wymiarów działają dla dowolnej liczby wymiarów (nawet nieskończonych).

# Operatory liniowe

Operator jest to funkcja na wektorach:

$$\hat{A}|u\rangle = |v\rangle \quad (11)$$

W wyniku działania operatora  $\hat{A}$  na wektor  $|u\rangle$  otrzymujemy wektor  $|v\rangle$ .



Liniowość

$$\hat{A}(|u_1\rangle + |u_2\rangle) = \hat{A}(|u_1\rangle) + \hat{A}(|u_2\rangle) \quad (12)$$

$$\hat{A}(\alpha |u_1\rangle) = \alpha \hat{A}(|u_1\rangle) \quad (13)$$

Rysunek: działanie operatora na wektor

# Operatory liniowe, twierdzenie spektralne

Operator liniowy:

- 1  $A(|a\rangle + |b\rangle) = A|a\rangle + A|b\rangle$
- 2  $A(\alpha|a\rangle) = \alpha A|a\rangle$ , gdzie  $\alpha \in \mathbb{C}$

Każdy operator liniowy  $A$  można rozłożyć na składowe:

$$A = \sum_n a_n P_n \quad (14)$$

gdzie  $P_n = |e_n\rangle \langle e_n|$  jest operatorem rzutowania.

Operator  $A$  spełnia zagadnienie własne:

$$A|e_n\rangle = \alpha_n |e_n\rangle \quad (15)$$

podstawiając otrzymujemy:

$$A|e_n\rangle = \sum_m a_m P_m |e_n\rangle = a_n |e_n\rangle \quad (16)$$

ponieważ  $P_m |e_n\rangle = P_n |e_n\rangle \delta_{n,m}$  to z sumy zostaje jeden człon.



# Twierdzenie spektralne

Każdy operator liniowy może być przedstawiony jako kombinacja linowa operatorów rzutowania:

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^N a_n \hat{P}_n \quad (17)$$

gdzie:

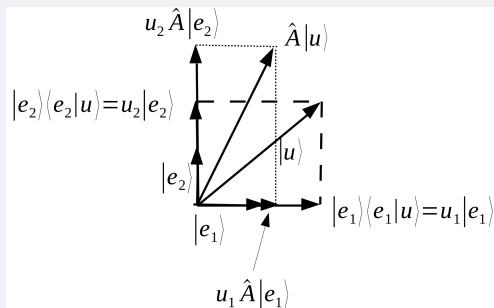
$\hat{P}_n$  - rzuty na wektory  $|e_n\rangle$ ,  $|e_n\rangle$  - stany własne

$a_n$  - współczynniki - wartości własne operatora  $\hat{A}$ .

Stany własne tworzą bazę:

$$\hat{A} |e_n\rangle = a_n |e_n\rangle \quad (18)$$

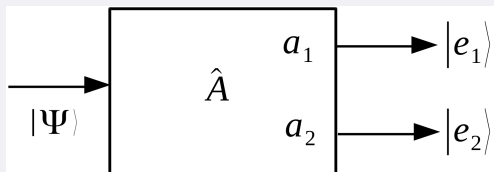
# działanie operatora



Rysunek: Operator działa na składowe

$$\hat{A}|u\rangle = \hat{A} \sum_n u_n |e_n\rangle = \sum_n u_n \hat{A}|e_n\rangle = \sum_n a_n u_n |e_n\rangle \quad (19)$$

pomiar rzutowanie na stany własne przyrządu pomiarowego



Rysunek: Pomiar - rzutowanie na stany własne

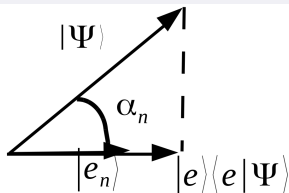
## POSTULAT KWANTOWY

prawdopodobieństwo przejścia w stan własny:

$$p(|\Psi\rangle \rightarrow |e_n\rangle) = \langle u|e_n\rangle \langle e_n|u\rangle = \cos^2(\alpha) \quad (20)$$

Stany  $|\Psi\rangle$  są unormowane:  $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$

# Pomiar kwantowy - rzut



$|e_n\rangle$  - wektor jednostkowy,  
wektor własny operatora pomiaru

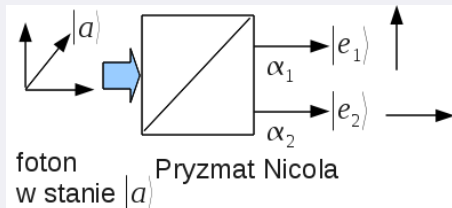
$\alpha_n$  - kąt pomiędzy wektorami

$$p_n = P(|\Psi\rangle \rightarrow |e_n\rangle) = \langle e_n|\Psi\rangle \langle \Psi|e_n\rangle = \cos^2(\alpha_n) \quad (21)$$

Średnia wartości pomiarów wielkości opisanej operatorem  $\hat{A}$  w stanie  $|\Psi\rangle$ :

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n p_n = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \quad (22)$$

# POMIAR KWANTOWY



Rysunek: Pomiar polaryzacji fotonu,  $\alpha_n$  wartość własna stanu  $|e_n\rangle$

Wartość średnia

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \sum_n \alpha_n p_n = \sum_n \alpha_n \langle a | e_n \rangle \langle e_n | a \rangle = \sum_n \langle a | e_n \rangle \alpha_n \langle e_n | a \rangle = \\ &= \sum_n \langle a | \alpha_n P_n | a \rangle = \langle a | \sum_n \alpha_n P_n | a \rangle = \langle a | A | a \rangle\end{aligned}$$

Przyrząd pomiarowy opisany jest operatorem  $A$ :

$$A = \sum_n \alpha_n P_n,$$

gdzie  $P_n = \sum_n |e_n\rangle \langle e_n|$  -

operator rzutu na kierunek  $|e_n\rangle$

**Prawdopodobieństwo zmiany stanu po pomiarze:**

$$p_n = P(|a\rangle \rightarrow |e_n\rangle) = \langle a | e_n \rangle \langle e_n | a \rangle = |\langle e_n | a \rangle|^2$$

Zakładamy że baza jest ortonormalna:

$$\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{n,m} \quad (24)$$

Baza - wektory własne operatora pomiaru:

$$\hat{A} |e_n\rangle = a_n |e_n\rangle \quad (25)$$

Mówimy, że jest to reprezentacja  $\hat{A}$ , np reprezentacja położeniowa.  
Funkcja falowa:

$$\Psi(x) = \langle e_x | \Psi \rangle \quad (26)$$

$\Psi(x)$  -  $x$ -owa składowa wektora  $x$ .

$|e_x\rangle$  - wektor własny pomiaru położenia, opisuje stan w którym cząstka jest dokładnie w punkcie  $x$ .

# Zasada nieoznaczoności

## Pomiar dwóch wielkości

Dwie wielkości reprezentowane operatorami  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$ .

Operator  $\hat{A}$  ma wartości własne  $a_n$  i wektory własne  $|a_n\rangle$ ,

operator  $\hat{B}$  ma wartości własne  $b_n$  i wektory własne  $|b_n\rangle$

## Oznaczenie

wartości własnej  $d$  odpowiada wektor własny  $|d\rangle$

– nawiasy  $| \rangle$  dopisane do wartości własnej oznaczają wektor.

## Twierdzenie

Wektory własne dwóch operatorów  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  są identyczne

( $|a_n\rangle = |b_n\rangle$ ) wtedy i tylko wtedy gdy operatory komutują:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \quad (27)$$

# Od nierówności trójkąta do zasady nieoznaczoności

Nierówność trójkąta dla dwóch wektorów  $|X\rangle$  i  $|Y\rangle$ :

$$|X| + |Y| \geq |X + Y| \quad (28)$$

są to zespolone wektory (elementy przestrzeni Hilberta) więc

$$|X|^2 = \langle X|X \rangle \quad \text{czyli} \quad |X| = \sqrt{\langle X|X \rangle} \quad (29)$$

kwadrat lewej i prawej strony równania (28):

$$(|X| + |Y|)^2 = \langle X|X \rangle + \langle Y|Y \rangle + 2\sqrt{\langle X|X \rangle \langle Y|Y \rangle} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} |X + Y|^2 &= (\langle X| + \langle Y|)(|X\rangle + |Y\rangle) = \\ &= \langle X|X \rangle + \langle Y|Y \rangle + \langle X|Y \rangle + \langle Y|X \rangle \end{aligned}$$

czyli korzystając z (30):  $2\sqrt{\langle X|X \rangle \langle Y|Y \rangle} \geq \langle X|Y \rangle + \langle Y|X \rangle$ .

dla wektorów rzeczywistych  $\langle Y|X \rangle = |X||Y| \cos(\alpha)$  więc

nierówność ta ma postać  $\cos(\alpha) \leq 1$



# Od nierówności trójkąta do zasady nieoznaczoności

$$2\sqrt{\langle X|X\rangle\langle Y|Y\rangle} \geq \langle X|Y\rangle + \langle Y|X\rangle \quad (31)$$

Niech  $A$  i  $B$  operatory samosprężone, wstawiamy:

$$|X\rangle = A|\Psi\rangle \text{ i } |Y\rangle = iB|\Psi\rangle$$

do powyższego równania:

$$\begin{aligned} |X|^2 &= \langle X|X\rangle = \langle\Psi|A^+A|\Psi\rangle = \langle\Psi|A^2|\Psi\rangle \\ |Y|^2 &= \langle Y|Y\rangle = -i^2 \langle\Psi|B^+B|\Psi\rangle = -i^2 \langle\Psi|B^2|\Psi\rangle \\ \langle X|Y\rangle + \langle Y|X\rangle &= i(\langle\Psi|A^+B|\Psi\rangle - \langle\Psi|B^+A|\Psi\rangle) = i\langle\Psi|[A, B]|\Psi\rangle \end{aligned}$$

czyli:

$$-\langle\Psi|A^2|\Psi\rangle\langle\Psi|B^2|\Psi\rangle \geq \langle\Psi|[A, B]|\Psi\rangle \quad (32)$$

# Zasada nieoznaczoności

Pomiar: przejście ze stanu  $|\Psi\rangle$  w stan własny:

- pomiar wielkości  $\hat{A}$ , przejście:  $|\Psi\rangle \rightarrow |a_n\rangle$
- pomiar wielkości  $\hat{B}$ , przejście:  $|\Psi\rangle \rightarrow |b_n\rangle$

Jeśli  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  nie komutują, to wynik pomiaru zależy od kolejności pomiarów.

Miarą błędu jest odchylenie standardowe:

$$\sigma^2(\hat{A}) = \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle \quad (33)$$

gdzie operator błędu  $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$ .

Dla dwóch operatorów otrzymujemy nierówność:

$$\sigma^2(\hat{A})\sigma^2(\hat{B}) = \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq -\frac{1}{4} \left( \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 \quad (34)$$

# Zasada nieoznaczoności, pęd i położenie

Zasada nieoznaczoności wyrażona jest nierównością (pierwiastkujemy równanie (34)):

$$\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \sqrt{-\frac{1}{4} \left( \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2} \quad (35)$$

Jeśli:

- $\hat{A}$  jest operatorem położenia  $\hat{x} = x$
- $\hat{B}$  jest operatorem pędu (składowa  $x$ )  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ,

to komutator:

$$\left[ x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right] = i\hbar \quad (36)$$

wtedy:

$$\langle [\hat{x}, \hat{p}_x] \rangle = i\hbar \quad (37)$$

i mamy:

$$\sigma(x)\sigma(p_x) = \Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar \quad (38)$$

# Równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (39)$$

Gdzie  $\hat{H}$  - hamiltonian:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (40)$$

pęd  $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} \Psi(t, x) + V(t, x) \Psi(t, x) \quad (41)$$

# Równanie Schrödingera - wyprowadzenie

## operator ewolucji

Stany są unormowane wobec tego operator ewolucji zachowuje długość:

$$\Psi(t) = e^{-\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \Psi(0) \quad (42)$$

$$\|e^{-\frac{\hat{H}t}{\hbar}}\| = 1$$

## równanie różniczkowe wyprowadzamy z równania charakterystycznego

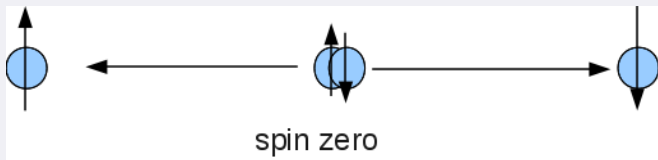
postulaty de Broglie'a:  $E = \hbar\omega$ ,  $p = \hbar k_x$ ,  $\omega = \frac{2\Pi}{T}$ ,  $k = \frac{2\Pi}{\lambda}$

$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$  z tego  $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + V(x)$ ,

ponieważ  $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega$  i  $\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow ik_x$  to mamy równanie Schrödingera.

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i(k_x x - \omega t)} = -i\omega e^{i(k_x x - \omega t)} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial}{\partial x} e^{i(k_x x - \omega t)} = ik_x e^{i(k_x x - \omega t)}$$

# PARADOKS EPR (Einstein, Podolsky, Rosen, 1935)



Rysunek: Rozpad cząstki o spinie zerowym na dwie o spinach połówkowych

Klasycznie stany  $\uparrow$  i  $\downarrow$  są niezależne:

$$P_K(\uparrow, \downarrow) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad (44)$$

Kwantowo wiadomo, że stan  $\uparrow$  skorelowany jest ze stanem  $\downarrow$ :

$$P_Q(\uparrow, \downarrow) = \frac{1}{2} \quad (45)$$

# Nierówności probabilistyczne

Dla dwóch dowolnych zdarzeń  $A$  i  $B$ :  $P(A \cap B) \leq P(A)$  Dla trzech dowolnych  $A$ ,  $B$  i  $C$ :

$$P(A \cap B \cap C) \leq P(A \cap B) \quad (46)$$

Przykład 1.:  $A$  - ciało przyciągane jest przez magnes,  
 $B$  - ciało pływa na wodzie  
 $C$  - jest białe

$P(A \cap B) = 0$ ,  $P(A \cap C) = p_1$ ,  $P(C \cap B) = p_2$ ,  
 $P(A \cap B \cap C) = 0$  czyli nierówność (46) jest spełniona.

Przykład 2. Foton w stanie  $|u\rangle$  wpada w polaryzator  
Trzy możliwości  $A = \uparrow$ ,  $B = \rightarrow$ ,  $C = \nearrow$ ,

Jeśli nic nie wiemy o stanie  $|u\rangle$  to:

$$P(\uparrow) = P(\rightarrow) = P(\nearrow) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Wtedy  $P(\uparrow \cap \rightarrow) = 0$ ,  $P(\uparrow \cap \nearrow) = P(\rightarrow \cap \nearrow) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Ale:  $P(\uparrow \cap \nearrow \cap \rightarrow) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$  czyli  
 $P(\uparrow \cap \nearrow \cap \rightarrow) \geq P(\uparrow \cap \rightarrow) = 0$

# nierówność Bella'a

## „On the Einstein Podolsky Rosen paradox”, 1994

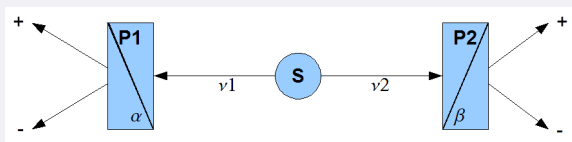
$$\rho(a, b) + \rho(a, b') + \rho(a', b) - \rho(a', b') \leq 2 \quad (47)$$

$\rho(a, b)$  - korelacje wyników pomiarów  $a$  i  $b$ .

$a'$  zdarzenie przeciwne do  $a$

To równanie wynika z probabilistyki, ale eksperyment kwantowy temu zaprzeczył.





Rysunek: Eksperyment korelacji fotonów, źródło Wikipedia

S - źródło dwóch rodzajów fotonów:

$$|\psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow, \uparrow\rangle + |\rightarrow, \rightarrow\rangle \} \quad (48)$$

# Zasada Holograficzna

Nie ma lokalności gdy stany własne układu fizycznego są inne niż stany własne operatora położenia. Stany własne układu fizycznego wyznaczone są przez zagadnienie brzegowe.

wg. Wikipedii:

Zasada holograficzna (Gerardus't Hooft i Leonard Susskind)

- 1 „silna wersja” - opis każdego trójwymiarowego ciała lub rejonu przestrzeni zawarty jest na dwuwymiarowej powierzchni otaczającej to ciało
- 2 „słaba wersja” - cały Wszechświat może być postrzegany jako dwuwymiarowa struktura informacyjna „namalowana” na horyzoncie kosmologicznym.

Zasada holograficzna – wyjaśnia paradoks informacyjny czarnych dziur w teorii strun.

# Wiele ciał

## jak opisać stan wielocząstkowy

niech stany cząstek są opisane w bazie  $|e_k\rangle$  lub  $|k\rangle$ .  
jak opisać stany wielocząstkowe.

## produkt tensorowy

Stany można opisać na parach  $|k, l\rangle$ .

## nieodróżnialność

cząstki są nieodróżnialne:

- fermiony - nie może być wielu w jednym stanie
- bozony - może być wiele w jednym stanie

# Wiele ciał - kwantowanie pola

## operatory kreacji i anihilacji

niech stany jedno-cząstkowe są opisane w bazie  $|k\rangle$ .

stany wielocząstkowe opisujemy jako wzbudzenia stanu próżni  $|\emptyset\rangle$ ,

dla stanu dwucząstkowego:  $|(k, l)\rangle = a_l^+ a_k^+ |\emptyset\rangle$

gdzie  $a_k^+$  jest operatorem kreacji stanu  $|k\rangle$ ,

$|\emptyset\rangle$  opisuje próżnię fizyczną.

## fermiony i bozony

Reguła antykomutacyjna Jordana-Wignera definiująca operatory dla fermionów:

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^+, a_j^+\} = 0, \{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij},$$

gdzie  $\{a_i, a_j\} = a_i a_j + a_j a_i$  - antykomutator,

Reguła komutacyjna Bosego definiująca operatory dla bozonów:

$$[\hat{a}_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0, [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}.$$

gdzie  $[a_i, a_j] = a_i a_j - a_j a_i$  - komutator.

## Miara informacji

Odwzorowanie:

$$I : T \rightarrow \mathbb{R} \quad (49)$$

gdzie  $T$  przestrzeń komunikatów (teksty),  
 $\mathbb{R}$  - zbiór liczb rzeczywistych.

czy jest reprezentatywne

teoria reprezentacji - homomorfizm struktur

ciąg dalszy w innej prezentacji