Cw. 43 Pomiar C_p/C_V metodą fali stojącej, (Wyznaczanie C_p/C_v dla powietrza metodą rezonansu akustycznego)

Michał Urbański

1. Proces adiabatyczny

Proces termodynamiczny zachodzący w pewnym układzie jest adiabatyczny jeśli układ nie wymienia ciepła z otoczeniem. Zazwyczaj mamy z tym do czynienia z procesem adiabatycznym, gdy proces zachodzi na tyle szybko, że można uznać, że ilość ciepła jaka została dostarczona (lub odebrana) do układu wynosi prawie zero czyli $\Delta Q = 0$. Zasada zachowania energii ma postać: $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$, gdzie ΔU - zmiana energii w procesie, ΔQ - ilość ciepła dostarczona do układu, ΔW - ilość pracy dostarczona do układu. W przypadku gazu doskonałego $\Delta U = nC_V \Delta T$, gdzie C_V - ciepło właściwa przy stałej objętości, ΔT - przyrost temperatury, $\Delta W = -p\Delta V$.

Jeśli $\Delta Q = 0$ to:

$$nC_V \Delta T = -p\Delta V \tag{1}$$

Równanie (1) jest równaniem różniczkowym, w celu rozwiązania tego równania należy wyeliminować jedną ze zmiennych, Korzystając z równania stanu gazu: $pV = nRT$, mamy: $p = nR\frac{T}{V}$, po podstawieniu do (1) mamy:

$$nC_V \Delta T = -nR\frac{T}{V}\Delta V \tag{2}$$

po rozdzieleniu zmiennych:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} \tag{3}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V}\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \tag{4}$$

Całki te są logarytmami w odpowiednich granicach. Po przekształceniach:

$$T_2 V_2^{\frac{R}{C_V}} = T_1 V_1^{\frac{R}{C_V}} \tag{5}$$

Ponieważ $C_p - C_V = R$ i $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$ więc:

$$T_2 V_2^{\kappa-1} = T_1 V_1^{\kappa-1} \tag{6}$$

Równanie to zapisuje się jako: $TV^{\frac{R}{C_V}} = const$. Podstawiamy do równania (6) równanie $T = \frac{pV}{nRT}$ i mamy:

$$p_2 V_2^{\kappa} = p_1 V_1^{\kappa} \tag{7}$$

co zapisujemy jako: $pV^{\kappa} = const$.

2. Równanie fali i metoda pomiaru

Współczynnik C_p/C_V wyznaczany jest pośrednio przez wyznaczenie prędkości dźwięku (wyprowadzenia wzorów są w instrukcji na stronie CLF). W celu wyznaczenie prędkości dźwięku należy wyznaczyć dla określonej częstotliwości długość fali akustycznej metodą fali stojącej. Fala stojąca powstaje pomiędzy dwoma odbijającymi płaszczyznami w wyniku nałożenia się fali odbitej z pierwotną. Można to opisać następującym wzorem:

$$\Phi(t, x) = A_1 \cos(\omega t - kx) + A_2 \cos(\omega t + kx) \tag{8}$$

gdzie $A_1 \cos(\omega t - kx)$ opisuje falę padającą o amplitudzie A_1 propagującą się zgodnie z osią x a $A_2 \cos(\omega t + kx)$ opisuje falę odbitą o amplitudzie A_2 propagującą się przeciwnie do zwrotu osi x, ω oznacza częstość fali:

$$\omega = \frac{2\Pi}{T} \tag{9}$$

gdzie T jest okresem fali (okres czasowy), k jest liczbą falową:

$$k = \frac{2\Pi}{\lambda} \tag{10}$$

gdzie λ – długość fali (okres przestrzenny[1]).

Gdyby odbicie było bez strat to amplituda fali padającej A_1 byłaby równa amplitudzie fali odbitej A_2, jednak tak nigdy nie jest.

Wzór (8) przekształcimy stosując wzory na sumę kosinusów: $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ i różnicę kosinusów: $\cos(\alpha) - \cos(\beta) - 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$. Po wstawieniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\Phi(t,x) &= \frac{A_1 + A_2}{2}\cos(\omega t + kx) + \frac{A_1 + A_2}{2}\cos(\omega t - kx) + \\ &= \frac{A_1 - A_2}{2}\cos(\omega t + kx) - \frac{A_1 - A_2}{2}\cos(\omega t - kx) = \\ &= (A_1 + A_2)\cos(\omega t)\cos(kx) - (A_1 - A_2)\sin(\omega t)\sin(kx)\end{aligned} \tag{11}$$

Wyrażenie $\cos(\omega t)\cos(kx)$ opisuje drgania o częstości ω o amplitudzie $\cos(kx)$ zależnej od punktu. Maksima wypadają w punkcie x spełniającym warunek $kx = \frac{\Pi}{2} + n\Pi$. Ponieważ liczba falowa k dana jest wzorem (10) więc miejsca (wartości x) gdzie jest maksimum fali $\Phi(t,x)$ opisane są wzorem:

$$x(n) = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \tag{12}$$

gdzie $x(n)$ oznacza n-te maksimum.

Odległości maksimów są więc odległe o połowę długości fali $\frac{\lambda}{2}$. Ponieważ we wzorze (2) mamy składnik proporcjonalny do różnicy amplitud to maksimum fali otrzymujemy gdy $\cos(kx) = 1$ i $\sin(kx) = 0$ i wartość maksimum wynosi $A_1 + A_2$ a minimum nie jest zerowe bowiem w punkcie, w którym $\Phi(t,x)$ osiąga minimum mamy $\cos(kx) = 0$ i $\sin(kx) = 1$ i wartość minimum wynosi $|A_1 - A_2|$.

[1] Funkcja f jest okresowa jeśli dla każdego x zachodzi $f(x+T) = f(x)$, gdzie T jest okresem.

3. Prędkość dźwięku w powietrzu

Fala akustyczna jest falą poprzeczna i polega na propagacji zagęszczeń i rozrzedzeń powietrza. Ponieważ można założyć, że zagęszczenia są procesem na tyle szybkim, że ciepło nie zdąży przedyfundować z obszaru podniesionego ciśnienia, gdzie następuje lokalne zwiększenie temperatury powietrza. Przemiana gazowa zachodząca w warunkach izolacji termicznej ($dQ = 0$) jest procesem adiabatycznym opisanym równaniem $pV^\kappa = const$ (gdzie p - ciśnienie gazu, a V - objętość). Dla procesy adiabatycznego można otrzymać równanie:

$$\frac{dP}{dV} = -\kappa\frac{p}{V} \tag{13}$$

gdzie $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$, C_p - ciepło właściwe (molowe) przy stałym ciśnieniu, C_V - ciepło właściwe (molowe) przy stałej objętości.

Na podstawie zależności (13) można wyprowadzić prędkość fali dźwiękowej:

$$v = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}} \tag{14}$$

gdzie ρ – gęstość powietrza. czyli:

$$\kappa = v^2\frac{\rho}{p} \tag{15}$$

Obliczenia współczynnika κ należy wykonać korzystając z ciśnienia barometrycznego na podstawie danych opublikowanych tego dnia na stronie stacji meteo Wydziału Fizyki PW http://www.if.pw.edu.pl/ meteo/ (pamiętaj, że dane meteo przeliczone są na poziom morza). Gęstość powietrza należy wyznaczyć na podstawie tabel lub wykresów równania stanu powietrza. Można skorzystać z wikipedii angielskiej (hasło density of air) lub stron poświęconych obliczaniu gęstości powietrza w funkcji temperatury, ciśnienia i wilgotności. Przyjąć wilgotność względna 40%. Wzór na gęstość powietrza:

$$\rho(p_d, T, p_v) = \frac{p_d}{R_d T} + \frac{p_v}{R_v T}, \tag{16}$$

Gdzie p_d - ciśnienie suchego powietrza $p_d = p - p_v$,

p_v - ciśnienie cząstkowe pary wodnej, wyznacza się na postawie ciśnienia pary nasyconej p_{sat} dla danej temperatury: $p_v = \phi p_{sat}$, ϕ wilgotność względna (przyjąć 40% z błędem granicznym 10%). Ciśnienie pary nasyconej wody można znaleźć na wikipedii angielskiej http://en.wikipedia.org/wiki/Vapour_pressure_of_water.

R_d =287.058 J/(kg·K) – stała gazowa suchego powietrza

R_v =461.495 J/(kg·K) – stała gazowa pary wodnej.

T – temperatura w Kelwinach.

4. Opis pomiarów

Dla trzech częstotliwości wykonać pomiary położenia:

1) minimów i maksimów napięcia na mikrofonie
2) punktów o fazie zgodnej i przeciwnej

Uwaga

Punkty o fazie zgodnej i przeciwnej nie muszą pokrywać się z punktami o maksymalnej i minimalnej amplitudzie.

5. Opracowanie pomiarów

W celu wyznaczenia długości fali należy dla każdej częstotliwości wykonać wykresy:

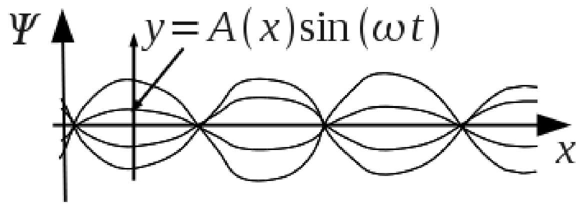
1) minimów i maksimów amplitudy w funkcji numeru maksimum i minimum. Minima powinny mieć numery połówkowe tak aby punkty na płaszczyźnie (x_n, n) (x_n- wartość n-tego położenia) ułożyły się na jednej prostej.
2) położenia $x(n)$ punktów o fazie zgodniej i przeciwnej, przy czym należy je ponumerować tak aby punkty o fazie zgodnej miały numery całkowite a o fazie przeciwnej numery połówkowe.

Następnie metodą najmniejszych kwadratów należy wyliczyć długość fali dla trzech częstotliwości i wyliczyć prędkość ze wzoru:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \tag{17}$$

gdzie: λ - wyznaczona długość fali, f – częstotliwość generatora.

Odległości pomiędzy maksimami fali stojącej wynoszą połowę długości fali (długość fali oznaczymy λ). Podobnie odległości pomiędzy punktami o fazie zgodnej powinny znajdować w odległości równej wielokrotności długości fali. Jeśli ponumerujemy kolejne maksima to otrzymamy funkcję $x(n)$, gdzie n numer maksimum. Ponieważ odległości punktów wynoszą $\frac{\lambda}{2}$, czyli $x(n+1) - x(n) = \frac{\lambda}{2}$ to równania (12) wynika, że funkcja ta musi mieć postać ciągu arytmetycznego $x(n) = x_0 + n\frac{\lambda}{2}$ gdzie x_0 - dowolna stała. Należy metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć nachylenie funkcji $x(n)$, współczynnik nachylenia równy jest połówce fali (jeśli maksima ponumerowane są kolejnymi liczbami naturalnymi a minima połówkami).



Rysunek 1: Fala stojąca, w każdym przekroju x drgania opisane są równaniem $y = A(x)\sin(\omega t)$, gdzie amplituda $A(x)$ zależy od położenia: $A(x) = A\cos(kx)$

Wynik należy zebrać w tabeli zawierającej dla trzech częstotliwości wyznaczone wartości długości fali (dwie wartości jedna z minimów i maksimów, druga na podstawie fazy zgodnej i przeciwnej), wartości prędkości dźwięku oraz wartości parametru κ.

Na wykresach zależności położenia maksimów i minimów od numeru maksimum, oraz na wykresach zależności położenia punktów o fazach zgodnych i przeciwnych należy narysować prostą uzyskana metodą najmniejszych kwadratów i przedyskutować problem sensowności uzyskanych wyników. Należy odpowiedzieć na pytanie czy obserwowane maksima i minima mogą być podstawą wyznaczenia odpowiednich węzłów i strzałek fali.

6. Analiza niepewności

Należy wymienić źródła błędów pomiarowych oraz błędów które są błędami metody (np. uzyskane minima i maksima nie mogą być podstawą wyznaczenia długości fali).

Należy wyznaczyć niepewność uzyskania długości fali w metodzie najmniejszych kwadratów (odchylenie standardowe współczynnika nachylenia). Dla danych ciśnienia założyć błąd graniczny danych pomiarowych ze strony Wydziału Fizyki PW ma błąd graniczny 0.2 hPa. (przeliczyć dane na Paskale). Dla gęstości powietrza oszacować błąd graniczny na podstawie wzoru z wikipedii angielskiej.

W celu wyznaczenia niepewności κ należy wzór (15) zapisać w postaci różniczki dla błędów:

$$\Delta\kappa = 2v\frac{\rho}{p}\Delta v + v^2\frac{1}{p}\Delta\rho - v^2\frac{\rho}{p^2}\Delta p \tag{18}$$

gdzie Δp, Δv i $\Delta\rho$ są błędami ciśnienia, prędkości i gęstości.

Dla niepewności uzyskamy:

$$u(\kappa) = \sqrt{(2v\frac{\rho}{p}u(v))^2 + (v^2\frac{1}{p}u(\rho))^2 + (v^2\frac{\rho}{p^2}u(p))^2} \tag{19}$$

Gdzie $u(p)$, $u(\rho)$ i $u(v)$ są niepewnościami (czyli odchyleniami standardowymi σ) odpowiednio ciśnienia, gęstości i prędkości.

Odchylenie standardowe szacuje się na podstawie błędu granicznego. Jeśli błąd graniczny pewnej wielkości wynosi Δx to niepewność $u(x) = \sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$ Błąd graniczny ciśnienia (jak napisano wyżej) 0.2 hPa, błąd graniczny gęstości wynika z różniczkowania wzoru (16) (analogicznie do (19)).

Błąd graniczny prędkości i niepewność wynika ze wzoru (17). Przyjąć błąd graniczy pomiaru częstotliwości równy rozdzielczości generatora (ostania cyfra). Niepewność długości fali wynika z metody najmniejszych kwadratów. Jeśli zróżniczkujemy (17) to mamy: $\Delta v = \lambda\Delta f + f\Delta\lambda$ i z tego wprost niepewność prędkości: $u(v) = \sqrt{(\lambda u(f))^2 + (fu(\lambda))^2}$

7. Wnioski

Wnioski powinny obejmować: 1) Opisać w skrócie zasadę pomiaru, użyte przyrządy, 2) wymienić źródła błędów pomiarowych i zasady określenia niepewności, 3) przeanalizować, która składowa niepewności jest największa (w obliczeniach należy podać składowe niepewności), 4) podać ewentualne metody lepszego pomiaru i sposoby zwiększenia dokładności, 5) porównać wartość uzyskanego współczynnika κ z danymi literaturowymi na temat powietrza 6) zinterpretować uzyskany wynik analizując liczby stopni swobody molekuł azotu i tlenu.

8. Problemy i zadania

Zad 1. Podaj definicje procesu adiabatycznego, wyprowadź równanie $\left(\frac{p}{V}\right)^{\frac{C_p}{C_V}} = const$. Zapisz równanie adiabaty gdy w postaci zależności ciśnienia od temperatury.

Zad 2. Podaj definicję gazu doskonałego.

Zad 3. Udowodnij, że dla gazu doskonałego zmiana energii wewnętrznej zależy jedynie od temperatury, dla każdego typu procesu: $\Delta U = nC_V\Delta T$. Stała C_V jest równa ciepłu właściwemu przy stałej objętości, równanie opisujące zmianę energii wewnętrznej jest identyczne dla każdego procesu np. dla procesu izobarycznego też $\Delta U = nC_V\Delta T$).

Zad 4. Udowodnij, że $C_p - C_V = R$, gdzie C_V - ciepło właściwe przy stałej objętości, gdzie C_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, R - stała gazowa.

Zad 5. W butelce zamknięto gaz pod ciśnieniem p_1 większym od ciśnienia atmosferycznego p_0 i temperaturze równej temperaturze otocznia T_0. Butelkę na chwile otwarto i wypuszczono tyle gazu, że ciśnienia wyrównały się i butelkę zamknięto ponownie. Wyznacz temperaturę zaraz po wypuszczeniu gazu oraz ciśnienie P_2 jakie będzie po wyrównaniu temperatury gazu w butelce z temperaturą otoczenia. Dane są: ciśnienie atmosferyczne p_0, temperatura otoczenia T_0, ciśnienie początkowe p_1 ($p_1 > p_0$), oraz stała κ gazu. Narysuj proces na płaszczyźnie p, T i p, V. Udowodnij, że w przybliżeniu $\kappa = \frac{p_1 - p_0}{p_1 - p_2}$.