

DYNAMIKA

ZADANIA

Zadanie DYN1

Na ciało działa siła $F(t) = f_0 \cos \omega t$ (przy czym f_0 i ω to stałe). W chwili początkowej ciało miało prędkość $v(0) = 0$ i znajdowało się w punkcie $x(0) = -\frac{f_0}{m\omega^2}$. Wyznacz położenie i prędkość ciała w funkcji czasu.

Odpowiedź: $v(t) = \frac{f_0}{m\omega} \sin \omega t$, $x(t) = -\frac{f_0}{m\omega^2} \cos \omega t$

Zadanie DYN2

Na ciało działa siła $F(t) = f_0 e^{-at}$ (przy czym f_0 i a to stałe). W chwili początkowej ciało miało prędkość $v(0) = 0$ i znajdowało się w punkcie $x(0) = 0$. Wyznacz położenie i prędkość ciała w funkcji czasu. Do jakiej prędkości v_{gr} ciało będzie przyspieszane (jaka będzie jego prędkość w granicy dla nieskończonego czasu)?

Odpowiedź: $v(t) = \frac{f_0}{ma} (1 - e^{-at})$, $x(t) = \frac{f_0}{ma} t + \frac{f_0}{ma^2} (e^{-at} - 1)$, $v_{gr} = \frac{f_0}{ma}$

Zadanie DYN3

W chwili $t = 0$ na będącą w spoczynku cząstkę o masie m zaczęła działać siła $\vec{F} = \vec{a}t(\tau - t)$, gdzie \vec{a} i τ to stałe. Jeżeli siła działała na cząstkę przez czas τ , to jaki pęd uzyskała w tym czasie cząstka i jaką drogę przebyła?

Odpowiedź: $\vec{p} = \frac{\vec{a}\tau^3}{6}$, $s = \frac{\|\vec{a}\|\tau^4}{12m}$

Zadanie DYN4

Na poruszające się ciało działa siła oporu o wartości $F(t) = -b\sqrt{v}$, gdzie v jest prędkością ciała, b - dodatnią stałą. Zakładając, że w chwili $t = 0$ prędkość ciała wynosiła v_0 wyznacz czas τ po jakim ciało zatrzyma się i drogę s_τ jaką przebędzie do chwili zatrzymania.

Odpowiedź: $\tau = \frac{2m\sqrt{v_0}}{b}$, $s_\tau = \frac{2mv_0^{3/2}}{3b}$

Zadanie DYN5

Samochód o masie m hamowany jest siłą oporu $F = -kv^2$. Jaką drogę przebędzie samochód, zanim jego prędkość zmaleje do połowy?

Odpowiedź: $s = \frac{m}{k} \ln 2$

Zadanie DYN6

Prędkość cząstki poruszającej się w dodatnim kierunku osi X wynosi $v = \alpha\sqrt{x}$, gdzie α to dodatnia stała a x - położenie cząstki. Wyznacz położenie, prędkość i przyspieszenie cząstki w funkcji czasu. Załóż, że w chwili początkowej $t = 0$ cząstka znajdowała się w punkcie $x = 0$.

Odpowiedź: $x = \frac{1}{4}\alpha^2 t^2$, $v = \frac{1}{2}\alpha^2 t$, $a = \frac{1}{2}\alpha^2$

Zadanie DYN7

Pocisk przebił na wylot deskę o grubości h zmniejszając przy tym swoją prędkość z v_0 do v . Oblicz czas przelotu pocisku przez deskę, jeżeli siła oporu z jaką deska działała na pocisk była proporcjonalna do kwadratu prędkości.

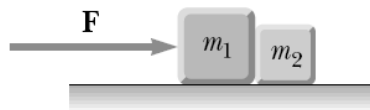
Odpowiedź: $\tau = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln \frac{v_0}{v}}$

Zadanie DYN8

Współrzędne cząstki na płaszczyźnie XY wynoszą odpowiednio $x = a \sin \omega t$ i $y = b \cos \omega t$, gdzie a , b i ω to stałe. Znajdź siłę działającą na cząstkę.

Odpowiedź: $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$

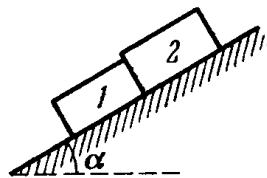
Zadanie DYN9



Na gładkiej powierzchni położono dwa stykające się ze sobą bokami ciała o masach m_1 i m_2 . Na pierwsze z ciał (patrz rysunek) zaczęto działać siłą równą co do wartości F . Jakie będzie przyspieszenie układu? Z jaką siłą będą na siebie działały ciała?

Odpowiedź: $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$, $R = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$

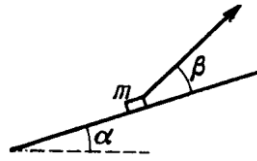
Zadanie DYN10



Ciała o masie m_1 i m_2 umieszczono na równi pochyłej nachylonej pod kątem α . Wyznacz a) siłę, z jaką ciała działają na siebie podczas ruchu i b) minimalny kąt nachylenia równi, przy którym ciała zaczną się zsuwać. Współczynniki tarcia ciał o powierzchnię równi wynoszą odpowiednio f_1 i f_2 .

Odpowiedź: a) $R = (f_1 - f_2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha$, b) $\text{tg } \alpha_{\min} = \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2}{m_1 + m_2}$

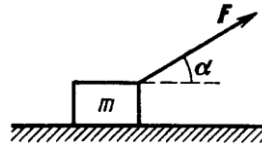
Zadanie DYN11



Ciało o masie m jest wciągane przy użyciu sznurka po równi pochyłej nachylonej pod kątem α do podłoża. Pod jakim kątem w stosunku do powierzchni równi należy nachylić sznurek, aby jego naciąg był jak najmniejszy? Ile będzie wtedy wynosił naciąg? Zakładamy, że ciało porusza się ruchem jednostajnym a współczynnik tarcia wynosi f .

Odpowiedź: $\operatorname{tg} \beta = f$, $T = \frac{mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\sqrt{1+f^2}}$

Zadanie DYN12



Na ciało o masie m w chwili $t = 0$ zaczęto działać siłą $F = at$, gdzie a to stała większa od zera. Siła przyłożona została pod kątem α do poziomu. Jaka prędkość uzyska ciało do chwili oderwania się od podłoża i jaką drogę w tym czasie przebędzie?

Odpowiedź: $v = \frac{mg^2 \cos \alpha}{2a \sin^2 \alpha}$, $S = \frac{m^2 g^3 \cos \alpha}{6a^2 \sin^3 \alpha}$

Zadanie DYN13

Jaką prędkość początkową v_0 trzeba nadać ciału o masie m , aby wjechało na szczyt równi o długości l i kącie nachylenia α , jeżeli współczynnik tarcia wynosi f . Oblicz czas τ trwania ruchu.

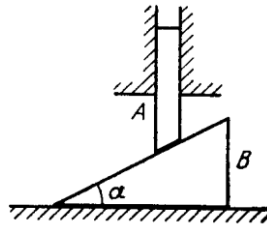
Odpowiedź: $v_0 = \sqrt{2gl(\sin \alpha + f \cos \alpha)}$, $\tau = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}}$

Zadanie DYN14

Ciało znajdowało się u podstawy równi pochyłej nachylonej pod kątem α do podłoża. W chwili początkowej $t = 0$ nadana została mu pewna (nieznana nam) prędkość początkowa i na skutek tego ciało zaczęło poruszać się po równi. Jaka jest wartość współczynnika tarcia, jeżeli czas ruchu ciała w górę równi jest k razy mniejszy od czasu zjeżdżania z równi?

Odpowiedź: $f = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \operatorname{tg} \alpha$

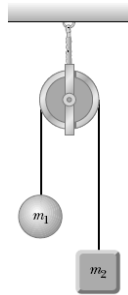
Zadanie DYN15



Znajdź przyspieszenia ciał A i B jeżeli w układzie nie występuje tarcie a stosunek masy ciała B do A wynosi β . Kąt nachylenia powierzchni ciała B jest dany i wynosi α .

Odpowiedź: $a_A = \frac{g}{1+\beta \operatorname{ctg}^2 \alpha}$, $a_B = \frac{g}{\operatorname{tg} \alpha + \beta \operatorname{ctg} \alpha}$

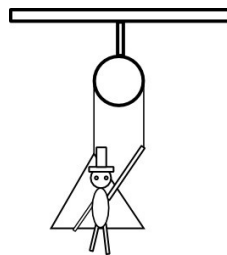
Zadanie DYN16



Dwa ciała, o masach m_1 i m_2 , połączono linką i przerzucono przez bloczek (patrz rysunek – jest to tak zwana maszyna Atwooda). Jakie będzie przyspieszenie masy 1? Jakie będzie napięcie linki?

Odpowiedź: $a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$, $T = \frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1} g$

Zadanie DYN17



Malarz o masie M siedzi na „krześle bosmańskim”, wiszącym przy ścianie wysokiego budynku (patrz rysunek). Pragnąc szybko podjechać do góry, malarz ciągnie za zwisający koniec liny z taką siłą, że jego nacisk na krzesło zmniejsza się do F_N . Masa krzesła wynosi m . Z jakim przyspieszeniem a porusza się malarz z krzesłem do góry? Z jaką siłą F ciągnie malarz za linkę?

Odpowiedź: $a = \frac{2F_N - (M-m)g}{M-m}$, $F = \frac{M+m}{M-m} F_N$

Zadanie DYN18

Na linie przerzuconej przez nieruchomy blok i przyczepionej do ciężarka o masie m znajduje się małpa o masie M (na drugim końcu linii). Z jakim przyspieszeniem będzie poruszać się ciężarek w przypadku, kiedy a) małpa nie porusza się względem linii, b) małpa wspina się ze stałą prędkością v względem linii, c) małpa wspina się po linii ze stałym przyspieszeniem a_0 względem linii?

Odpowiedź: a) $a = \frac{M-m}{M+m}g$, b) $\frac{M-m}{M+m}g$, c) $\frac{M(g+a_0)-mg}{M+m}g$

Zadanie DYN19

Małpa o masie M wisi na linie przerzuconej przez nieważki blok i obciążonej masą m . Jakie jest przyspieszenie a masy m , jeśli małpa przebiera łapami tak, że stale znajduje się na tej samej wysokości? Przyjąć $M > m$ i założyć, że małpa działa na linę ze stałą siłą.

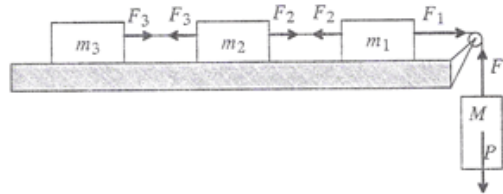
Odpowiedź: $a = \left(\frac{M}{m} - 1\right)g$

Zadanie DYN20

Na końcach nieważkiej nici, przerzuconej przez nieważki bloczek, zawieszono ciężarki o masach m_1 i m_2 . Lżejszy z nich znajduje się o l metrów niżej od cięższego. Po jakim czasie τ ciężarki znajdą się na tej samej wysokości, jeśli puścimy je swobodnie?

Odpowiedź: $\tau = \sqrt{\frac{l(m_2+m_1)}{g(m_2-m_1)}}$

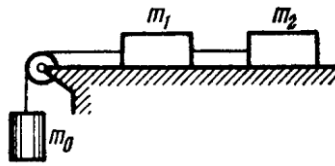
Zadanie DYN21



Na stole przymocowano jedna za drugą masy m_1 , m_2 i m_3 . Znajdź przyspieszenie układu i naprężenia wszystkich nici.

Odpowiedź: a) $a = \frac{Mg}{M+m_1+m_2+m_3}$, $F_1 = \frac{M(m_1+m_2+m_3)g}{M+m_1+m_2+m_3}$, $F_2 = \frac{M(m_2+m_3)g}{M+m_1+m_2+m_3}$, $F_3 = \frac{Mm_3g}{M+m_1+m_2+m_3}$

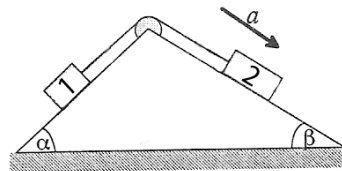
Zadanie DYN22



Dla układu takiego, jak na rysunku, wyznacz przyspieszenie zwisającego ciężarka, jeżeli ciężarki mają masy m_0 , m_1 i m_2 , a współczynnik tarcia pomiędzy ciężarkami a podłożem wynosi f . Wyznacz również napięcie linki łączącej ciężarki znajdujące się na podłożu.

Odpowiedź: $a = \frac{m_0 - f(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2} g$, $T = \frac{(1+f)m_0 m_2 g}{m_0 + m_1 + m_2}$

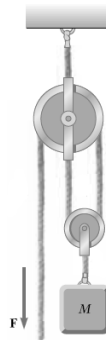
Zadanie DYN23



Dwa ciała o masach m_1 i m_2 powiązanie nierozciągliwą nicią umieszczono na równi pochyłej. Wyznacz przyspieszenie ciał oraz naciąg nici. Współczynnik tarcia pomiędzy masami a podłożem wynosi f , kąty pomiędzy równią a podłożem wynoszą odpowiednio α i β .

Odpowiedź: a) $a = \frac{m_2(\sin \beta - f \cos \beta) - m_1(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{m_1 + m_2} g$, $F_N = \frac{m_1 m_2 g [f(\cos \alpha - \cos \beta) + \sin \alpha + \sin \beta]}{m_1 + m_2}$

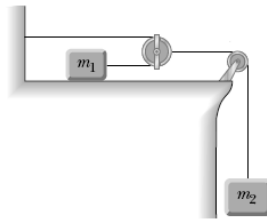
Zadanie DYN24



Jaką siłą należy działać na sznur, aby ciało o masie M pozostawało w spoczynku?

Odpowiedź: $F = \frac{1}{2} M g$

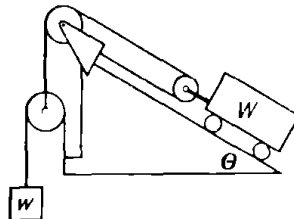
Zadanie DYN25



Dwa ciała, o masach m_1 i m_2 , połączone ze sobą przy pomocy systemu bloczków (patrz rysunek). Jakie będzie przyspieszenie masy 2?

Odpowiedź: $a_2 = \frac{m_2}{m_2 + 4m_1} g$

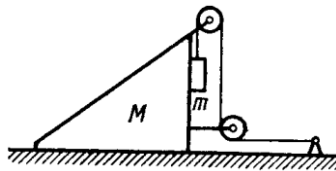
Zadanie DYN26



Ciężar wózka umieszczonego na równi pochyłej (o kącie nachylenia θ) zrównoważony jest ciężarkiem w . Tarcie wszystkich części pomijamy. Jaki jest ciężar wózka W ?

Odpowiedź: $W = \frac{4w}{\sin \theta}$

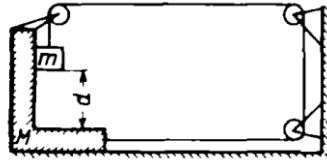
Zadanie DYN27



Współczynnik tarcia pomiędzy klockiem o masie m a równią o masie M wynosi f . Znajdź wartość przyspieszenia klocka. Tarcie pomiędzy podłożem a równią nie występuje.

Odpowiedź: $a = \frac{g\sqrt{2}}{\frac{M}{m} + f + 2}$

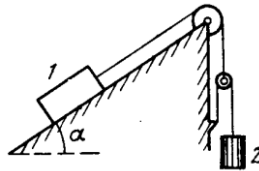
Zadanie DYN28



W układzie pokazanym na rysunku wszystkie powierzchnie są gładkie. W pewnej chwili masie m , początkowo spoczywającej w odległości d od podstawy utworzonej przez masę M , pozwalamy swobodnie się poruszać. Po jakim czasie od chwili uwolnienia masa m uderzy w tę podstawę?

Odpowiedź: $t = \sqrt{\frac{d(5m+M)}{2mg}}$

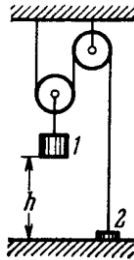
Zadanie DYN29



Jakie będzie przyspieszenie ciała 2, jeżeli jego masa jest η razy większa od masy ciała 1? Kąt nachylenia równi wynosi α , tarcia nie uwzględniamy.

Odpowiedź: $a_2 = \frac{2g(2\eta - \sin \alpha)}{4\eta + 1}$

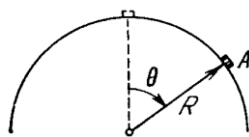
Zadanie DYN30



Masa ciała 1 jest η razy większa od masy ciała 2. W chwili $t = 0$ ciało 1 znajduje się na wysokości h a ciało 2 styka się z podłożem. Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się ciało 2?

Odpowiedź: $H = \frac{6h\eta}{4+\eta}$

Zadanie DYN31



Małe ciało A ześlizguje się po sferze o promieniu R . Znajdź kąt, przy którym ciało oderwie się od powierzchni i prędkość, jaką do tego czasu osiągnie.

Odpowiedź: $\theta = \cos^{-1} \frac{2}{3}$, $v = \sqrt{\frac{2}{3} Rg}$