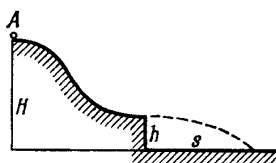


# Zadania z zasad zachowania\*

Maciej J. Mrowiński

23 kwietnia 2010

## \*\* Zadanie ZZ1



Ciało zjeżdża bez tarcia ze szczytu gładkiego wzniesienia o wysokości  $H$ . Dla jakiej wysokości  $h$ , przy której wzniesienie się kończy, ciało przebędzie po oderwaniu się od wzniesienia najdłuższą drogę? Jaka będzie to droga?

Odpowiedź:  $h = \frac{1}{2}H$ ,  $s_{\max} = H$

## \* Zadanie ZZ2

Klocek o masie  $m$  znajduje się u podnóża równi pochyłej (nachylonej pod kątem  $\alpha$  i o współczynniku tarcia  $f$ ). Jaką drogę przebędzie klocek po tej równi, jeśli nadamy mu prędkość początkową  $v_0$ ?

Odpowiedź:  $s = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}$

## \* Zadanie ZZ3

Pocisk o masie  $m$ , lecący z prędkością  $v_1$ , przebija drewnianą deskę o grubości  $d$  i leci dalej z prędkością  $v_2$ . Oblicz wartość średniej siły oporu drewna  $F$  i czas  $\tau$  przelotu pocisku przez deskę. Wpływ grawitacji zaniedbać.

Odpowiedź:  $F = \frac{m}{2d}(v_1^2 - v_2^2)$ ,  $\tau = \frac{2d}{v_1 + v_2}$

\*Skompilowane z wielu źródeł. Tylko do użytku na zajęciach. Do rozwiązania zadań oznaczonych symbolem \* potrzebna jest jedynie wiedza matematyczna z liceum. Zadania z \*\* wymagają zastosowania pochodnych/całek. Zadania z \*\*\* wykraczają poza program.

★ **Zadanie ZZ4**

Jaką pracę wykonają wszystkie siły działające na lokomotywę o masie  $m$  w ciągu pierwszych  $\tau$  sekund jej ruchu, jeżeli prędkość lokomotywy wynosi  $v = b\sqrt{s}$ , gdzie  $b$  to dodatnia stała,  $s$  - droga przebyta przez lokomotywę?

Odpowiedź:  $W = \frac{1}{8} m b^4 \tau^2$

★ **Zadanie ZZ5**

Ciało o masie  $m$  wciągnięto na wysokość  $h$  po równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Jaką pracę wykonano, jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $f$ ?

Odpowiedź:  $W = m g h (f \operatorname{ctg} \alpha + 1)$

★ **Zadanie ZZ6**

Ciało o masie  $m$ , którego prędkość początkowa wynosiła  $v_0 = 0$ , ześlizguje się po równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\alpha$  do podłoża. Po zjechaniu z równi ciało porusza się dalej po podłożu, zatrzymując się po pokonaniu odległości  $l$  liczonej od podstawy równi. Oblicz pracę wykonaną przez siły tarcia podczas ruchu ciała, jeżeli współczynnik tarcia na całej drodze (równi i podłożu) wynosi  $f$ .

Odpowiedź:  $W = -\frac{m g l f}{1 - f \operatorname{ctg} \alpha}$

★ **Zadanie ZZ7**

Ciało zsuwa się po równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Współczynnik tarcia  $f$  zależy od drogi  $s$  przebytej przez ciało w następujący sposób:  $f(s) = b s$ , gdzie  $b$  to dodatnia stała. Wyznacz drogę przebytą przez ciało do chwili zatrzymania się oraz maksymalną prędkość ciała na tej drodze.

Odpowiedź:  $s_{\text{tot}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{b}$ ,  $v_{\text{max}} = \sin \alpha \sqrt{\frac{g}{b \cos \alpha}}$

★ **Zadanie ZZ8**

Piłka spada z wysokości  $h$  na podłogę i odbija się od niej wielokrotnie. Jaką prędkość początkową  $v_0$  należy nadać piłce, aby po  $n$  odbiciach wzniosła się na pierwotną wysokość, jeżeli wiadomo, że przy każdym odbiciu piłka traci  $k$ -tą część swojej energii.

Odpowiedź:  $v_0 = \sqrt{2 g h \left[ \left( 1 - \frac{1}{k} \right)^{-n} - 1 \right]}$

★★ **Zadanie ZZ9**

Ciało o masie  $m$  podnoszone jest z ziemi przy użyciu siły  $F = 2mg(1 - by)$ , gdzie  $b$  to dodatnia stała,  $y$  - wysokość, na jakiej aktualnie znajduje się ciało. Jaką pracę wykona siła  $F$  i o ile zmieni się energia potencjalna ciała do chwili, w której ciało osiągnie połowę maksymalnej wysokości?

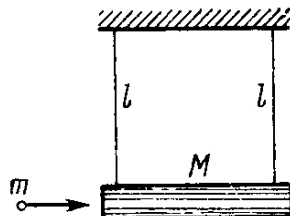
Odpowiedź:  $W = \frac{3mg}{4b}$ ,  $\Delta U = \frac{mg}{2b}$

★★ **Zadanie ZZ10**

Energia kinetyczna cząstki poruszającej się po okręgu o promieniu  $R$  zależy od przebytej przez nią drogi  $s$  w następujący sposób:  $T = bs^2$ , gdzie  $b$  to dodatnia stała. Znajdź wartość siły działającej na cząstkę w funkcji  $s$ .

Odpowiedź:  $F = 2bs \sqrt{\left(\frac{s}{R}\right)^2 + 1}$

★ **Zadanie ZZ11**



Pocisk o masie  $m$  utkwił w ciele o masie  $M$  zawieszonym na dwóch sznurkach o długości  $l$ . Na skutek zderzenia sznurki odchyliły się o kąt  $\theta$ . Zakładając, że  $m \ll M$ , wyznacz prędkość początkową pocisku i część energii kinetycznej pocisku przekształconą na ciepło podczas zderzenia.

Odpowiedź:  $v_0 \approx \frac{2M}{m} \sqrt{gl} \sin \frac{\theta}{2}$ ,  $\eta = 1 - \frac{m}{M}$

★ **Zadanie ZZ12**

Piłka o masie  $m$  uderza pod kątem  $\alpha$  o doskonale gładką ścianę i odbija się od niej doskonale sprężysto. Znaleźć wartość średniej siły z jaką ściana działa na piłkę. Wartość prędkości padającej piłki wynosi  $v$ , a czas zderzenia  $\Delta t$ .

Odpowiedź:  $F = \frac{2mv \cos \alpha}{\Delta t}$

★ **Zadanie ZZ13**

Dwa identyczne wózki o masie  $M$  jadą w swoim kierunku po równoległych torach. W każdym z nich znajduje się mężczyzna o masie  $m$ . W chwili, kiedy wózki zrównały się, mężczyźni wyskoczyli ze swoich wózków zamieniając się miejscami. W efekcie wózek 1 zatrzymał się, a wózek 2 jechał nadal w tym samym kierunku z pewną prędkością  $v$ . Jakie były początkowe prędkości wózków?

Odpowiedź:  $v_1 = \frac{m}{m-M}v$ ,  $v_2 = -\frac{M}{m-M}v$

★ **Zadanie ZZ14**

Dwa identyczne wózki o masie  $M$  jadą jeden za drugim z prędkością  $v_0$ . W pierwszym wózku (tym znajdującym się z tyłu) siedzi mężczyzna o masie  $m$ . W pewnej chwili mężczyzna przeskakuje z jednego wózka na drugi. Jakie będą końcowe prędkości wózków, jeżeli mężczyzna skoczył z prędkością  $u$  względem wózka?

Odpowiedź:  $v_1 = v_0 - \frac{m}{m+M}u$ ,  $v_2 = v_0 + \frac{mM}{(m+M)^2}u$

★ **Zadanie ZZ15**

Na nieruchomej łodzi o masie  $m_0$  stoi dwóch ludzi o masach  $m_1$  i  $m_2$ , jeden na rufie, drugi na dziobie. W pewnej chwili skaczą oni z prędkościami względem łodzi odpowiednio  $u_1$  i  $u_2$ . Kierunki ich prędkości leżą na osi łodzi a zwroty są przeciwne. Opisz zachowanie się łodzi zaniedbując opory wody.

Odpowiedź:  $v = \frac{m_2 u_2 - m_1 u_1}{m_0}$

★ **Zadanie ZZ16**

Dwie kule zderzają się, po czym poruszają się wzdłuż jednej prostej. Jedną z kul była przed zderzeniem w spoczynku, a druga poruszała się z prędkością  $v_0$ . Kula poruszająca się ma masę trzykrotnie mniejszą od masy kuli spoczywającej. Wyznacz: a) prędkości kul po zderzeniu idealnie sprężystym; b) prędkości kul po zderzeniu idealnie niesprężystym; c) ubytek energii podczas zderzenia idealnie niesprężystego.

Odpowiedź: a)  $u_0 = u_1 = \frac{v_0}{2}$ , b)  $u = \frac{v_0}{4}$ , c)  $E = \frac{3}{4} \frac{m_0 v_0^2}{2}$

★ **Zadanie ZZ17**

Cząstka 1 zderza się doskonale sprężysto z będącą w spoczynku cząstką 2. Jaki jest stosunek mas obu cząstek jeżeli a) cząstki zderzają się centralnie i po zderzeniu poruszają się z tą samą prędkością w przeciwnych kierunkach; b) po zderzeniu cząstki poruszają się, każda pod kątem  $\theta$ , symetrycznie względem osi wyznaczonej przez początkowy kierunek cząstki 1?

Odpowiedź: a)  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$ , b)  $\frac{m_1}{m_2} = 4 \cos^2 \theta - 1$

★ **Zadanie ZZ18**

Cząstka o masie  $m_1$  zderza się doskonale sprężysto z będącą w spoczynku cząstką o masie  $m_2$ . Jaką część swojej energii straci cząstka  $m_1$  jeżeli a) po zderzeniu porusza się prostopadłe do swojego początkowego kierunku; b) zderzenie było centralne?

Odpowiedź: a)  $\eta = \frac{2m_1}{m_1+m_2}$ , b)  $\eta = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$

★ **Zadanie ZZ19**

Jaką część  $\varepsilon$  swojej energii kinetycznej straci neutron w zderzeniu sprężystym centralnym z jądrem atomowym będącym w spoczynku? Zakładamy, że znany jest jedynie stosunek  $\beta$  masy jądra do masy neutronu.

Odpowiedź:  $\varepsilon = \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}$

★ **Zadanie ZZ20**

Cząstka 1, poruszająca się z prędkością  $v$ , zderza się centralnie z pozostającą w spoczynku cząstką 2 o tej samej masie. W wyniku zderzenia układ traci  $k$ -tą część swojej energii kinetycznej. Znajdź wartość i zwrot prędkości cząstki 1 po zderzeniu.

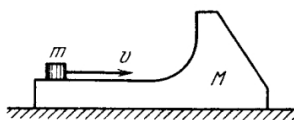
Odpowiedź:  $v_1 = \frac{1}{2}v \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{k}} \right)$

★ **Zadanie ZZ21**

Pocisk o masie  $m$ , lecący równoległe do podłoża, trafił w leżące na murku o wysokości  $h$  ciało o masie  $M$  i utkwił w nim. Jaka była prędkość początkowa pocisku jeżeli po zderzeniu ciało wraz z pociskiem spadło w odległości  $d$  od murku? O ile zmieniła się energia układu na skutek zderzenia?

Odpowiedź:  $v = \frac{d(M+m)}{m} \sqrt{\frac{g}{2h}}$ ,  $\Delta E = -\frac{M(M+m)d^2g}{4hm}$

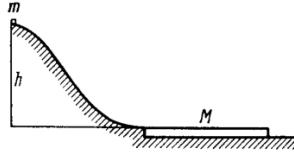
★ **Zadanie ZZ22**



Ciało o masie  $M$ , na którym znajduje się mały dysk o masie  $m$ , leży na gładkiej powierzchni. W pewnej chwili dysk wprowadzono w ruch nadając mu prędkość  $v$ . Na jaką maksymalną wysokość, względem swojego początkowego położenia, wzniesie się dysk  $m$  po oderwaniu od ciała  $M$ ?

Odpowiedź:  $h = \frac{Mv^2}{2g(M+m)}$

★ **Zadanie ZZ23**



Ciało o masie  $m$  zjeżdża z gładkiego pagórka o wysokości  $h$ . U podnóża pagórka znajduje się deska o masie  $M$ . Tarcie powoduje, że kiedy ciało wjeżdża na deskę, deska zaczyna przyspieszać a ciało zaczyna zwalniać. Jaką pracę wykonają siły tarcia w tym układzie do chwili, w której ciało zatrzyma się względem deski?

*Odpowiedź:*  $W = -\frac{mMgb}{M+m}$

★ **Zadanie ZZ24**

Na sznurku o długości  $l$  zawieszono ciało o masie  $m$ . Jaką minimalną prędkość początkową należy nadać ciału, aby zatoczyło w powietrzu pełne koło?

*Odpowiedź:*  $v = \sqrt{5gl}$

★ **Zadanie ZZ25**

Pocisk uderza w klocek zawieszony na nierozciągliwej lince o długości  $l$  i przechodzi przez niego na wylot, zmniejszając przy tym swoją prędkość o połowę. Jaka musi być początkowa prędkość pocisku, aby klocek na lince zatoczył w powietrzu pełne koło? Stosunek masy klocka do masy pocisku wynosi  $\alpha$ .

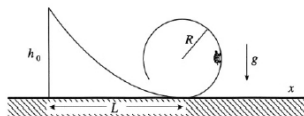
*Odpowiedź:*  $v = 2\alpha\sqrt{5gl}$

★ **Zadanie ZZ26**

Mały wózek stacza się bez tarcia po pochyłym torze zakończonym kołową pętlą o promieniu  $R$ . Z jakiej wysokości  $H$ , mierzonej od najwyższego punktu pętli, musi staczać się wózek, aby nie oderwać się od pętli na całej jej długości.

*Odpowiedź:*  $H = \frac{R}{2}$

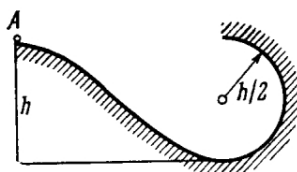
\*\*\* **Zadanie ZZ27**



Ciało ześlizguje się bez tarcia po zboczach opisanym przez funkcję  $h(x)$  (gładką i monotonicznie malejącą wraz z  $x$  zwiększającym się od 0 do  $L$ ). Zbocze zakończone jest (dla  $x = L$ ) pętlą o promieniu  $R$ . Wyznacz a) początkową wysokość niezbędną do tego, aby ciało nie oderwało się od pętli na całej jej długości (przy założeniu, że  $x(0) = 0$ ); b) zależność prędkości w kierunku  $X$  od wysokości  $h(x)$ . c) dla  $h(x) = h_0 \left[ 1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \right]$  pokaż, że całkowity czas zjazdu ze zbocza (pokonania odcinka  $[0, L]$  wzdłuż osi  $X$ ) można przedstawić jako  $\tau = \frac{L}{\sqrt{gh_0}} f(a)$ , gdzie  $a = \frac{\pi h_0}{2L}$  a  $f(a)$  to pewna całka oznaczona. Wyznacz  $f(a)$  i oszacuj  $\tau$  przy założeniu  $h_0 \gg L$ . Czemu równoważny jest uzyskany w ten sposób wynik?

Odpowiedź: a)  $h_0 = \frac{5}{2}R$ , b)  $\dot{x} = \sqrt{\frac{2g[b_0 - h(x)]}{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}}$ , c)  $f(a) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\xi \sqrt{\frac{1 + a^2 \cos^2 \xi}{\sin \xi}}$ ,  $\tau = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

\* **Zadanie ZZ28**



Małe ciało  $A$  ześlizguje się po zboczach o wysokości  $h$  a następnie porusza się po pętli o promieniu  $R$ . Jaka prędkość będzie miało ciało w momencie oderwania się od pętli? Jaka będzie prędkość ciała w chwili, w której osiągnie ono maksymalną wysokość?

Odpowiedź:  $v = \sqrt{\frac{gh}{3}}$ ,  $v_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{gh}{3}}$

\* **Zadanie ZZ29**

Ciało spoczywające w chwili początkowej na szczycie gładkiej kuli o promieniu  $R$  ześlizguje się z tej kuli pod wpływem siły ciężkości. Jaka odległość przebędzie to ciało zanim oderwie się od kuli?

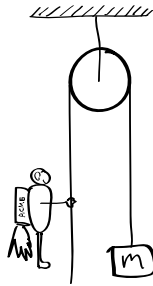
Odpowiedź:  $S = 0.84R$

★★ **Zadanie ZZ30**

Łódź podwodna o masie  $m$  jest napędzana w taki sposób, że woda pobierana na dziobie wyrzucana jest przez rufę ze stałą prędkością  $u$  względem łodzi. W wyniku tego procesu masa łodzi nie zmienia się. Wydajność pompy wyrzucającej wodę jest stała i wynosi  $dm_w/dt = \mu$ . W chwili  $t = 0$  zostaje włączony napęd łodzi. Wyznacz zależność prędkości łodzi od czasu, jeżeli siła oporu wody wynosi  $F = -kv$ , gdzie  $k$  to dodatnia stała a  $v$  - prędkość łodzi.

Odpowiedź:  $v(t) = \frac{u\mu}{k+\mu} \left( 1 - e^{-\frac{k+\mu}{m}t} \right)$

★★ **Zadanie ZZ31**



Przez przyczepiony do sufitu bloczek przerzucono linkę. Do jednego końca linki przyczepiono ciężarek o masie  $m$  a na drugi koniec wdrapała się małpa o masie  $M$ . Małpa nosi na plecach odrzutowy plecak firmy Acme. W chwili  $t = 0$  małpa uruchomiła zapłon plecaka i kurczowo chwyciła się linki. Jaka będzie prędkość małpy w funkcji czasu, jeśli plecak spala paliwo z szybkością  $dm_p/dt = \mu$  ( $\mu$  to stała większa od 0) i wyrzuca je z prędkością względną  $u$ ? Jaka będzie prędkość małpy, gdy  $\mu$  dąży do zera? Załóż, że plecak odrzutowy, jak wszystkie produkty Acme, jest cudem techniki posiadającym nieskończony zapas paliwa i którego masa jest pomijalnie mała w stosunku do masy małpy (możemy więc ją uznać za stałą).

Odpowiedź:  $v(t) = \frac{1}{\mu} [(m - M)g + \mu u] \left( 1 - e^{-\frac{\mu}{M+m}t} \right)$ ,  $v(t) \stackrel{\mu \rightarrow 0}{\approx} \frac{m-M}{m+M} g t$