SPRĘŻYNY I DRGANIA
ZADANIA

Zadanie SD1

Tłok w silniku wykonuje drgania harmoniczne opisane następującym równaniem

$$x(t) = 5\ \text{cm}\ \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right).$$

gdzie $x(t)$ to położenie tłoka w chwili t. Dla chwili $t = 0$ znajdź: a) położenie tłoka, b) jego prędkość i c) przyspieszenie. Znajdź również d) okres drgań i ich amplitudę.

Odpowiedź: a) $x(0) = 4.33$ cm, b) $v(0) = \dot{x}(0) = -5\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, c) $a(0) = \ddot{x}(0) = -17.32\ \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, d) $T =$ 3.14 s, $A = 5$ cm

Zadanie SD2

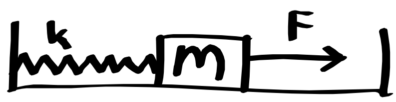
Wyznacz energię całkowitą ciała o masie m wykonującego drgania harmoniczne opisane wzorem

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

Podpowiedź: Potencjał dla siły harmonicznej to $U(x) = \frac{kx^2}{2}$.

Odpowiedź: $E = \frac{kA^2}{2}$, $k = \omega^2 m$

Zadanie SD3



W pewnej chwili na będące w spoczynku ciało o masie m, połączone ze ścianą sprężyną o stałej sprężystości k, zaczęła działać stała siła F. Jaka będzie częstość i amplituda drgań ciała?

Odpowiedź: $A = \frac{F}{k}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Zadanie SD4

Udowodnij, że jeśli uwzględnimy grawitację, wówczas energia masy zawieszonej na sprężynie daje się wyrazić w następujący sposób

$$E = \frac{k\Delta x^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \text{const.}$$

a zasada zachowania energii przyjmuje postać

$$\frac{k{\Delta x_0}^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{k{\Delta x_1}^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2},$$

przy czym Δx to odległość od nowego punktu równowagi (możemy więc, obierając za punkt odniesienia nowy punkt równowagi, nie uwzględniać energii potencjalnej grawitacji).

Zadanie SD5

Na sprężynie o długości d zawieszamy nieruchomą masę m. Pod wpływem tej masy sprężyna rozciąga się do długości $d + a$. Następnie druga taka sama masa m spada z wysokości a na pierwszą masę, zderzając się z nią niesprężyście. Znajdź okres drgań mas po zderzeniu i ich amplitudę.

Odpowiedź: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, $A = a\sqrt{2}$

Zadanie SD6

Na sprężynie wisi szalka, pod wpływem której sprężyna rozciąga się o odcinek d. Na szalkę z wysokości h spada ciężarek, zderzając się z nią niesprężyście. Znajdź okres i amplitudę drgań, jeżeli stosunek masy ciężarka do masy szalki wynosi η.

Odpowiedź: $T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}(1+\eta)}$, $A = \eta d\sqrt{1 + \frac{2h}{d}(1+\eta)^{-1}}$

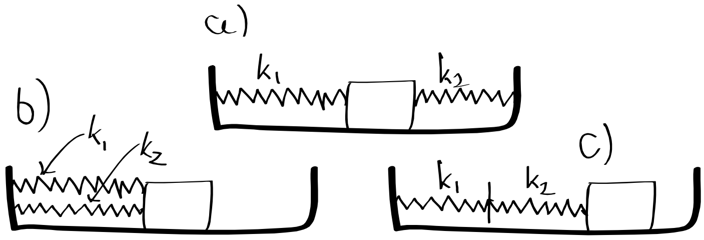
Zadanie SD7

Znajdź częstość i amplitudę drgań harmonicznych cząstki, jeżeli w odległościach x_1 i x_2 od punktu równowagi miała ona prędkości odpowiednio v_1 i v_2.

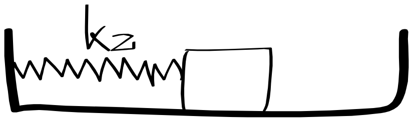
Odpowiedź: $\omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}}$, $A = \sqrt{\frac{v_2^2 x_1^2 - v_1^2 x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$

Zadanie SD8

Każda z poniższych konfiguracji



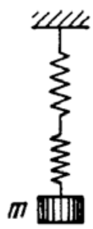
równoważna jest następującemu układowi



gdzie k_z to pewna zastępcza stała sprężystości. Wyznacz k_z dla wszystkich trzech przypadków.

Odpowiedź: a) $k_z = k_1 + k_2$, b) $k_z = k_1 + k_2$, c) $k_z = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1}$

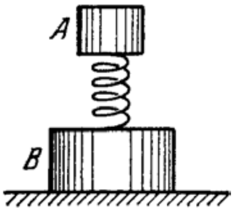
Zadanie SD9



Z jakim okresem będzie drgało ciało takie jak na rysunku, jeżeli jego masa to m a stałe sprężystości sprężyn wynoszą odpowiednio k_1 i k_2?

Odpowiedź: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{k_1+k_2}}{\mathrm{k_1k_2}}m}$

Zadanie SD10



Ciało A o masie m_1 i ciało B o masie m_2 połączono sprężyną jak na rysunku. Ciało A wykonuje drgania harmoniczne z amplituda a i częstością ω. Przyjmując, że masa sprężyny jest zaniedbywalna, znajdź maksymalną i minimalną siłę z jaką układ działa na podłoże.

Odpowiedź: $F = (m_1 + m_2)g \pm m_1 a \omega^2$

Zadanie SD11

Jaką minimalną pracę należy wykonać, aby rozciągnąć sprężynę o Δx w stosunku do jej długości równowagowej? Stała sprężystości wynosi k.

Odpowiedź: $W = \frac{k(\Delta x)^2}{2}$

Zadanie SD12

Jeżeli pewną sprężynę o stałej sprężystości k rozciągnięto o Δx w stosunku do jej długości równowagowej, to jaką pracę należy wykonać, aby rozciągnąć ją dodatkowo o Δy?

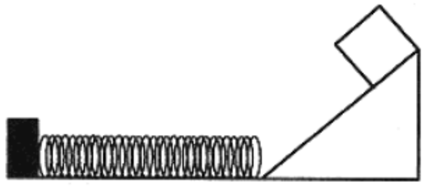
Odpowiedź: $W = \frac{k}{2}[(\Delta y)^2 + 2\Delta x \Delta y]$

Zadanie SD13

Ciało o masie m porusza się ze stałą prędkością v w kierunku sprężyny o stałej sprężystości k. O ile ściśnie się sprężyna do chwili, w której ciało zatrzyma się, jeżeli współczynnik tarcia dla powierzchni znajdującej się bezpośrednio pod sprężyną wynosi f? Jaką prędkość będzie miało ciało kiedy sprężyna powróci do długości równowagowej?

Odpowiedź: $\Delta x = \frac{mg}{k}\left[\sqrt{f^2 + \frac{kv^2}{mg^2}} - f\right]$, $v' = \sqrt{v^2 - 4gf\Delta x}$

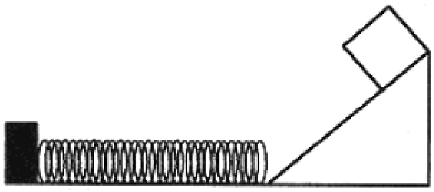
Zadanie SD14



Na szczycie równi pochyłej o wysokości h umieszczono ciało o masie m. U podnóża równi znajduje się sprężyna o stałej sprężystości k. O ile zostanie ściśnięta sprężyna w momencie, w którym ciało zatrzyma się?

Odpowiedź: $\Delta x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$

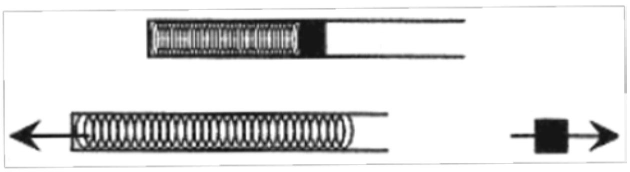
Zadanie SD15



Na szczycie równi pochyłej o wysokości h umieszczono ciało o masie m. U podnóża równi znajduje się sprężyna o stałej sprężystości k. O ile zostanie ściśnięta sprężyna w momencie, w którym ciało zatrzyma się, jeżeli współczynnik tarcia dla podłoża na którym znajduje się sprężyna wynosi f (nie ma tarcia podczas zjazdu z równi)?

Odpowiedź: $\Delta x = \frac{mg}{k}\left[\sqrt{f^2 + \frac{2kh}{mg}} - f\right]$

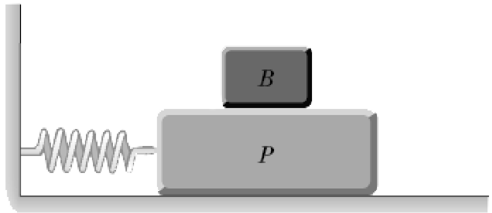
Zadanie SD16



Nabój o masie m umieszczono w lufie o masie M. W lufie znajduje się nieważka sprężyna, którą ściśnięto o Δx. Jeżeli po oddaniu strzału (zwolnieniu blokady sprężyny) prędkość lufy wynosi v_l (zakładamy, że pocisk i lufa mogą się swobodnie poruszać), to jaka będzie co do wartości prędkość pocisku?

Odpowiedź: $v_p = \frac{M}{m} v_l$

Zadanie SD17



Na bloczku P, który jest połączony ze ścianą sprężyną o stałej sprężystości k, spoczywa bloczek B. Jaka może być maksymalna amplituda drgań bloczka P, aby bloczek B nie zaczął się ślizgać podczas oscylacji? Współczynnik tarcia pomiędzy bloczkami wynosi f, a częstość drgań bloczka P - ω.

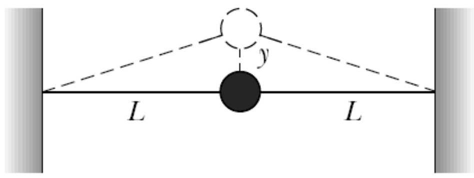
Odpowiedź: $A = \frac{gf}{\omega^2}$

Zadanie SD18

Płytka wykonuje drgania harmoniczne w kierunku poziomym o okresie T. Spoczywający na tej płytce przedmiot zaczyna poruszać się po powierzchni płytki z chwilą, gdy amplituda drgań osiąga wartość A. Jaki jest współczynnik tarcia pomiędzy płytką a przedmiotem?

Odpowiedź: $f = \frac{4\pi^2 A}{gT^2}$

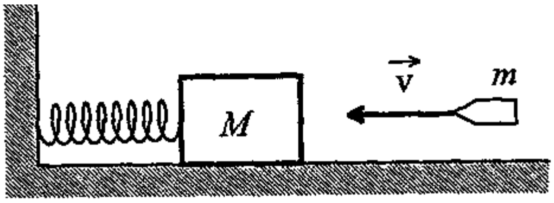
Zadanie SD19



Piłkę o masie m przyczepiono dwoma gumkami o długości L do ścianek (patrz rysunek) i wychylono o pewną bardzo małą odległość y do góry ($y \ll L$, możemy dzięki temu z dobrym przybliżeniem założyć, że napięcie gumek jest stałe i wynosi T). Czy układ będzie wykonywał drgania harmoniczne? Jeżeli tak, to jaka siła harmoniczna działa na piłkę i jaka będzie częstość tych drgań?

Odpowiedź: Tak, $\vec{F} = \left[0, -\frac{2T}{L} y\right]$, $\omega = \sqrt{\frac{2T}{mL}}$

Zadanie SD20



Na poziomym, doskonale gładkim stole, leży ciało o masie M. Ciało to przymocowane jest sprężyną do ściany. W pewnej chwili w ciało trafia pocisk o masie m lecący poziomo z prędkością v i zostaje w nim. Po zderzeniu ciało wraz z pociskiem wykonuje drgania harmoniczne z amplitudą A. Jaka jest częstość tych drgań?

Odpowiedź: $\omega = \frac{mv}{(M+m)A}$

Zadanie SD21

Drgający harmonicznie kamerton jest źródłem fali akustycznej o długości λ i prędkości v. Jaka będzie maksymalna prędkość punktu kamertonu drgającego z amplitudą A?

Odpowiedź: $v = \frac{2\pi A v}{\lambda}$

Zadanie SD22

Wahadło matematyczne o długości l wykonuje w pewnym czasie n_1 drgań. Jak należy zmienić długość tego wahadła, aby w tym samym czasie uzyskać n_2 drgań?

Odpowiedź: $\Delta l = \left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - 1\right] l$

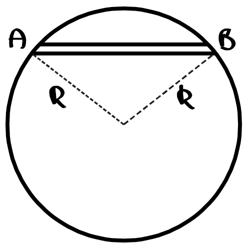
Zadanie SD23

Wyobraźmy sobie, że pewien student założył się ze swoimi kolegami z akademika o trzy (bezalkoholowe) piwa, że uda mu się wykopać łopatką tunel przechodzący przez środek Ziemi i wychodzący po drugiej stronie globu. Student zakład wygrał i w niepohamowanym przypływie radości wskoczył do tunelu. Wykaż, że student będzie wykonywał drgania harmoniczne wokół środka Ziemi. Jaka będzie częstość tych drgań i po jakim czasie student doleci na drugą stronę? Znana jest gęstość Ziemi p (zakładamy, że stała), jej promień R i stała grawitacji G ($G \neq g$! Małe g nie jest znane).

Podpowiedź: Siła ciężkości działająca na studenta we wnętrzu Ziemi będzie proporcjonalna do jego odległości od środka Ziemi.

Odpowiedź: $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi p G}$, $\tau = \sqrt{\frac{3\pi}{4pG}}$

Zadanie SD24



Pomiędzy dwoma miastami A i B wydrążono przechodzący po linii prostej pod powierzchnią Ziemi tunel. Po jakim czasie, przy zaniedbaniu ruchu obrotowego ziemi, wózek umieszczony na początku tunelu w mieście A dojedzie do miasta B? Promień Ziemi wynosi R.

Odpowiedź: $\tau = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

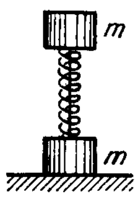
Zadanie SD25

Dwie masy, m_1 i m_2, połączono sprężyną o stałej sprężystości k (patrz rysunek powyżej). Masę 2 przesunięto w lewo o x i następnie puszczono. Znajdź prędkość środka masy układu w chwili, w której masa 1 odrywa się od ściany.

Podpowiedź: Położenie środka masy układu definiujemy jako $R = \frac{1}{\sum m_i}\sum m_i r_i$, gdzie r_i to położenie i-tej masy.

Odpowiedź: $v = \frac{\sqrt{m_2 k}}{m_1 + m_2} x$

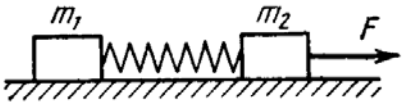
Zadanie SD26



Układ składa się z dwóch identycznych ciał o masie m, połączonych sprężyną o stałej sprężystości k. Ciała połączone są również nierozciągliwym sznurkiem, który naciąga sprężynę o Δl w stosunku do jej długości równowagowej. W pewnej chwili sznurek zostaje przepalony. A) Jakie musi być Δl, aby dolna masa oderwała się od ziemi? B) Na jaką wysokość wzniesie się środek masy układu, jeżeli $\Delta l = 7\frac{mg}{k}$?

Odpowiedź: a) $\Delta l = 3\frac{mg}{k}$, b) $h = 8\frac{mg}{k}$

Zadanie SD27

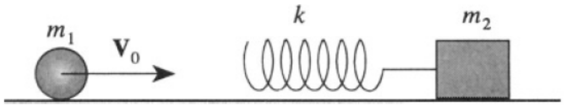


Dwie masy, m_1 i m_2, połączono sprężyną o stałej sprężystości k i długości równowagowej l. W pewnej chwili na ciało 2 zaczęła działać stała siła F. Znajdź największą i najmniejszą odległość pomiędzy masami podczas ruchu.

Podpowiedź: Jak będzie wyglądała sytuacja z punktu widzenia ciała 2?

Odpowiedź: $l_{\min} = l_0$, $l_{\max} = l_0 + 2\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{F}{k}$

Zadanie SD28



Ciało o masie m_1, poruszające się z początkową prędkością v_0, zderza się z układem składającym się z masy m_2 i przyłączonej do niej sprężyny o stałej sprężystości k. A) Jakie będzie maksymalne ściśnięcie (wychylenie od punktu równowagi) sprężyny podczas zderzenia? B) Jakie będą prędkości ciał po zderzeniu?

Uwaga: Zarówno ciało 1 jak i 2 mogą się poruszać po powierzchni.

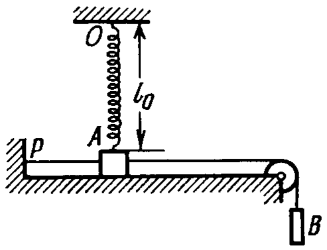
Odpowiedź: a) $\Delta l = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)k}}v_0$, b) $v_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_0$, $v_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0$

Zadanie SD29

Gładka gumka o stałej sprężystości k i długości l zaczepiona została w punkcie O (patrz rysunek). Następnie przewleczono przez nią nakrętkę A o masie m a na drugim końcu zawiązano węzeł B o średnicy większej od średnicy nakrętki. Nakrętkę podciągnięto aż do punktu O i puszczono swobodnie. Zaniedbując masy węzła i gumki oblicz maksymalne wydłużenie gumki.

Odpowiedź: $\Delta l = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}\right)$

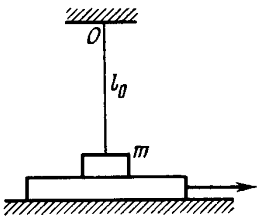
Zadanie SD30



Małe ciało A o masie m, znajdujące się na gładkiej powierzchni, przyczepione jest sznurkiem do ściany w punkcie P. Ciało to połączone jest również sznurkiem ze swobodnie zwisającym ciałem B o tej samej masie i z przyczepioną do sufitu, nierozciągniętą sprężyną o równowagowej długości l_0 i współczynniku sprężystości $k = \frac{5mg}{l_0}$. W pewnej chwili sznurek łączący ciało A ze ścianą został przepalony. Znajdź prędkość ciała A w chwili, w której oderwie się ono od podłoża.

Odpowiedź: $v = \sqrt{\frac{19}{32} g l_0}$

Zadanie SD31



Na dużej, spoczywającej na gładkiej powierzchni desce, położono małe ciało o masie m. Ciało to połączone jest z przyczepioną do sufitu w punkcie O, elastyczną linką o długości równowagowej l_0. Deska przesuwana jest powoli w prawą stronę do chwili, w której ciało zaczyna się ślizgać. Jaką pracę wykona do tej chwili działająca na ciało siła tarcia, jeżeli współczynnik tarcia wynosi f, a kąt nachylenia linki w stosunku do jej położenia początkowego to θ?

Odpowiedź: $W = \frac{fmg\, l_0(1-\cos\theta)}{2\cos\theta(\sin\theta + f\cos\theta)}$