Rachunek Zaburzeń*

Maciej J. Mrowiński

3 maja 2014

⋆ **Zadanie *RZ1***
Wyznacz poprawkę pierwszego rzędu do energii jeżeli cząstka porusza się w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [0, a] \\ \infty & \text{wpp} \end{cases}$$

przy zaburzeniu

$$W(x) = \begin{cases} V_0 & \text{gdy } x \in [0, a] \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Wyznacz również poprawkę pierwszego rzędu do wektora falowego stanu podstawowego.

Odpowiedź: $E_n^1 = V_0$, $|\psi_1^1\rangle = 0$

⋆ **Zadanie *RZ2***
Wyznacz poprawkę pierwszego rzędu do energii jeżeli cząstka porusza się w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [0, a] \\ \infty & \text{wpp} \end{cases}$$

przy zaburzeniu

$$W(x) = \begin{cases} V_0 & \text{gdy } x \in [0, \alpha a] \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

gdzie $\alpha \in [0, 1]$.

Odpowiedź: $E_n^1 = V_0 \left[\alpha - \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi\alpha) \right]$

⋆ **Zadanie *RZ3***
Wyznacz poprawkę pierwszego i drugiego rzędu do energii jeżeli cząstka porusza się w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [0, a] \\ \infty & \text{wpp} \end{cases}$$

*Skompilowane z wielu źródeł. Tylko do użytku na zajęciach.

przy zaburzeniu $W(x) = \alpha\delta(x - a/2)$. Wyznacz również poprawkę pierwszego rzędu do wektora falowego stanu podstawowego.

Odpowiedź: $E_n^1 = \begin{cases} \frac{2\alpha}{a} & \text{dla n nieparzystych} \\ 0 & \text{dla n parzystych} \end{cases}$, $|\psi_1^1\rangle = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4\alpha a m}{\pi^2\hbar^2(1-n^2)} \sin\frac{n\pi}{2}|\psi_n^0\rangle$,
$E_n^2 = \begin{cases} \frac{8m\alpha^2}{\hbar^2\pi^2}\sum_{l\neq n}\frac{1}{n^2-l^2} = -\frac{2m\alpha^2}{\hbar^2 n^2\pi^2} & \text{dla n nieparzystych} \\ 0 & \text{dla n parzystych} \end{cases}$

- ⋆ **Zadanie *RZ4***
  Stała sprężystości pewnego kwantowego oscylatora harmonicznego zmieniła się w następujący sposób: $k' = (1+\varepsilon)k$, gdzie k to pierwotna stała sprężystości a $\varepsilon \ll 1$. Wyznacz poprawki pierwszego i drugiego rzędu do energii.

  Odpowiedź: $E_n^1 = \frac{\hbar\omega\varepsilon}{4}(2n+1)$, $E_n^2 = -\frac{\hbar\omega\varepsilon^2}{16}(2n+1)$

- ⋆ **Zadanie *RZ5***
  Cząstka, której ładunek wynosi q, znajduje się w potencjale oscylatora harmonicznego. Załóżmy, że na cząstkę zaczęło dodatkowo działać słabe pole elektryczne E, wprowadzające zaburzenie $W(x) = -qEx$. Wyznacz poprawki pierwszego i drugiego rzędu do energii.

  Odpowiedź: $E_n^1 = 0$, $E_n^2 = -\frac{(qE)^2}{2m\omega^2}$

- ⋆ **Zadanie *RZ6***
  Hamiltonian w pewnym układzie reprezentowany jest przez następującą macierz:

  $$H = V_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

  Dodatkowo w układzie wprowadzono zaburzenie:

  $$H = V_0\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Korzystając z rachunku zaburzeń znajdź dopuszczalne poziomy energii z dokładnością do poprawek drugiego rzędu i porównaj uzyskane wyniki z wynikami dokładnymi.

  Odpowiedź: $E_1 = V_0\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$, $E_2 = V_0\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$, $E_3 = V_0(\varepsilon - 2)$

- ⋆ **Zadanie *RZ7***
  Cząstka może poruszać się swobodnie w jednym wymiarze po odcinku o długości L, którego końce połączone są ze sobą (periodyczne warunki brzegowe). Wyznacz poprawki pierwszego rzędu do energii, jeżeli wprowadzono w układzie zaburzenie do potencjału: $W(x) = -V_0 e^{-x^2/a^2}$, przy czym $a \ll L$. Podpowiedź: całkowanie można

rozciągnąć do nieskończoności.

Odpowiedź: $E^1_{n,\pm} = -\frac{V_0 a\sqrt{\pi}}{L}\left(1 \pm e^{-\left(\frac{2\pi a n}{L}\right)^2}\right)$

⋆ **Zadanie *RZ8***
Cząstka porusza się w nieskończonej, dwuwymiarowej studni potencjału w kształcie kwadratu o długości boku wynoszącej a:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [0,a], y \in [0,a] \\ \infty & \text{wpp} \end{cases}$$

Wyznacz poprawki pierwszego rzędu do energii dwóch najniższych poziomów energetycznych, jeżeli do układu wprowadzono zaburzenie: $W(x,y) = Cxy$. Znajdź również stany cząstki odpowiadające dwóm poprawkom do energii pierwszego stanu wzbudzonego.

Odpowiedź: $E^1_0 = \frac{a^2 C}{4}$, $E^1_{1,1} = a^2 C\left[\frac{1}{4} + \frac{256}{81\pi^4}\right]$, $E^1_{1,2} = a^2 C\left[\frac{1}{4} - \frac{256}{81\pi^4}\right]$,
$|\psi^0_{1,1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{1,2}\rangle + |\psi_{2,1}\rangle\right)$, $|\psi^0_{1,1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{1,2}\rangle - |\psi_{2,1}\rangle\right)$

⋆ **Zadanie *RZ9***
Elektron o energii $3\pi^2\hbar^2/ma^2$ znajduje się w nieskończonej, trójwymiarowej studni potencjału w kształcie sześcianu o długości boku wynoszącej a:

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [0,a], y \in [0,a], z \in [0,a] \\ \infty & \text{wpp} \end{cases}$$

Jaka będzie energia elektronu z dokładnością do poprawki pierwszego rzędu, jeżeli w układzie działa dodatkowo słabe pole elektryczne E wprowadzające zaburzenie: $W(x,y,z) = eEz$.

Odpowiedź: $E_e = \frac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2} + \frac{eEa}{4}$

⋆ **Zadanie *RZ10***
Cząstka porusza się w nieskończonej, trójwymiarowej studni potencjału w kształcie sześcianu o długości boku wynoszącej a:

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in [0,a], y \in [0,a], z \in [0,a] \\ \infty & \text{wpp} \end{cases}$$

Wyznacz poprawki pierwszego rzędu do energii dwóch najniższych poziomów energetycznych, jeżeli do układu wprowadzono zaburzenie:

$$W(x,y,z) = \begin{cases} V_0 & \text{gdy } x \in [0,a/2], y \in [0,a/2], z \in [0,a] \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Odpowiedź: $E^1_0 = \frac{V_0}{4}$, $E^1_{1,1} = \frac{V_0}{4}$, $E^1_{1,2} = \frac{V_0}{4}(1+\xi)$ i $E^1_{1,3} = \frac{V_0}{4}(1-\xi)$, gdzie $\xi = \left(\frac{8}{3\pi}\right)^2$

⋆ **Zadanie** ***RZ11***

Cząstka porusza się w nieskończonej, trójwymiarowej studni potencjału w kształcie sześcianu o długości boku wynoszącej a:

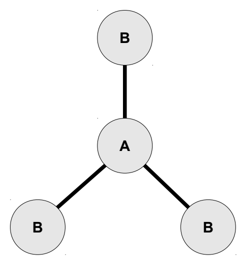
$$V(x,y,z)=\begin{cases} 0 & \text{gdy } x\in[0,a], y\in[0,a], z\in[0,a] \\ \infty & \text{wpp} \end{cases}$$

Wyznacz poprawki pierwszego rzędu do energii dwóch najniższych poziomów energetycznych, jeżeli do układu wprowadzono zaburzenie: $W(x)=a^3V_0\delta(x-a/4)\delta(y-a/2)\delta(z-3a/4)$

Odpowiedź: $E_0^1=2V_0$, $E_{1,1}^1=0$, $E_{1,2}^1=0$ i $E_{1,3}^1=8V_0$

⋆ **Zadanie** ***RZ12***

Pewna molekuła składa się z czterech atomów - jednego atomu typu A i trzech atomów typu B:



Elektron może znajdować się w pobliżu każdego z atomów, przy czym jego energia w pobliżu atomu typu A wynosi E_A, a w pobliżu atomu typu B wynosi E_B. Skonstruuj Hamiltonian dla tego problemu. Następnie wprowadź jako zaburzenie możliwość przeskoku elektronu z atomów typu B na A, oraz z A na B, jeżeli energia związana z takim przeskokiem to E_t. Wyznacz poprawki pierwszego i drugiego rzędu do energii poziomu niezdegenerowanego i poprawki pierwszego rzędu w przypadku degeneracji. Porównaj uzyskane wyniki z wynikami dokładnymi.

Odpowiedź: $E_0^1=0$, $E_0^2=\frac{3E_t^2}{E_A-E_B}$, $E_{1,1}^1=E_{1,2}^1=E_{1,3}^1=0$

⋆ **Zadanie** ***RZ13***

Korzystając z rachunku zaburzeń wyznacz prawdopodobieństwa przejść pomiędzy stanami dla zaburzeń $W_s(t)=\tilde{W}\sin(\omega t)$ i $W_c(t)=\tilde{W}\cos(\omega t)$, gdzie $\tilde{W}$ to pewien niezależny od czasu operator, którego macierz $\tilde{W}_{ij}$ jest znana.

Odpowiedź: $P_{if}^s=\frac{|\tilde{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2}\left|\frac{1-e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{\omega_{fi}+\omega}-\frac{1-e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi}-\omega}\right|^2$,
$P_{if}^c=\frac{|\tilde{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2}\left|\frac{1-e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{\omega_{fi}+\omega}+\frac{1-e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi}-\omega}\right|^2$

⋆ **Zadanie** ***RZ14***

Ładunek q znajduje się w potencjale oscylatora harmonicznego o częstości ω_0. W chwili początkowej $t=0$ w układzie pojawia się stałe pole elektryczne E, które działa przez τ sekund. Znajdź prawdopodobieństwa przejść pomiędzy stanami po wyłączeniu pola. Jakie będą prawdopodobieństwa przejścia ze stanu podstawowego do pierwszego i drugiego stanu wzbudzonego?

Odpowiedź: $P_{n_i n_f} = \frac{(qE)^2}{2m\omega_0 \hbar}\left(\sqrt{n_i+1}\delta_{n_f,n_i+1} + \sqrt{n_i}\delta_{n_f,n_i-1}\right)^2 \left[\frac{\sin\frac{\omega_{n_f n_i}}{2}\tau}{\frac{\omega_{n_f n_i}}{2}}\right]^2$,
$P_{01} = \frac{(qE)^2}{2m\omega_0 \hbar}\left[\frac{\sin\frac{\omega_0}{2}\tau}{\frac{\omega_0}{2}}\right]^2$, $P_{02} = 0$

⋆ **Zadanie *RZ15***
Ładunek q znajduje się w potencjale oscylatora harmonicznego o częstości ω_0. W układzie działa pole elektryczne $E(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}\tau} e^{-\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2}$. Jeżeli układ znajdował się w stanie podstawowym, to jakie jest prawdopodobieństwo jego ekscytacji?

Odpowiedź: $P = \frac{(qA)^2}{2m\hbar\omega_0} e^{-\frac{\omega_0 \tau^2}{2}}$

⋆ **Zadanie *RZ16***
Załóżmy, że Hamiltonian w pewnym układzie ma dwa wektory własne $|E_1\rangle$ i $|E_2\rangle$, którym odpowiadają wartości własne E_1 i E_2 ($E_2 - E_1 = \hbar\tilde{\omega}$). W chwili $t = 0$ pojawia się zaburzenie, którego macierz to $\langle E_1| W |E_1\rangle = 0$, $\langle E_2| W |E_1\rangle = \hbar\omega_0$ i $\langle E_2| W |E_2\rangle = -\hbar\omega_0$. Wyznacz prawdopodobieństwo przejścia ze stanu $|E_1\rangle$ do stanu $|E_2\rangle$ po upływie czasu t.

Odpowiedź: $P_{12} = \omega_0^2 \left[\frac{\sin\frac{\omega_{21}}{2}t}{\frac{\omega_{21}}{2}}\right]^2$