Matematyczne Narzędzia Mechaniki Kwantowej*

Maciej J. Mrowiński

12 czerwca 2013

⋆ **Zadanie *MN1***
Udowodnij, że dla komutatora dwóch operatorów zdefiniowanego jako $[A,B]=AB-BA$ zachodzą następujące równości:
a) $[A,B]=-[B,A]$
b) $[A,B+C]=[A,B]+[A,C]$
c) $[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$
d) $[A,B]^\dagger=[B^\dagger,A^\dagger]$

⋆ **Zadanie *MN2***
Wyznacz $[X,P^n]$, gdzie X to operator położenia a P to operator pędu. Następnie wyznacz $[X,F(P)]$, gdzie F to funkcja operatora pędu.

Odpowiedź: $[X,P^n]=i\hbar nP^{n-1}$, $[X,F(P)]=i\hbar F'(P)$

⋆ **Zadanie *MN3***
Dla operatorów A, B i stałej λ wykaż następujące zależności: $(A^\dagger)^\dagger=A$, $(\lambda A)^\dagger=\lambda^* A^\dagger$, $(A+B)^\dagger=A^\dagger+B^\dagger$ oraz $(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$.

⋆ **Zadanie *MN4***
Udowodnij, że jeżeli w pewnej dyskretnej bazie $|u_i\rangle$ operator A jest reprezentowany przez macierz A_{ij}, wówczas sprzężenie hermitowskie tego operatora reprezentuje macierz $A^\dagger_{ij}=A^*_{ji}$.

⋆ **Zadanie *MN5***
Wykaż, że po dokonaniu wyboru pewnej dyskretnej bazy ortonormalnej $|u_i\rangle$ wynik działania operatora A na ket $|\psi\rangle$ daje się przedstawić w formie iloczynu dwóch macierzy, reprezentujących operator i ket.

⋆ **Zadanie *MN6***
Niech kety $|u_i\rangle$ oraz $|t_k\rangle$ stanowią dwie dyskretne, ortonormalne bazy. Mając daną macierz $S_{ik}=\langle u_i|\, t_k\rangle$ oraz składowe $\langle u_i|\, \psi\rangle$ pewnego ketu $|\psi\rangle$ w bazie $|u_i\rangle$, wyznacz

*Skompilowane z wielu źródeł. Tylko do użytku na zajęciach.

składowe tego ketu w bazie $|t_k\rangle$. Zrób to samo dla operatora A, który w bazie $|u_i\rangle$ reprezentowany jest przez macierz $A_{ij} = \langle u_i | A | u_j \rangle$.

Odpowiedź: $\langle t_k | \psi \rangle = \sum_i S^\dagger_{ki} \langle u_i | \psi \rangle$, $A_{kl} = \langle t_k | A | t_l \rangle = \sum_{i,j} S^\dagger_{ki} A_{ij} S_{jl}$

⋆ **Zadanie *MN7***
Udowodnij, że operatory Hermitowskie mają rzeczywiste wartości własne.

⋆ **Zadanie *MN8***
Udowodnij, że dla operatorów Hermitowskich dwa wektory własne odpowiadające dwóm różnym wartościom własnym są ortogonalne.

⋆ **Zadanie *MN9***
Wykaż, że operator A, którego wektory własne $|u_i\rangle$ stanowią dyskretną bazę ortonormalną, można wyrazić jako $A = \sum_i \lambda_i |u_i\rangle\langle u_i|$, gdzie λ_i jest wartością własną odpowiadającą wektorowi $|u_i\rangle$.

⋆ **Zadanie *MN10***
Wyznacz wektory własne i wartości własne dla operatora $P_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, gdzie dla wektora $|\Psi\rangle$ zachodzi $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$.

Odpowiedź: Wartości własnej 1 odpowiada sam wektor $|\Psi\rangle$, wartości własnej 0 odpowiadają wszystkie wektory $|\phi\rangle$ z podprzestrzeni ortogonalnej do $|\Psi\rangle$.

⋆ **Zadanie *MN11***
Udowodnij, że przy braku degeneracji dwa komutujące ze sobą operatory Hermitowskie A i B mają te same wektory własne. Udowodnij również, że przy degeneracji jesteśmy w stanie tak dobrać bazę, aby stanowiące ją wektory były wektorami własnymi zarówno operatora A jak i B.

⋆ **Zadanie *MN12***
Udowodnij, że ślad operatora A: $\mathrm{Tr} A = \sum_i \langle u_i | A | u_i \rangle$ (gdzie $|u_i\rangle$ to pewna dyskretna baza ortonormalna) nie zależy od wyboru bazy. Udowodnij również, że dla dwóch operatorów A i B zachodzi $\mathrm{Tr} AB = \mathrm{Tr} BA$.

⋆ **Zadanie *MN13***
Udowodnij, że jeżeli dla pewnego operatora Hermitowskiego A zachodzi $A^3 = \mathbb{1}$, wówczas oznacza to, że $A = \mathbb{1}$.

⋆ **Zadanie *MN14***
Wykaż, że dla Hermitowskiego operatora A operator $T = e^{iA}$ jest unitarny.

⋆ **Zadanie *MN15***
Udowodnij, że wartości własne operatorów unitarnych są liczbami zespolonymi o module jeden. Udowodnij również, że wektory własne operatorów unitarnych są do

siebie ortogonalne jeżeli odpowiadają różnym wartościom własnym.

★ **Zadanie *MN16***
Wykaż, że jeżeli $|u_i\rangle$ są dyskretną bazą ortonormalną a U to pewien operator unitarny, wówczas $|\tilde{u}_i\rangle = U|u_i\rangle$ również stanowią dyskretną bazę ortonormalną.

★ **Zadanie *MN17***
Niech A i U będą operatorami, przy czym U jest unitarny. Dodatkowo, niech $|u_i\rangle$ będą pewną dyskretną bazą ortonormalną. Wyznacz operator $\tilde{A}$, którego macierz w bazie $U|u_i\rangle$ jest taka sama, jak w bazie $|u_i\rangle$.

Odpowiedź: $\tilde{A} = UAU^\dagger$

★ **Zadanie *MN18***
Załóżmy, że mamy dany operator A i pewien unitarny operator U. Wykaż, że w przypadku, kiedy $|u_i\rangle$ są wektorami własnymi A, wówczas $|\tilde{u}_i\rangle = U|u_i\rangle$ są wektorami własnymi operatora $\tilde{A} = UAU^\dagger$.

★ **Zadanie *MN19***
W pewnej bazie kety $|\psi\rangle$ i $|\xi\rangle$ mają następującą reprezentację:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{bmatrix}, \ |\xi\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ 2-3i \end{bmatrix}$$

Wyznacz bra $\langle\xi|$ w tej samej bazie oraz $\langle\xi|\,\psi\rangle$.

Odpowiedź: $\langle\xi| = \left[2, i, 2+3i\right]$, $\langle\xi|\,\psi\rangle = 7+8i$

★ **Zadanie *MN20***
W pewnej przestrzeni kety $|\phi_1\rangle$ oraz $|\phi_2\rangle$ stanowią dyskretną bazę ortonormalną. Dla ketów $|\xi\rangle = -|\phi_1\rangle + 2i\,|\phi_2\rangle$ oraz $|\psi\rangle = 3i\,|\phi_1\rangle - 7i\,|\phi_2\rangle$ wyznacz $\langle\xi|\,\psi\rangle$.

Odpowiedź: $\langle\xi|\,\psi\rangle = -14-3i$

★ **Zadanie *MN21***
Mając dane kety $|\psi\rangle = 2i\,|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle - a\,|\phi_3\rangle + 4\,|\phi_4\rangle$ oraz $|\xi\rangle = 3\,|\phi_1\rangle - i\,|\phi_2\rangle + 5\,|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle$ (gdzie kety $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$, $|\phi_3\rangle$ i $|\phi_4\rangle$ stanowią dyskretną bazę ortonormalną) dobierz stałą a tak, aby $|\psi\rangle$ i $|\xi\rangle$ były ortogonalne.

Odpowiedź: $a = \frac{7i-4}{5}$

★ **Zadanie *MN22***
Dany jest pewien operator A (nie zakładamy nic na temat tego, czy jest on Hermitowski). Czy operatory a) $(A+A^\dagger)$, b) $i(A+A^\dagger)$ oraz c) $i(A-A^\dagger)$ są Hermitowskie?

Odpowiedź: a) tak, b) nie, c) tak

⋆ **Zadanie** ***MN23***

Dany jest pewien operator A, którego wektorom własnym $|\alpha_i\rangle$ odpowiadają wartości własne α_i. Zakładając, że istnieje operator odwrotny do A, znajdź jego wartości własne i wektory własne.

Odpowiedź: Wektory własne będą takie same, jak dla operatora A. Wartości własne odpowiadające wektorom własnym będą równe $\frac{1}{\alpha_i}$.

⋆ **Zadanie** ***MN24***

W pewnej bazie kety $|\psi\rangle$ i $|\xi\rangle$ mają następującą reprezentację:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} 5i \\ 2 \\ -i \end{bmatrix}, \ |\xi\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 8i \\ -9i \end{bmatrix}$$

Czy ket $|\psi\rangle$ jest unormowany? Jeżeli nie, to go unormuj. Czy kety $|\psi\rangle$ i $|\xi\rangle$ są ortogonalne?

Odpowiedź: Unormowany będzie ket $\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5i \\ 2 \\ -i \end{bmatrix}$. Kety $|\psi\rangle$ i $|\xi\rangle$ nie są ortogonalne.

⋆ **Zadanie** ***MN25***

W pewnej bazie operator A reprezentowany jest przez następującą macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & -i & -2 \end{bmatrix}$$

Wyznacz macierz reprezentującą w tej samej bazie operator odwrotny do A.

Odpowiedź: $A^{-1} = \frac{1}{-4+16i} \begin{bmatrix} -2+5i & 2i & 5i \\ 6 & -4 & -10 \\ -3i & 2i & 2-3i \end{bmatrix}$

⋆ **Zadanie** ***MN26***

W pewnej bazie operator A oraz kety $|\psi\rangle$ i $|\xi\rangle$ reprezentowane są przez następujące macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3+2i & 3i \\ -i & 3i & 8 \\ 1-i & 1 & 4 \end{bmatrix}, |\psi\rangle = \begin{bmatrix} -1+i \\ 3 \\ 2+3i \end{bmatrix}, |\xi\rangle = \begin{bmatrix} 6 \\ i \\ 5 \end{bmatrix}$$

Wyznacz ket $A|\psi\rangle$ i bra $\langle\xi|A$. Sprawdź, czy faktycznie $(\langle\xi|A)|\psi\rangle = \langle\xi|(A|\psi\rangle)$. Znajdź macierz reprezentującą w tej samej bazie operator $A^\dagger$.

Odpowiedź: $A|\psi\rangle = \begin{bmatrix} -5+17i \\ 17+34i \\ 11+14i \end{bmatrix}$, $\langle\xi|A = \begin{bmatrix} 34-5i, 26+12i, 20+10i \end{bmatrix}$,
$A^\dagger = \begin{bmatrix} 5 & i & 1+i \\ 3-2i & -3i & 1 \\ -3i & 8 & 4 \end{bmatrix}$

⋆ **Zadanie** ***MN27***

W pewnej bazie operator A reprezentowany jest przez następującą macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{bmatrix}$$

Wyznacz wartości własne i reprezentacje wektorów własnych tego operatora.

Odpowiedź: $\lambda_1 = 7 \to |7\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = \sqrt{2} \to |\sqrt{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ \sqrt{2}-1 \end{bmatrix}$,
$\lambda_3 = -\sqrt{2} \to |-\sqrt{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \begin{bmatrix} 0 \\ -i(1-\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$

⋆ **Zadanie** ***MN28***

W pewnej bazie operator A reprezentowany jest przez następującą macierz:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Wyznacz wartości własne i reprezentacje wektorów własnych tego operatora. Sprawdź, czy uzyskane wektory są ortogonalne.

Odpowiedź: $\lambda_1 = 1 \to |1;1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 1 \to |1;2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
$\lambda_3 = 2 \to |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

⋆ **Zadanie** ***MN29***

W pewnej bazie operatory A i B reprezentowane są przez następujące macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Czy można tak dobrać bazę, aby reprezentacje obu operatorów były w niej diagonalne (patrz ***MN11***)? Jeżeli tak, to znajdź wektory tej bazy oraz przedstaw w niej macierze odpowiadające tym dwóm operatorom.

Odpowiedź: $|-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,
$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

⋆ **Zadanie** ***MN30***

W pewnej bazie trzy ortonormalne kety reprezentowane są przez następujące macierze:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}, |e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Wyznacz macierze reprezentujące w tej samej bazie operatory rzutu na trzy kierunki określone przez powyższe kety. Sprawdź, czy faktycznie $\sum_{i=1}^{3}|e_i\rangle\langle e_i| = \mathbb{1}$.

Odpowiedź: $|e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $|e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}$,
$|e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

⋆ **Zadanie** ***MN31***

Załóżmy, że Hamiltonian w bazie ortonormalnych ketów $|\phi_1\rangle$ i $|\phi_2\rangle$ reprezentowany jest przez macierz:

$$H = \begin{bmatrix}h & g\\ g & h\end{bmatrix}$$

gdzie h i g to rzeczywiste stałe. Jeżeli stan cząstki w chwili początkowej jest dowolną (ale unormowaną) liniową kombinacją wektorów tej bazy: $|\psi(0)\rangle = a|\phi_1\rangle + b|\phi_2\rangle$ wyznacz ket opisujący stan cząstki po upływie czasu t.

Odpowiedź: $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)e^{-\frac{i(h+g)t}{\hbar}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)e^{-\frac{i(h-g)t}{\hbar}}|-\rangle$,
$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

⋆ **Zadanie** ***MN32***

W pewnej bazie Hamiltonian H i stan cząstki $|\psi\rangle$ reprezentowane są przez następujące macierze:

$$H = \varepsilon_0\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}, |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}i\\-i\\i\end{bmatrix}$$

Wyznacz prawdopodobieństwa pomiaru poszczególnych energii, $<H>$, $<H^2>$ oraz zależność wektora $|\psi\rangle$ od czasu.

Odpowiedź: $P(\varepsilon_0) = \frac{2}{3}$, $P(3\varepsilon_0) = \frac{1}{3}$, $<H>= \frac{5}{3}\varepsilon_0$, $<H^2>= \frac{11}{3}\varepsilon_0^2$,
$|\psi(t)\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3\varepsilon_0 i}{\hbar}t}|e_1\rangle + \frac{2i}{\sqrt{6}}e^{-\frac{\varepsilon_0 i}{\hbar}t}|e_2\rangle$, $|e_1\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

⋆⋆ **Zadanie** ***MN33***

Załóżmy, że w bazie położeniowej wektor falowy ma następującą reprezentację:

$$\psi(x) = \frac{A}{x^2+a^2}$$

gdzie a i A to pewne rzeczywiste stałe. Znajdź reprezentację tego wektora falowego w bazie pędowej a następnie korzystając z niej wyznacz stałą A oraz średni pęd i średni kwadrat pędu. Korzystając z reprezentacji położeniowej wyznacz średnie położenie i średni kwadrat położenia. Sprawdź zasadę nieoznaczoności. *Podpowiedź:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\alpha|}$$

Odpowiedź: $A = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}}$, $\psi(p) = \sqrt{\frac{a}{\hbar}} e^{-\frac{a|p|}{\hbar}}$, $\langle p \rangle = 0$, $\left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{a\sqrt{2}}$, $\langle x \rangle = 0$, $\left\langle x^2 \right\rangle = a^2$, $\sigma_x \sigma_p = \sqrt{2}\frac{\hbar}{2}$

⋆ **Zadanie *MN34***

Wyznacz reprezentację pędową wektora falowego dla cząstki znajdującej się w n-tym stanie stacjonarnym nieskończonej studni potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, a] \\ +\infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Odpowiedź: $\psi(p,t) = \sqrt{\frac{a\pi}{\hbar}} \frac{n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}}{(n\pi)^2 - \left(\frac{pa}{\hbar}\right)^2} \left[1 - (-1)^n e^{\frac{-iap}{\hbar}}\right]$

⋆ **Zadanie *MN35***

Do definiowania funkcji operatorów można podejść na dwa sposoby. Jeżeli funkcja $f(x)$ daje się przedstawić w postaci szeregu potęgowego:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$$

wówczas dla operatora A definiujemy nowy operator $f(A)$ jako:

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, A^n$$

Jakie będą wartości własne i wektory własne operatora $f(A)$? Jaką postać będzie miał operator sprzężony $f(A)^\dagger$ jeżeli $f(x)$ jest rzeczywista? Korzystając z powyższych wyników możemy zdefiniować funkcję operatora dla przypadku bardziej ogólnego, kiedy nie wymagamy aby funkcja $f(x)$ była rozwijalna w szereg potęgowy. Jeżeli kety $|\alpha_i\rangle$ są wektorami własnymi operatora A (i stanowią bazę, ale my i tak robimy ciche założenie, że pracujemy z obserwablami) którym odpowiadają wartości własne α_i, wówczas operator $f(A)$ definiujemy jako:

$$f(A) = \sum_i f(\alpha_i)\, |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$$

Wykaż, że w przypadku funkcji dających się przedstawić w postaci szeregu potęgowego te dwie definicje są równoważne.

Odpowiedź: Operator $f(A)$ będzie miał te same wektory własne co A. Odpowiadać im będą wartości własne $f(\alpha_i)$. $f(A)^\dagger = f(A^\dagger)$.

⋆ **Zadanie *MN36***

Niech $V(X)$ będzie operatorem potencjału, który odpowiada funkcji potencjału $V(x)$. Jakie są jego wektory własne? Jakie są wartości własne? Wyznacz macierz tego operatora w bazie położeniowej i pędowej.

Odpowiedź: Jego wektory własne to $|x\rangle$ (czyli takie same, jak operatora X); wartości własne: wektorowi $|x\rangle$ odpowiada $V(x)$. W bazie położeniowej macierz operatora potencjału to $\langle x|\ V(X)\ |\ x'\rangle = \delta(x-x')V(x')$, natomiast w bazie pędowej $\langle p|\ V(X)\ |\ p'\rangle = \int dx\ u_p^*(x)V(x)u_{p'}(x)$, gdzie $u_p(x)$ to reprezentacje wektorów własnych operatora pędu w bazie położeniowej.

⋆ **Zadanie *MN37***

Wyznacz różniczkową postać operatora położenia X w reprezentacji pędowej.

Odpowiedź: $X = i\hbar\frac{d}{dp}$

⋆ **Zadanie *MN38***

Wykaż, że w bazie pędowej działanie operatora potencjału $V(X)$ (odpowiadającego pewnej funkcji potencjału $V(x)$, którą można przedstawić w postaci szeregu potęgowego) na wektor falowy $|\Psi\rangle$ można przedstawić w postaci różniczkowej zależności:

$$V\left(i\hbar\frac{d}{dp}\right)\Psi(p)$$

⋆ **Zadanie *MN39***

Rozwiąż w bazie pędowej zagadnienie własne dla hamiltonianu cząstki swobodnej a następnie przedstaw uzyskane wyniki w bazie położeniowej.

Odpowiedź: $\langle p|\ E;+\rangle = \delta(p-\sqrt{2mE})$, $\langle p|\ E;-\rangle = \delta(p+\sqrt{2mE})$, $\langle x|\ E;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i\sqrt{2mE}x}{\hbar}}$, $\langle x|\ E;-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{-i\sqrt{2mE}x}{\hbar}}$, Wszystkie wartości energii są dopuszczalne.

⋆ **Zadanie *MN40***

Rozwiąż równanie Schrödingera (zależne od czasu) w bazie pędowej dla cząstki swobodnej i udowodnij, rozkład gęstości prawdopodobieństwa pędów nie zależy od czasu.

⋆ **Zadanie *MN41***

Załóżmy, że potencjał zależy od pędu cząstki $V = \alpha p$ (gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$). Rozwiąż w bazie pędowej zagadnienie własne dla hamiltonianu a następnie przedstaw uzyskane wyniki w bazie położeniowej.

Odpowiedź: $\langle p|\ E;+\rangle = \delta(p-p_+)$, $\langle p|\ E;+\rangle = \delta(p-p_-)$,

$\langle x|\, E;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ip_+ x}{\hbar}}$, $\langle x|\, E;-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ip_- x}{\hbar}}$, $p_\pm = -m\alpha\left(1 \mp \sqrt{1+\frac{2E}{m\alpha^2}}\right)$, Wszystkie wartości energii są dopuszczalne.

★ **Zadanie *MN42***

Wyraź operatory X i P poprzez drabinkowe operatory dla oscylatora harmonicznego.

Odpowiedź: $X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-)$, $P = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a_+ - a_-)$

★ **Zadanie *MN43***

Wyznacz $< x >, < p >, < T >$ (średnią energię kinetyczną) i $< U >$ (średnią energię potencjalną) dla cząstki, która znajduje się w n-tym stanie własnym Hamiltonianu oscylatora harmonicznego.

Odpowiedź: $< x > = < p > = 0, < T > = < U > = \frac{\hbar\omega}{4}(2n+1)$

★ **Zadanie *MN44***

Wyznacz ogólne wzory na elementy macierzy reprezentujących operatory X, P, X^2, P^2 i PX w bazie wektorów własnych Hamiltonianu oscylatora harmonicznego.

Odpowiedź: $\langle n|\, X \,|\, m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \times \begin{cases} \sqrt{m} & \text{gdy } n = m-1 \\ \sqrt{m+1} & \text{gdy } n = m+1 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$,

$$\langle n|\, P \,|\, m\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \times \begin{cases} -\sqrt{m} & \text{gdy } n = m-1 \\ \sqrt{m+1} & \text{gdy } n = m+1 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases},$$

$$\langle n|\, X^2 \,|\, m\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \times \begin{cases} \sqrt{m(m-1)} & \text{gdy } n = m-2 \\ 2m+1 & \text{gdy } n = m \\ \sqrt{(m+1)(m+2)} & \text{gdy } n = m+2 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases},$$

$$\langle n|\, P^2 \,|\, m\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2} \times \begin{cases} \sqrt{m(m-1)} & \text{gdy } n = m-2 \\ -(2m+1) & \text{gdy } n = m \\ \sqrt{(m+1)(m+2)} & \text{gdy } n = m+2 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases},$$

$$\langle n|\, PX \,|\, m\rangle = \frac{i\hbar}{2} \times \begin{cases} \sqrt{n(n-1)} & \text{gdy } n = m-2 \\ 1 & \text{gdy } n = m \\ \sqrt{(n+1)(n+2)} & \text{gdy } n = m+2 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

★ **Zadanie *MN45***

Wyznacz pierwszych 6×6 elementów macierzy reprezentujących operatory X i P w bazie wektorów własnych Hamiltonianu oscylatora harmonicznego.

Odpowiedź: $X=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0\end{bmatrix}$,

$P=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -\sqrt{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0\end{bmatrix}$

⋆ **Zadanie *MN46***

Stan cząstki $|\psi\rangle$ jest pewną liniową kombinacją wektorów własnych $|n\rangle$ Hamiltonianu oscylatora harmonicznego: $|\psi\rangle=\sqrt{2}A|1\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}A|2\rangle+A|3\rangle$. Wyznacz stałą A oraz zależność wektora $|\psi\rangle$ od czasu. Jakie będzie średnie położenie i średni pęd cząstki w funkcji czasu? Jaka będzie średnia energia całkowita w chwili $t=0$?

Odpowiedź: $A=\sqrt{\frac{2}{7}}$, $|\psi(t)\rangle=\sqrt{\frac{2}{7}}\Big[\sqrt{2}e^{-\frac{3}{2}i\omega t}|1\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{2}i\omega t}|2\rangle+e^{-\frac{7}{2}i\omega t}|3\rangle\Big]$,
$<x>=0, <p>=0, <H>=\frac{31}{14}\hbar\omega$

⋆ **Zadanie *MN47***

Wyznacz komutatory $[L_x,L_y]$, $[L_y,L_z]$, $[L_z,L_x]$, $[L^2,L_x]$, $[L^2,L_y]$, $[L^2,L_z]$.

Odpowiedź: $[L_x,L_y]=i\hbar L_z, [L_y,L_z]=i\hbar L_x, [L_z,L_x]=i\hbar L_y, [L^2,L_x]=[L^2,L_y]=[L^2,L_z]=0$

⋆ **Zadanie *MN48***

Przyjmując, że $l=1$, znajdź macierze reprezentujące operatory L^2, L_z, L_+, L_-, L_x i L_y w bazie wspólnych wektorów własnych operatorów L^2 i L_z.

Odpowiedź: $L^2=2\hbar^2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $L_z=\hbar\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $L_+=\sqrt{2}\hbar\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,
$L_-=\sqrt{2}\hbar\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $L_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $L_y=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{bmatrix}$

⋆ **Zadanie *MN49***

W bazie wspólnych wektorów własnych operatorów L^2 i L_z stan cząstki opisuje następujący ket ($l=1$):

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

Z jakim prawdopodobieństwem podczas pomiaru L_x uzyskamy wartość 0?

Odpowiedź: $P(L_x = 0) = \frac{1}{7}$

⋆ **Zadanie** ***MN50***

W układzie, w którym $l = 1$, znajdź reprezentację wektorów własnych operatora $L_x L_y + L_y L_x$ w bazie wspólnych wektorów własnych operatorów L^2 i L_z.

Odpowiedź: $|v_1\rangle = |1,0\rangle$, $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\,|1,1\rangle + |1,-1\rangle)$, $|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\,|1,1\rangle + |1,-1\rangle)$