# Mechanika Kwantowa*

Maciej J. Mrowiński

24 grudnia 2011

⋆ **Zadanie MK1**
Funkcja falowa opisująca stan pewnej cząstki w chwili $t = 0$ ma następującą postać:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A(a^2 - x^2) & \text{gdy } x \in [-a,a] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [-a,a] \end{cases}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+$. Wyznacz stałą $A$. Jakie jest średnie położenie i pęd cząstki w chwili $t = 0$?

*Odpowiedź:* $A = \sqrt{\frac{15}{16a^5}}$, $\langle x \rangle = 0$, $\langle p \rangle = 0$

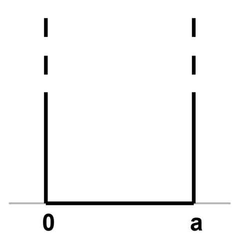
⋆ **Zadanie MK2**
Funkcja falowa opisująca stan pewnej cząstki ma następującą postać:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x| - i\omega t}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\omega \in \mathbb{R}_+$. Wyznacz stałą $A$. Jakie jest średnie położenie i średni kwadrat położenia cząstki?

*Odpowiedź:* $A = \sqrt{\lambda}$, $\langle x \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\lambda^2}$

⋆ **Zadanie MK3**




Wyznacz unormowane stany stacjonarne i dozwolone wartości energii dla cząstki znajdującej się w nieskończonej studni potencjału o szerokości $a$ (patrz rysunek) przy założeniu, że energia cząstki $E > 0$.

*Odpowiedź:* $\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i\frac{n^2\pi^2\hbar}{2ma^2}t}$, $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

*Skompilowane z wielu źródeł. Tylko do użytku na zajęciach.

⋆ **Zadanie MK4**
Iloczyn skalarny dwóch funkcji falowych $\Psi_1$ i $\Psi_2$ może zostać zdefiniowany w następujący sposób:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \Psi_1^* \Psi_2 \, dx$$

przy czym granica tej całki zależy od kontekstu (na przykład dziedziny lub okresu funkcji $\Psi_1$ i $\Psi_2$). Wykaż, że tak zdefiniowany iloczyn skalarny jest odwzorowaniem addytywnym względem obu parametrów:

$$(\Psi_1, \Psi_2 + \Psi_3) = (\Psi_1, \Psi_2) + (\Psi_1, \Psi_3)$$

$$(\Psi_1 + \Psi_3, \Psi_2) = (\Psi_1, \Psi_2) + (\Psi_3, \Psi_2)$$

Wykaż również, że zachodzą następujące równości:

$$(\Psi_1, c\Psi_2) = c\,(\Psi_1, \Psi_2)$$

$$(c\Psi_1, \Psi_2) = c^*\,(\Psi_1, \Psi_2)$$

dla dowolnego $c \in \mathbb{C}$.

⋆ **Zadanie MK5**
Dyskretną bazą ortonormalną nazywamy zbiór funkcji $\{u_n(x)\}$ ($u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$), pomiędzy którymi zachodzi, między innymi, następująca zależność (ortonormalność):

$$(u_n, u_m) = \delta_{n,m}$$

Wykaż, że rozwiązania niezależnego od czasu równania Schrödingera dla cząstki w nieskończonej studni potencjału (zadanie **MK3**) spełniają ten warunek.

⋆ **Zadanie MK6**
Załóżmy, że funkcje falowe $\Psi_1(x,t)$ i $\Psi_2(x,t)$ są rozwiązaniami równania Schrödingera. Udowodnij, że funkcja falowa $\Psi_3(x,t)$ będąca ich liniową kombinacją:

$$\Psi_3(x,t) = c_1 \Psi_1(x,t) + c_2 \Psi_2(x,t)$$

gdzie $c_1 \in \mathbb{C}$ i $c_2 \in \mathbb{C}$ to dowolne stałe, jest również rozwiązaniem równania Schrödingera. Ile będą wynosiły iloczyny skalarne $(\Psi_1, \Psi_3)$, $(\Psi_2, \Psi_3)$ i $(\Psi_3, \Psi_3)$, jeżeli funkcje falowe $\Psi_1$ i $\Psi_2$ są ortonormalne (zadanie **MK5**)?

*Odpowiedź:* $(\Psi_1, \Psi_3) = c_1$, $(\Psi_2, \Psi_3) = c_2$, $(\Psi_3, \Psi_3) = |c_1|^2 + |c_2|^2$ (tu warto zauważyć, że jest to z definicji całka kwadratu modułu $\Psi_3$)

⋆⋆ **Zadanie MK7**

Najbardziej ogólne rozwiązanie równania Schrödingera, z uwagi na jego liniowość, dla cząstki w nieskończonej studni potencjału (zadanie **MK3**) może zostać przedstawione jako superpozycja wielu stanów stacjonarnych (zadanie **MK6**):

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \Psi_n(x,t)$$

gdzie $\Psi_n(x,t)$ to $n$-ty stan stacjonarny, a $c_n \in \mathbb{C}$ to pewna stała (waga). Załóżmy, że dla pewnej cząstki w nieskończonej studni potencjału o szerokości $a$ ($V = 0$ gdy $x \in [0,a]$, $V = \infty$ gdy $x \notin [0,a]$) kształt funkcji falowej w chwili $t = 0$ dany jest w następujący sposób:

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x)$$

Wyznacz dla tej cząstki stałą $A$ i poszczególne wartości współczynników $c_n$. *Podpowiedź*: przy wyznaczaniu $c_n$ należy skorzystać z ortogonalności stanów stacjonarnych (patrz zadania **MK5**, **MK6**) - problem ten jest analogiczny do wyznaczania współczynników wektora w pewnej ortonormalnej bazie (gdyż, w istocie, jest to dokładnie wyznaczanie współczynników wektora w pewnej ortonormalnej bazie - naszym wektorem jest funkcja falowa a bazą poszczególne stany stacjonarne).

*Odpowiedź:* $A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$, $c_n = \begin{cases} \frac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3} & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ 0 & \text{gdy gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases}$

⋆ **Zadanie MK8**

Po jakim czasie cząstka w nieskończonej studni potencjału znajdzie się znowu w stanie początkowym:

$$\Psi(x,T) = \Psi(x,0)$$

jeżeli w chwili początkowej znajdowała się w dowolnym stanie $\Psi(x,0)$ (niekoniecznie stacjonarnym)?

*Odpowiedź:* $T = \frac{4ma^2}{\pi\hbar}$

⋆ **Zadanie MK9**

Wyznacz wzór na prąd prawdopodobieństwa $j(x,t)$:

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\Psi\right)$$

różniczkując gęstość prawdopodobieństwa $|\Psi|^2$ po czasie i używając równania Schrödingera do zamiany pochodnych na pochodne po położeniu.

⋆ **Zadanie MK10**

Wyznacz prąd prawdopodobieństwa (zadanie **MK9**) dla funkcji falowej:

$$\Psi(x,t) = Ae^{\pm ikx - i\omega t}$$

*Odpowiedź:* $j(x,t) = \pm\frac{\hbar k}{m}|A|^2$

⋆ **Zadanie MK11**

Wyznacz prąd prawdopodobieństwa (zadanie **MK9**) dla cząstki w nieskończonej studni potencjału o szerokości $a$ (zadanie **MK3**), jeżeli cząstka znajduje się w $n$-tym stanie stacjonarnym:

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

gdzie

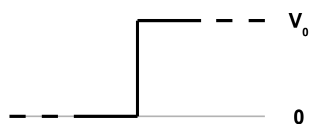
$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Jaki będzie prąd prawdopodobieństwa w przypadku cząstki znajdującej się w stanie będącym następującą liniową kombinacją $n$-tego i $m$-tego stanu stacjonarnego:

$$\Psi_{n,m}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_n(x,t) + \Psi_m(x,t)\right]$$

*Odpowiedź:* $j_n(x,t) = 0$,
$j_{n,m}(x,t) = \frac{\hbar\pi}{2ma^2}\left[(n+m)\sin\frac{(n-m)\pi x}{a} - (n-m)\sin\frac{(n+m)\pi x}{a}\right]\sin\frac{(E_n - E_m)t}{\hbar}$

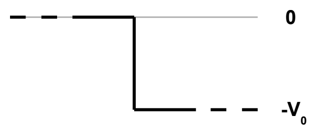
⋆ **Zadanie MK12**




Wyznacz, korzystając z prądu prawdopodobieństwa, współczynnik odbicia $R$ i transmisji $T$ dla „stopnia” potencjału o wysokości $V_0$ w przypadku kiedy energia $E > V_0$ i $E \in [0, V_0[$.

*Odpowiedź:* dla $E > V_0$: $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$, $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$; dla $E \in [0, V_0[$: $R = 1$, $T = 0$

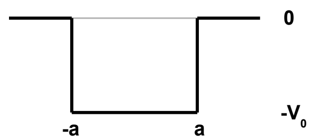
⋆ **Zadanie MK13**




Wyznacz współczynnik odbicia $R$ i transmisji $T$ dla odwróconego „stopnia” potencjału o głębokości $V_0$ w przypadku, kiedy energia $E > 0$.

*Odpowiedź:* $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$, $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

⋆⋆ **Zadanie MK14**




Wyznacz parzyste i nieparzyste unormowane rozwiązania niezależnego od czasu równania Schrödingera dla cząstki o energii $E \in ]-V_0, 0[$ znajdującej się w skończonej studni potencjału o głębokości $V_0$ i szerokości $2a$. Znajdź, w obu przypadkach, równania na dopuszczalne wartości energii (uwaga: równań tych nie daje się analitycznie rozwikłać). Dla energii $E > 0$ znajdź współczynnik transmisji. Dla jakich wartości energii fala całkowicie przejdzie przez barierę (studnię)?

*Odpowiedź:*

Rozwiązania parzyste: $$\psi(x) = \begin{cases} \frac{e^{k_1 a}\cos k_2 a}{\sqrt{a + \frac{1}{k_1}}} e^{k_1 x} & \text{gdy } x \in ]-\infty, -a[ \\ \frac{\cos k_2 x}{\sqrt{a + \frac{1}{k_1}}} & \text{gdy } x \in [-a, -a] \\ \frac{e^{k_1 a}\cos k_2 a}{\sqrt{a + \frac{1}{k_1}}} e^{-k_1 x} & \text{gdy } x \in ]a, \infty[ \end{cases}$$

Warunek dla energii stanów parzystych: $k_1 = k_2 \operatorname{tg} k_2 a$

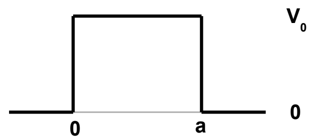
Rozwiązania nieparzyste: $$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{e^{k_1 a}\sin k_2 a}{\sqrt{a + \frac{1}{k_1}}} e^{k_1 x} & \text{gdy } x \in ]-\infty, -a[ \\ \frac{\sin k_2 x}{\sqrt{a + \frac{1}{k_1}}} & \text{gdy } x \in [-a, -a] \\ \frac{e^{k_1 a}\sin k_2 a}{\sqrt{a + \frac{1}{k_1}}} e^{-k_1 x} & \text{gdy } x \in ]a, \infty[ \end{cases}$$

Warunek dla energii stanów nieparzystych: $k_1 = -k_2 \operatorname{ctg} k_2 a$

$$T = \left[1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)} \sin^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}\right)\right]^{-1}$$

$$E_n + V_0 = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$$

⋆⋆ **Zadanie MK15**




Wyznacz współczynnik transmisji dla prostokątnej bariery potencjału o szerokości $a$ i wysokości $V_0$ w przypadku, kiedy energia cząstki $E > V_0$, $E = V_0$ i $0 < E < V_0$.

*Odpowiedź:*

$E > V_0$: $T = \left[1 + \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2k_1 k_2}\right)^2 \sin^2 k_2 a\right]^{-1}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar^2}$

$E = V_0$: $T = \left[1 + \left(\frac{ka}{2}\right)^2\right]^{-1}$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$0 < E < V_0$: $T = \left[1 + \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2}\right)^2 \sinh^2 k_2 a\right]^{-1}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar^2}$

⋆⋆ **Zadanie MK16**

Cząstka o masie $m$ porusza się w potencjale:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{gdy } x \in ]-\infty, 0[ \\ -\frac{32\hbar^2}{ma^2} & \text{gdy } x \in [0, a] \\ 0 & \text{gdy } x \in ]a, \infty[ \end{cases}$$

W ilu stanach o energii $E \in [-\frac{32\hbar^2}{ma^2}, 0]$ może znaleźć się cząstka. Podpowiedź: końcówkę zadania należy rozwiązać graficznie.

*Odpowiedź:* Istnieją 3 stany stacjonarne o energii $E \in [-\frac{32\hbar^2}{ma^2}, 0]$.

⋆ **Zadanie MK17**

Dla operatora pędu $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ rozwiąż zagadnienie własne:

$$\hat{p}\, u_p(x) = p\, u_p(x)$$

to znaczy znajdź taki zbiór funkcji (funkcji własnych) $\{u_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$ dla których, w wyniku działania operatora pędu na jedną z nich, dostaniemy tę samą funkcję pomnożoną przez pewną stałą $p \in \mathbb{R}$ (wartość własną; choć wcale nie musimy, to dla spokoju ducha ograniczymy się do rzeczywistych wartości własnych).

*Odpowiedź:* $u_p(x) = Ce^{\frac{ip}{\hbar}x}$

⋆ **Zadanie MK18**

Delta Diraca $\delta(x)$ to funkcja uogólniona (dystrybucja) zdefiniowana w następujący sposób (tu następuje drobne kłamstwo):

$$\delta = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } x = 0 \\ 0 & \text{gdy } x \neq 0 \end{cases}$$

dla której

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) = 1$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$ (w tym dla $\varepsilon = \infty$; czy potraficie po tym warunku stwierdzić dlaczego $\delta$ nie jest funkcją?). Delta Diraca jest więc unormowana. Delta Diraca jest również parzysta:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

Bardzo użyteczną cechą $\delta$ jest „wycinanie” wartości funkcji pod całką:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0)$$

Warto również pamiętać o następującej równości:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,dk = \delta(x)$$

Korzystając z powyższych zależności wyznacz wartość całki

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)\delta(x - nT)\,dx$$

dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$, oraz

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz(x-x')}\,dz$$

*Odpowiedź:* $I_1 = 1$, $I_2 = 2\pi\delta(x - x')$

⋆⋆ **Zadanie MK19**

Ciągłą bazą ortonormalną nazywamy zbiór funkcji $\{u_p(x)\}$ ($u_p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{R}$), pomiędzy którymi zachodzi, między innymi, następująca zależność (ortonormalność w sensie Diraca):

$$\left(u_p, u_{p'}\right) = \delta(p - p')$$

Wykaż, że funkcje własne operatora pędu (zadanie MK17) spełniają ten warunek przy odpowiednim doborze stałej $C$. Wyznacz tę stałą.

*Odpowiedź:* $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

⋆⋆ **Zadanie MK20**

Każda „przyzwoicie" zachowująca się funkcja (w naszym przypadku całkowalna z kwadratem modułu) daje się wyrazić w bazie funkcji własnych operatora pędu (zadanie MK17)

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\ c(p)\ u_p(x)$$

Równanie to jest analogiczne do tego w zadaniu MK7, gdzie przedstawialiśmy funkcje falową w bazie stanów stacjonarnych cząstki w nieskończonej studni potencjału. Różnica polega na tym, że teraz mamy do czynienia z bazą ciągłą i musimy całkować po ciągłym indeksie $p$, numerującym poszczególne funkcje własne. Funkcja $c(p)$ pełni analogiczną rolę do stałych $c_n$ w MK7. Dla funkcji $\Psi(x)$ zdefiniowanej jako

$$\Psi(x) = \begin{cases} A & \text{gdy } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [-a, a] \end{cases}$$

wyznacz stałą $A$ tak, aby $\Psi(x)$ była unormowana. Następnie wyznacz dla niej funkcję $c(p)$. *Podpowiedź*: należy skorzystać z ortogonalności funkcji $u_p$ (zadanie MK19) i z własności delty Diraca (zadanie MK18).

*Odpowiedź:* $A = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, $c(p) = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi a}} \frac{\sin \frac{pa}{\hbar}}{p}$

⋆⋆⋆ **Zadanie MK21**

Załóżmy, że rozwiązanie niezależnego od czasu równania Schrödingera ma następującą postać

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_l(x) & \text{gdy } x \in ]-\infty, x_0[ \\ \psi_r(x) & \text{gdy } x \in [x_0, +\infty[ \end{cases}$$

Udowodnij, że dla dowolnego potencjału będącego funkcją $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($|V(x)| < \infty$), pierwsza pochodna $\psi(x)$ musi być ciągła. Wykaż również, że możemy dokładnie określić jak zachowuje się nieciągłość pochodnej $\psi(x)$ w przypadku deltoidalnego potencjału $V(x) = -c\delta(x - x_0)$. *Podpowiedź*: w obu przypadkach należy obustronnie scałkować niezależne od czasu równanie Schrödingera w najbliższym otoczeniu punktu $x_0$.

*Odpowiedź:*

$$\left.\frac{d\psi_r}{dx}\right|_{x=x_0} - \left.\frac{d\psi_l}{dx}\right|_{x=x_0} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } V(x) \text{ zachowuje się „przyzwoicie"} \\ -\frac{2mc}{\hbar^2}\psi(x_0) & \text{nieciągłość dla potencjału deltoidalnego} \end{cases}$$

$\star\star\star$ **Zadanie MK22**

Wyznacz stany stacjonarne i dopuszczalne wartości energii dla cząstki w potencjale deltoidalnym $V(x) = -c\delta(x)$, której energia $E < 0$. Dla energii $E > 0$ wyznacz współczynnik transmisji i odbicia. Pamiętaj, że w punkcie $x = 0$ pierwsza pochodna funkcji falowej nie będzie ciągła z uwagi na deltoidalny potencjał (zadanie **MK21**).

*Odpowiedź:* $\Psi(x, y) = \frac{\sqrt{mc}}{\hbar} e^{-\frac{mc}{\hbar^2}|x| - \frac{iE}{\hbar}t}$, $E = -\frac{mc^2}{2\hbar^2}$ (istnieje tylko jeden stan stacjonarny!)

$R = \left[1 + \frac{2\hbar^2 E}{mc^2}\right]^{-1}$, $T = \left[1 + \frac{mc^2}{2\hbar^2 E}\right]^{-1}$