Zadania z kinematyki*

Maciej J. Mrowiński

25 lutego 2010

⋆ **Zadanie KIN1**

Na szosie biegnącej równolegle do toru kolejowego jedzie cyklista na rowerze ze stałą prędkością v_c. W pewnej chwili cyklistę dogania pociąg o długości l i mija go po upływie τ sekund. Wyznacz prędkość pociągu zakładając, że była ona stała w czasie.

Odpowiedź: $v_p = \frac{l}{\tau} + v_c$

⋆ **Zadanie KIN2**

W ciągu ilu sekund mijają się dwa pociągi jadące w przeciwnych kierunkach po równoległych torach z prędkościami v_1 i v_2, jeżeli długości tych pociągów wynoszą odpowiednio l_1 i l_2?

Odpowiedź: $t = \frac{l_1+l_2}{v_1+v_2}$

⋆ **Zadanie KIN3**

Samolot szybuje ze stałą prędkością ponad szosą, równolegle do niej, na wysokości h. W pewnej chwili widać ten samolot pod kątem α do poziomu. Po upływie czasu τ widać go pod kątem $\frac{\pi}{2}$. Oblicz prędkość samolotu.

Odpowiedź: $v = \frac{h}{\tau} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

⋆ **Zadanie KIN4**

Samolot leci ponad szosą w kierunku równoległym do niej ze stałą prędkością. Z punktu A zobaczono w pewnej chwili ten samolot pod kątem α do poziomu. Po upływie czasu τ zobaczono go pod kątem β ($\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$). Po upływie jakiego czasu od pierwszej obserwacji samolot znajdzie się dokładnie nad punktem A?

Odpowiedź: $t = \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^{-1} \tau$

---

*Skompilowane z wielu źródeł. Tylko do użytku na zajęciach. Do rozwiązania zadań oznaczonych symbolem ⋆ potrzebna jest jedynie wiedza matematyczna z liceum. Zadania z ⋆⋆ wymagają zastosowania pochodnych/całek. Zadania z ⋆⋆⋆ wykraczają poza program.

⋆ **Zadanie KIN5**
Dwa ciała ruszają ruchem jednostajnie przyspieszonym. Stosunek przyspieszeń ich ruchu jest 2 : 3, stosunek czasów trwania ich ruchu jest 3 : 4. W jakim stosunku są drogi przebyte przez te ciała?

Odpowiedź: 3 : 8

⋆ **Zadanie KIN6**
Ciało A rusza ruchem jednostajnie zmiennym z przyspieszeniem a_A. Po upływie czasu τ_1 rusza za nim ciało B również ruchem jednostajnie przyspieszonym i po upływie czasu τ_2 dogania ciało A. Oblicz przyspieszenie ciała B.

Odpowiedź: $a_B = a_A \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2$

⋆ **Zadanie KIN7**
Kuli toczącej się po podłodze nadano prędkość początkową v. Kula toczy się ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem a. Jaką drogę przebędzie kula do chwili zatrzymania się?

Odpowiedź: $s = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$

⋆ **Zadanie KIN8**
Do szybu kopalni o wysokości h spada swobodnie kamień. Po ilu sekundach od chwili puszczenia kamienia usłyszymy jego uderzenie w dno szybu? Prędkość dźwięku wynosi c.

Odpowiedź: $t = \frac{h}{c} + \sqrt{\frac{2h}{g}}$

⋆ **Zadanie KIN9**
Ciało swobodnie spadające przebyło w ciągu ostatnich τ sekund drogę s. Z jakiej wysokości spadało ciało?

Odpowiedź: $h = \frac{1}{2g}\left(\frac{s + \frac{1}{2}g\tau^2}{\tau}\right)^2$

⋆ **Zadanie KIN10**
W momencie, w którym rakieta wzniosła się do góry na wysokość h i osiągnęła prędkość v_0, odłączył się od niej niepotrzebny już zbiornik paliwa. Po jakim czasie zbiornik spadnie na ziemię i jaką prędkość osiągnie przy uderzeniu?

Odpowiedź: $t = \frac{1}{g}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}\right)$, $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

⋆ **Zadanie KIN11**
Dwie łodzie motorowe o prędkościach v_1 i v_2 względem wody wyruszają w dół rzeki z dwóch przystani A i B odległych od siebie o d. W jakiej odległości od przystani A spotkają się łodzie, jeżeli $v_1 > v_2$ a prędkość prądu rzeki wynosi v_0?

Odpowiedź: $s = \frac{v_1+v_0}{v_1-v_2} d$

⋆ **Zadanie KIN12**
Ciało spada swobodnie na ziemię z wysokości h. Na jakiej wysokości prędkość tego ciała będzie n razy mniejsza od jego prędkości końcowej?

Odpowiedź: $h = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) h$

⋆ **Zadanie KIN13**
Ciało porusza się ruchem opóźnionym ze stałym opóźnieniem równym co do wartości w. Wyznacz zależność prędkości ciała od przebytej drogi, jeżeli w chwili początkowej prędkość ciała wynosiła $v(t=0) = v_0$.

Odpowiedź: $v = \sqrt{v_0^2 - 2ws}$

⋆⋆ **Zadanie KIN14**
Zależność drogi s przebytej przez ciało od czasu t określona jest przez następujące równanie:

$$s(t) = At - Bt^2 + Ct^3.$$

przy czym A, B i C to stałe. Wyznacz prędkość i przyspieszenie ciała w funkcji czasu.

Odpowiedź: $v(t) = A - 2Bt + 3Ct^2$, $a(t) = -2B + 6Ct$

⋆⋆ **Zadanie KIN15**
Prędkość cząstki poruszającej się w dodatnią stronę osi X wynosi $v = \alpha\sqrt{x}$, gdzie α to dodatnia stała. Jaka będzie zależność prędkości i przyspieszenia tej cząstki od czasu, jeśli w chwili początkowej $t = 0$ cząstka znajdowała się w punkcie $x = 0$?

Odpowiedź: $v = \frac{\alpha^2}{2} t$, $a = \frac{\alpha^2}{2}$

⋆⋆ **Zadanie KIN16**
Opóźnienie cząstki wynosi co do wartości $w = \alpha\sqrt{v}$, gdzie α to dodatnia stała. Po jakim czasie cząstka się zatrzyma i jaką drogę przebędzie do chwili zatrzymania, jeżeli jej prędkość początkowa wynosiła v_0?

Odpowiedź: $t = \frac{2\sqrt{v_0}}{\alpha}$, $s = \frac{2v_0^{3/2}}{3\alpha}$

⋆ **Zadanie KIN17**

Łódka płynie po rzece ze stałą, prostopadłą do brzegu prędkością v_l (względem wody). Prędkość wody wynosi v_r. Wyznacz wektor prędkości łódki względem brzegu i kąt, jaki tworzy wektor prędkości z linią brzegu.

Odpowiedź: $v = \left[v_r, v_l\right]$, $\alpha = \mathrm{tg}^{-1} \frac{v_l}{v_r}$

⋆ **Zadanie KIN18**

Wioślarz nadaje łódce stałą prędkość v_l względem wody. Prędkość prądu rzeki wynosi v_r. W jakim kierunku powinien wioślarz odbić od brzegu, aby przepłynąć w poprzek rzekę prostopadle do jej brzegu.

Odpowiedź: $\alpha = \sin^{-1} \frac{v_r}{v_l}$

⋆ **Zadanie KIN19**

Samolot wznosi się ze stałą prędkością v_s pod kątem α do poziomu. Oblicz prędkość wznoszenia się tego samolotu w kierunku pionowym.

Odpowiedź: $v = v_s \sin\alpha$

⋆ **Zadanie KIN20**

Po szynach porusza się pusty wagon kolejowy ruchem jednostajnym z prędkością v_w. Nagle padł strzał rewolwerowy w kierunku prostopadłym do toru i w płaszczyźnie poziomej. Kula przebiła obie ściany wagonu. Otwór wylotowy był przesunięty o a w stosunku do wlotowego. Oblicz prędkość kuli, jeżeli szerokość wagonu wynosi d.

Odpowiedź: $v = v_w \frac{d}{a}$

⋆ **Zadanie KIN21**

Człowiek biegnący ze stałą prędkością v_c trzyma w ręku długą rurę tak, że kropla deszczu padającego ruchem jednostajnym z prędkością v_d wpada do rury przez środek górnego otworu i wylatuje z niej przez środek dolnego otworu. Jaki jest kąt nachylenia rury do poziomu?

Odpowiedź: $\alpha = \mathrm{tg}^{-1} \frac{v_d}{v_c}$

⋆ **Zadanie KIN22**

Przy jakim nachyleniu gładkiej deski przyspieszenie zsuwających się po niej ciał jest n razy mniejsze niż przyspieszenie ziemskie?

Odpowiedź: $\alpha = \sin^{-1} \frac{1}{n}$

⋆ **Zadanie KIN23**
Wysokość równi nachylonej pod kątem α wynosi h. W ciągu ilu sekund zsunie się po niej gładkie ciało?

Odpowiedź: $\frac{\sqrt{2gh}}{g\sin\alpha}$

⋆ **Zadanie KIN24**
Przy jakim kącie nachylenia równi zsuwające się po niej ciała potrzebują n razy więcej czasu niż przy swobodnym spadku z tej wysokości?

Odpowiedź: $\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{n}$

⋆⋆ **Zadanie KIN25**
Pod jakim kątem musi być nachylony dach domu, aby krople deszczu ściekały po nim w najkrótszym czasie?

Odpowiedź: $\alpha = \frac{\pi}{4}$

⋆ **Zadanie KIN26**
Jaką prędkość początkową należy nadać ciału sunącemu pod górę wzdłuż równi pochyłej o wysokości h, nachylonej pod kątem α, aby zatrzymało się na szczycie równi?

Odpowiedź: $v_0 = \sqrt{2gh}$

⋆ **Zadanie KIN27**
Ze szczytu równi pochyłej o długości l, nachylonej pod kątem α, zsuwa się ciało A. Jednocześnie pchnięto ciało B od dołu ku górze z taką prędkością początkową, że ciała minęły się w połowie długości równi. Jaką prędkość początkową nadano ciału B?

Odpowiedź: $v_0 = \sqrt{l g \sin\alpha}$

⋆ **Zadanie KIN28**
Przy strzelaniu z wiatrówki wycelowano do punktu środkowego tarczy, przy czym lufa wiatrówki znajdowała się w położeniu poziomym. Pocisk trafił o a niżej. Odległość tarczy od wylotu lufy wynosi d. Oblicz prędkość pocisku w chwili wylotu z lufy.

Odpowiedź: $v = d\sqrt{\frac{g}{2a}}$

⋆ **Zadanie KIN29**

Ze szczytu wieży o wysokości h rzucono ciało w kierunku poziomym, nadając mu prędkość początkową v_o. W jakim punkcie spadnie to ciało na ziemię?

Odpowiedź: $s = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}$

⋆ **Zadanie KIN30**

Z wysokości h rzucono w kierunku poziomym kamień, nadając mu prędkość v_o. W odległości d kamień uderzył w pionową ścianę. Na jakiej wysokości kamień trafił w ścianę?

Odpowiedź: $H = h - \frac{d^2 g}{2v_o^2}$

⋆ **Zadanie KIN31**

Lotniarz szybuje na wysokości h i zamierza rzucić kamień w upatrzony cel. Jaką prędkość posiada lotnia, jeżeli kamień rzucony poziomo z odległości s (mierzonej w kierunku poziomym) od celu trafił w ten cel? Jaką prędkość będzie miał kamień w chwili upadku na ziemię?

Odpowiedź: $v_{\text{lot}} = s\sqrt{\frac{g}{2h}}$, $v_{\text{kam}} = \frac{s^2 g}{2h} + 2gh$

⋆ **Zadanie KIN32**

Kamień rzucono pod kątem α do poziomu z prędkością v_o. Oblicz zasięg rzutu, maksymalną osiągniętą wysokość i czas trwania ruchu.

Odpowiedź: $x_{\text{max}} = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$, $y_{\text{max}} = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, $t = \frac{2v_o \sin\alpha}{g}$

⋆ **Zadanie KIN33**

Pod jakim kątem należy rzucić ciało, aby zasięg rzutu był dwa razy większy od maksymalnej osiągniętej wysokości?

Odpowiedź: $\alpha = \text{tg}^{-1} 2$

⋆ **Zadanie KIN34**

Kamień rzucony z prędkością v_o pod kątem α do poziomu trafia w pionową ścianę znajdującą się w odległości d. Na jakiej wysokości kamień trafił w ścianę?

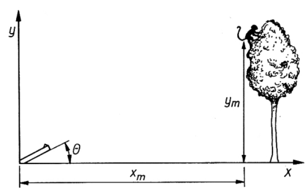
Odpowiedź: $h = d\left(\text{tg}\,\alpha - \frac{gd}{2v_o^2 cos^2\alpha}\right)$

⋆ **Zadanie KIN35**

Jaki powinien być czas t opóźnienia zapłonu granatu wyrzuconego z prędkością v_0 pod kątem α do poziomu, aby wybuch nastąpił w najwyższym punkcie toru?

Odpowiedź: $t = \frac{v_0}{g} \sin\alpha$

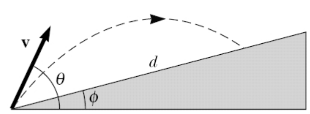
⋆ **Zadanie KIN36**



W dżungli, w odległości x_m od myśliwego, znajduje się drzewo o wysokości y_m. Na samym czubku drzewa siedzi płochliwa małpa, która puszcza się gałęzi i zaczyna spadać dokładnie w momencie, w którym myśliwy strzela. Pod jakim kątem myśliwy musi ustawić swoją strzelbę aby trafić do małpy?

Odpowiedź: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_m}{x_m}$

⋆ **Zadanie KIN37**



U podstawy równi pochyłej wystrzelono pod kątem θ do podłoża pocisk. Jak daleko, licząc wzdłuż powierzchni równi, upadnie pocisk, jeśli równia nachylona jest pod kątem ϕ, a prędkość początkowa pocisku wynosiła v?

Odpowiedź: $s = \frac{2v^2 \cos\theta \sin(\theta - \phi)}{g cos^2\phi}$

⋆ **Zadanie KIN38**

Dwa ciała wyrzucono z tego samego punktu z tą samą prędkością początkową v_0. Jedno z nich wyrzucono do góry, drugie pod kątem θ do podłoża. Jaka będzie wartość odległości pomiędzy tymi ciałami w funkcji czasu?

Odpowiedź: $d = v_0 t \sqrt{2(1 - \sin\theta)}$

⋆ **Zadanie KIN39**

Armata wystrzeliła dwa pociski z taką samą prędkością początkową v_0 - jeden pod kątem θ_1, a drugi pod kątem θ_2. Jaki musi być czas pomiędzy wystrzeleniem obu pocisków, aby pociski zderzyły się w locie?

Odpowiedź: $t = \frac{2v_0 \sin\theta_1 - \theta_2}{g(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)}$

⋆ **Zadanie KIN40**

W chwili początkowej dwie cząstki znajdują się w tym samym miejscu i poruszają się w przeciwnych kierunkach z prędkościami v_1 i v_2 równolegle do podłoża. Jaka będzie odległość pomiędzy cząstkami w chwili, w której ich prędkości staną się prostopadłe.

Odpowiedź: $d = \frac{v_1+v_2}{g}\sqrt{v_1 v_2}$

⋆ **Zadanie KIN41**

Równia pochyła o kącie nachylenia α może przemieszczać się w kierunku poziomym. Z jakim przyspieszeniem a powinna poruszać się równia, aby swobodnie spadające na nią z góry ciało znajdowało się stale w tej samej odległości (liczonej wzdłuż linii pionowej) od nachylonej płaszczyzny równi? Zakładamy, że ruch ciała i równi rozpoczyna się w tej samej chwili oraz, że przyspieszenie ziemskie g jest dane.

Odpowiedź: $a = g\,\mathrm{ctg}\,\alpha$

⋆⋆ **Zadanie KIN42**

Biedronka i żuczek znajdują się w dwóch sąsiednich rogach kwadratowego stołu o krawędzi a. W pewnym momencie żuczek z prędkością v_z zaczyna iść w kierunku rogu w którym znajduje się biedronka. Biedronka zaczyna uciekać przed żuczkiem w stronę sąsiedniego rogu z prędkością v_b. Kiedy odległość między biedronką a żuczkiem będzie najmniejsza? Załóż, że owady poruszają się wzdłuż krawędzi stołu.

Odpowiedź: $t = \frac{a v_z}{v_b^2+v_z^2}$

⋆⋆ **Zadanie KIN43**

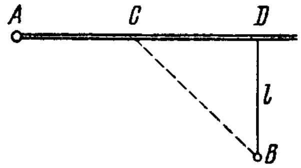
Wektor położenia ciała w funkcji czasu wyraża się następującym wzorem:

$$\vec{r} = R\left[\cos\phi(t), \sin\phi(t)\right].$$

Wyznacz prędkość i przyspieszenie tego ciała w funkcji czasu.

Odpowiedź: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{r}$, przy czym $\hat{r} = [\cos\phi(t), \sin\phi(t)]$, $\hat{\phi} = [-\sin\phi(t), \cos\phi(t)]$

⋆⋆ **Zadanie KIN44**



Samochód znajduje się w punkcie A na otoczonej polem autostradzie. Kierowca chce jak najszybciej dojechać do oddalonego o l od autostrady punktu B. W jakiej odległości od punktu D kierowca musi wjechać na pole, jeżeli prędkość samochodu na polu jest η razy mniejsza od prędkości na autostradzie?

Odpowiedź: $CD = \frac{l}{\sqrt{\eta^2 - 1}}$

⋆⋆ **Zadanie KIN45**

Wektor przyspieszenia ciała zależy w następujący sposób od czasu:

$$\vec{a}(t) = \left[2e^{-t}, 2\cos t, 3t^2\right].$$

Prędkość początkowa i położenie początkowe wynoszą odpowiednio

$$\vec{v}_0 = [4, -3, 2]$$

i

$$\vec{x}_0 = [0, -1, 1].$$

Wyznacz wektor prędkości i położenia ciała dla dowolnego czasu.

Odpowiedź: $\vec{v}(t) = \left[-2e^{-t} + 6, 2\sin t - 3, t^3 + 2\right]$,
$\vec{x}(t) = \left[2e^{-t} + 6t - 2, -2\cos t - 3t + 1, \frac{1}{4}t^4 + 2t + 1\right]$

⋆⋆ **Zadanie KIN46**

Udowodnij, że pochodna wartości prędkości po czasie jest równa składowej przyspieszenia w kierunku wektora prędkości (przyspieszeniu stycznemu a_s).
Podpowiedź: Zróżniczkuj wartość prędkości po czasie i przedstaw wynik jako iloczyn odpowiednich wektorów.

⋆⋆ **Zadanie KIN47**

Ćma porusza się po krzywej, której długość dana jest wzorem: $s = s_0 e^{ct}$, gdzie s_0 i c to stałe. Wiedząc, że wektor przyspieszenia w każdym punkcie toru tworzy kąt ϕ ze styczną do toru, wyznacz wartość prędkości, przyspieszenia stycznego, przyspieszenia normalnego i promień krzywizny toru jako funkcji długości łuku krzywej.

Odpowiedź: $v = s_0 c e^{ct}$, $a_s = s_0 c^2 e^{ct}$, $a_n = s_0 c^2 \operatorname{tg}\phi\, e^{ct}$, $R = s \operatorname{ctg}\phi$

⋆⋆ **Zadanie KIN48**

Piłkę rzucono z prędkością początkową v_0 pod kątem α względem powierzchni ziemi. Wyznacz wektor położenia, prędkości i przyspieszenia ciała w dowolnej chwili czasu. Oblicz przyspieszenie styczne i normalne.

Odpowiedź: $\vec{r}(t) = \left[v_0 t\cos\alpha, v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\right]$, $\vec{v}(t) = [v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha - gt]$, $\vec{a}(t) = [0, -g]$, $a_s(t) = \frac{g(gt - v_0\sin\alpha)}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t\sin\alpha + (gt)^2}}$, $a_s(t) = \frac{g v_0\cos\alpha)}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t\sin\alpha + (gt)^2}}$

⋆⋆ **Zadanie KIN49**

Współrzędne poruszającej się cząstki wynoszą $x = a\sin\omega t$ i $y = a(1 - \cos\omega t)$, przy czym a i ω to dodatnie stałe. Jaką drogę przebędzie cząstka po upływie czasu t? Jaki kąt tworzy wektor prędkości z wektorem przyspieszenia?

Odpowiedź: $s = a\omega t$, $\phi = \frac{\pi}{2}$

⋆⋆ **Zadanie KIN50**

Balon odrywa się od ziemi i unosi od góry ze stałą prędkością v_0. Wiatr nadaje mu prędkość poziomą $v = by$, gdzie b to stała a y to wysokość, na jakiej znajduje się balon. Znajdź drogę przebytą przez balon w kierunku poziomym w zależności od wysokości, przyspieszenie całkowite, styczne i normalne balonu w funkcji wysokości.

Odpowiedź: $x(y) = \frac{by^2}{2v_0}$, $a = bv_0$, $a_s = \frac{b^2 y}{\sqrt{\left(\frac{by}{v_0}\right)^2 + 1}}$, $a_n = \frac{bv_0}{\sqrt{\left(\frac{by}{v_0}\right)^2 + 1}}$

⋆⋆ **Zadanie KIN51**

Po rzece płynie łódka ze stałą względem wody prędkością v_l, prostopadłą do kierunku prądu. Woda w rzece płynie wszędzie równolegle do brzegów, ale wartość jej prędkości v_w zależy od odległości y od brzegu i dana jest wzorem: $v_w = v_0 \sin\frac{\pi}{L}y$, gdzie v_0 i L to stałe (L - szerokość rzeki). Znajdź wartość wektora prędkości łódki względem brzegu rzeki i odległość, na jaką woda zniosła łódkę w dół rzeki.

Odpowiedź: $v = \sqrt{v_l^2 + v_0^2\sin^2\frac{\pi}{L}y}$, $d = \frac{2v_0 L}{\pi v_l}$

⋆⋆ **Zadanie KIN52**

Łódka, której prędkość względem wody ma stałą w czasie wartość v, porusza się prostopadle do brzegu rzeki (względem obserwatora znajdującego się na brzegu). Woda w rzece płynie równolegle do brzegów, ale wartość jej prędkości zależy od odległości y od brzegu i dana jest wzorem $v_r(y) = v\sqrt{y/a}$. Szerokość rzeki wynosi a. Wyznacz zależność położenia łódki y_l (w kierunku prostopadłej do brzegów osi OY) od czasu i oblicz czas t potrzebny na przepłynięcie z jednego brzegu na drugi.

Odpowiedź: $y_l(t) = a - \frac{1}{4a}(vt - 2a)^2$, $t = \frac{2a}{v}$

$\star\star$ **Zadanie KIN53**

Odległość cząstki od środka układu współrzędnych wyrażona jest równaniem $\vec{r} = \vec{w}t(1-\alpha t)$, gdzie $\vec{w}$ to stały, niezerowy wektor a α - dodatnia stała. Znajdź prędkość i przyspieszenie cząstki w funkcji czasu oraz czas, po jakim cząstka wróci do położenia początkowego i drogę, jaką do tego czasu pokona.

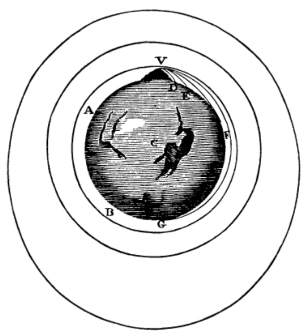
Odpowiedź: $\vec{v} = \vec{w}(1 - 2\alpha t)$, $\vec{a} = -2\vec{w}\alpha$, $t = \frac{1}{\alpha}$, $s = \frac{w}{2\alpha}$

$\star\star$ **Zadanie KIN54**

Przyspieszenie styczne pewnej cząstki wyrażone jest następującym wzorem: $a_s = \vec{w}\vec{\tau}$, gdzie $\vec{w}$ to stały w czasie wektor równoległy do osi X, a $\vec{\tau}$ - wersor, którego kierunek i zwrot pokrywają się z kierunkiem i zwrotem wektora prędkości. Jaka jest wartość prędkości cząstki w funkcji jej x-sowej współrzędnej położenia?

Odpowiedź: $v = \sqrt{2wx}$

$\star$ **Zadanie KIN55**



Isaac Newton, w swojej księdze *De Mundi Systemate Liber*, zawarł eksperyment myślowy pokazujący, że planety są utrzymywane na orbitach dzięki siłom dośrodkowym. Wyobraźmy sobie, że znajdujemy się na górze o wysokości h i mamy do swojej dyspozycji działo, którego lufa skierowana jest w kierunku równoległym do podłoża. Z jaką prędkością musimy wystrzelić pocisk z tego działa, aby stał się on satelitą Ziemi? Dany jest promień Ziemi R ($h \ll R$).

Odpowiedź: $v = \sqrt{Rg}$

$\star$ **Zadanie KIN56**

Promienie okręgów, zataczanych przez dwa ciała, są w stosunku 2 : 3, a okresy ruchu tych ciał są w stosunku 3 : 4. W jakim stosunku są ich przyspieszenia dośrodkowe?

Odpowiedź: 32 : 27

⋆ **Zadanie** KIN57

Punkty A i B zataczają okręgi o promieniach R_A i R_B. W jakim stosunku są okresy ich ruchu, jeżeli ich przyspieszenia dośrodkowe są równe?

Odpowiedź: $\sqrt{R_A} : \sqrt{R_B}$

⋆⋆ **Zadanie** KIN58

Wyznacz wzory na prędkość radialną v_r i transwersalną v_ϕ ciała oraz przyspieszenie radialne a_r i transwersalne a_ϕ.

Odpowiedź: $v_r = \dot{r}$, $v_\phi = r\dot{\phi}$, $a_r = \ddot{r} - r\left(\dot{\phi}\right)^2$, $a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}$

⋆⋆ **Zadanie** KIN59

Ciało porusza się po okręgu o stałym w czasie promieniu R ze **a)** stałą prędkością kątową $\omega = \frac{d\phi}{dt}$; **b)** stałym przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$. Znajdź w obu przypadkach zależność kąta ϕ od czasu.

Odpowiedź: **a)** $\phi(t) = \phi_0 + \omega t$; **b)** $\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

⋆⋆ **Zadanie** KIN60

Ruch punktu materialnego w biegunowym układzie odniesienia opisują równania $r = bt$ i $\phi = c/t$, gdzie b i c to stałe. Znajdź tor ruchu, prędkość i przyspieszenie punktu.

Odpowiedź: $r(\phi) = \frac{bc}{\phi}$, $v = b\sqrt{1 + \left(\frac{c}{t}\right)^2}$, $a = \frac{bc^2}{t^3}$

⋆⋆ **Zadanie** KIN61

Koło o promieniu R obraca się tak, że kąt obrotu promienia koła zależy od czasu w następujący sposób: $\phi(t) = A + Bt + Ct^3$, gdzie A, B i C to stałe. Wyznaczyć dla punktów położonych w odległości 3/4 R od osi obrotu prędkość kątową, prędkość liniową, przyspieszenie styczne i normalne.

Odpowiedź: $\omega = B + 3ct^2$, $v = \frac{3}{4}R\left(B + 3ct^2\right)$, $a_s = \frac{9}{2}RCt$, $a_n = \frac{3}{4}R\left(B + 3ct^2\right)^2$

⋆⋆ **Zadanie** KIN62

Okrąg o promieniu R toczy się ruchem jednostajnym z prędkością kątową ω po prostej. Wyznacz wektor położenia i prędkości w dowolnej chwili czasu dla tego punktu na okręgu, który w chwili początkowej stykał się z prostą. Wyznacz również drogę przebytą przez punkt w funkcji czasu.

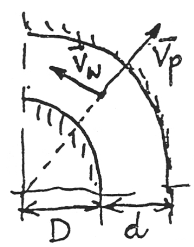
Odpowiedź: $\vec{r}(t) = R\left[\omega t - \sin\omega t, 1 - \cos\omega t\right]$, $\vec{v}(t) = R\omega\left[1 - \cos\omega t, \sin\omega t\right]$, $s(t) = 4R\left(1 - \cos\frac{\omega t}{2}\right)$

⋆⋆ **Zadanie KIN63**

Kolista tarcza o promieniu R wiruje ze stałą prędkością ω. Ze środka tarczy wyrusza biedronka i porusza się wzdłuż promienia ze stałą prędkością v_0. Znajdź: **a)** równania ruchu i toru biedronki w nieruchomym układzie odniesienia we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych, **b)** zależność od czasu wartości wektora prędkości oraz jego składowych radialnej v_r i transwersalnej v_ϕ, **c)** zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia, jak również jego składowych: radialnej a_r, transwersalnej a_ϕ oraz normalnej a_n i stycznej a_s.

Odpowiedź: **a)** $r(t) = v_0 t$, $\phi(t) = \omega t$, $\vec{r}(t) = v_0 t\,[\cos\omega t, \sin\omega t]$, $r(\phi) = \frac{v_0}{\omega}\phi$, $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\left[\frac{\omega}{v_0}\left(x^2+y^2\right)\right]$, **b)** $v_r = v_0$, $v_\phi = \omega v_0 t$, $v = v_0\sqrt{1+(\omega t)^2}$, **c)** $a_r = -\omega^2 v_0 t$, $a_\phi = 2\omega v_0$, $a = v_0\omega\sqrt{4+(\omega t)^2}$, $a_s = \frac{\omega^2 v_0 t}{\sqrt{1+(\omega t)^2}}$, $a_n = \frac{v_0\omega\left[2+(\omega t)^2\right]}{\sqrt{1+(\omega t)^2}}$

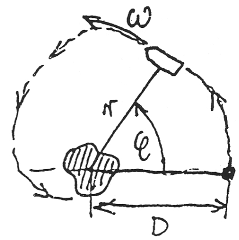
⋆⋆ **Zadanie KIN64**



Rzeka o szerokości d tworzy zakole o promieniu wewnętrznym D. Prędkość przepływu wody w zakolu wynosi v_w. Pływak przepływa z brzegu wewnętrznego na zewnętrzny w ten sposób, że cały czas utrzymuje kierunek prostopadły do brzegu zewnętrznego, a jego prędkość względem wody wynosi v_p. Znajdź równanie toru pływaka $r(\phi)$ we współrzędnych biegunowych, przyjmując początek układu odniesienia w środku zakola. Jakiego odchylenia Δl, liczonego wzdłuż brzegu zewnętrznego, dozna pływak? Jaką drogę s przebędzie pływak podczas przeprawy? Znajdź przyspieszenie radialne, transwersalne styczne i normalne pływaka.

Odpowiedź: $r(\phi) = De^{\frac{v_p}{v_w}\phi}$, $\Delta l = \frac{v_w}{v_p}(D+d)\ln\frac{D+d}{D}$, $s = d\,\frac{\sqrt{v_p^2+v_w^2}}{v_p}$, $a_r = -\frac{v_w^2}{v_p t+D}$, $a_\phi = \frac{v_p v_w}{v_p t+D}$, $a_s = 0$, $a_n = \frac{v_w\sqrt{v_p^2+v_w^2}}{v_p t+D}$

⋆⋆ **Zadanie KIN65**



Sternik motorówki, zbliżającej się do małej wysepki postanawia, że będzie zbliżał się do niej ze stałą prędkością u, jednocześnie okrążając ją ze stałą prędkością kątową ω. Zakładając, że w momencie rozpoczęcia manewru odległość od środka wysepki wynosiła D, znajdź równanie toru motorówki we współrzędnych biegunowych oraz składową styczną i normalną przyspieszenia, jak również promień krzywizny toru jako funkcję bieżącej odległości od środka wyspy r.

Odpowiedź: $r(\phi) = D - \frac{u\phi}{\omega}$, $a_s = -\frac{\omega^2 u r}{\sqrt{u^2+(\omega r)^2}}$, $a_n = \omega\sqrt{\frac{4u^2\left[u^2+(\omega r)^2\right]+(\omega r)^4}{u^2+(\omega r)^2}}$,
$R = \frac{\left[u^2+(\omega r)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\omega\sqrt{4u^2\left[u^2+(\omega r)^2\right]+(\omega r)^4}}$

⋆⋆ **Zadanie KIN66**

Znajdź tor, po jakim w płaszczyźnie XOY leci samolotem ponaddźwiękowym ze stałą prędkością v pilot, który chce, aby jego koledzy stojący na lotnisku usłyszeli w tym samym czasie huk silnika z każdej strony. Prędkość dźwięku wynosi c, samolot w chwili początkowej $t = 0$ znajdował się w odległości r_0 od kolegów stojących na lotnisku.

Odpowiedź: $r(\phi) = r_0 e^{-\frac{\phi}{\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2-1}}}$

⋆⋆ **Zadanie KIN67**

Punkt porusza się po okręgu o promieniu R. Jego prędkość zależy od przebytej drogi w następujący sposób: $v = a\sqrt{s}$, przy czym a to dodatnia stała. Znajdź tangens kąta (w funkcji przebytej drogi) pomiędzy wektorem prędkości a wektorem całkowitego przyspieszenia.

Odpowiedź: $\mathrm{tg}\,\phi = \frac{2s}{R}$

⋆⋆ **Zadanie** KIN68

Znajdź równanie $\phi(t)$ punktu poruszającego się po okręgu, jeżeli kąt pomiędzy wektorem przyspieszenia a promieniem wodzącym ma stałą wartość α. Przyjmij, że warunki początkowe są następujące: $\phi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \omega_0$.

Odpowiedź: $\phi(t) = \operatorname{ctg}\alpha \ln(\omega_0 t \operatorname{tg}\alpha + 1)$

⋆⋆ **Zadanie** KIN69

Punkt porusza się ruchem opóźnionym po okręgu o promieniu R w taki sposób, że jego przyspieszenia styczne i normalne są sobie w każdej chwili co do modułu równe. W chwili początkowej $t = 0$ prędkość punktu wynosiła v_0. Znajdź wartość prędkości punktu jako funkcję czasu i przebytej drogi s, oraz wartość całkowitego przyspieszenia punktu jako funkcję prędkości i przebytej drogi.

Odpowiedź: $v = \frac{1}{\frac{t}{R} + \frac{1}{v_0}}$, $v = v_0 e^{-s/R}$, $a = \sqrt{2}\frac{v^2}{R}$, $a = \sqrt{2}\frac{v_0^2}{R}e^{-2s/R}$

⋆⋆ **Zadanie** KIN70

Ciało wiruje wokół pewnej osi z prędkością kątową $\omega = \omega_0 - a\phi$, gdzie ω_0 i a to dodatnie stałe. Znajdź wartość kąta i prędkości kątowej od czasu.

Odpowiedź: $\phi(t) = \frac{\omega_0}{a}(1 - e^{-at})$, $\omega(t) = \omega_0 e^{-at}$

⋆⋆ **Zadanie** KIN71

Ciało wiruje wokół pewnej osi w taki sposób, że jego opóźnienie kątowe jest proporcjonalne do pierwiastka z prędkości kątowej. Wyznacz średnią prędkość kątową ciała liczoną od chwili początkowej $t = 0$ do momentu zatrzymania, jeżeli w chwili początkowej prędkość kątowa ciała wynosiła ω_0.

Odpowiedź: $\langle\omega\rangle = \frac{\omega_0}{3}$

⋆⋆ **Zadanie** KIN72

Ciało zaczyna wirować wokół pewnej osi z przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = at$, gdzie a to dodatnia stała. Po upływie jakiego czasu, licząc od początku ruchu, dla dowolnego punktu należącego do ciała wektor całkowitego przyspieszenia będzie tworzył kąt α z wektorem prędkości?

Odpowiedź: $t = \sqrt[3]{\frac{4}{a}\operatorname{tg}\alpha}$

⋆⋆ **Zadanie KIN73**

Ciało wiruje wokół pewnej osi tak, że $\phi(t) = at - bt^3$, przy czym a i b to dodatnie stałe. Wyznacz średnią prędkość kątową i przyspieszenie kątowe od chwili $t = 0$ do momentu zatrzymania. Jakie przyspieszenie kątowe będzie miało ciało w chwili zatrzymania?

Odpowiedź: $\langle\omega\rangle = \frac{2}{3}a$, $\langle\varepsilon\rangle = -\sqrt{3ab}$, $\varepsilon = -2\sqrt{3ab}$

⋆ **Zadanie KIN74**

Pocisk uzyskuje prędkość wylotową v po wykonaniu n obrotów w lufie o długości l. Zakładając, że pocisk porusza się w lufie z przyspieszeniem stałym, znajdź prędkość kątową pocisku w chwili opuszczenia lufy.

Odpowiedź: $\omega = \frac{2\pi vn}{l}$