Fizyka Statystyczna*

Maciej J. Mrowiński

17 stycznia 2011

★ **Zadanie FS1**
Pewien układ składa się z trzech rozróżnialnych cząstek, z których każda może znaleźć się w jednym ze stanów o energii $\varepsilon_i = i\epsilon$ (gdzie ϵ to pewna stała). Wypisz wszystkie możliwe makrostany tego układu, jeżeli jego energia wynosi 3ϵ. Wyznacz liczbę mikrostanów realizujących poszczególne makrostany i prawdopodobieństwo tego, że układ znajdzie się w danym makrostanie.

Odpowiedź:

	n_0	n_1	n_2	n_3	l.m.	p_i
1	2	0	0	1	3	3/10
2	1	1	1	0	6	6/10
3	0	3	0	0	1	1/10

★ **Zadanie FS2**
Energia stanu podstawowego dla cząstki w nieskończonej studni potencjału o bokach a, b i c wynosi:

$$E(a,b,c) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

Korzystając z mnożników Lagrange'a oblicz, dla jakich wartości a, b i c energia stanu podstawowego będzie jak najmniejsza, jeżeli objętość studni jest stała i wynosi $V(a,b,c) = abc = k^3$.

Odpowiedź: Energia będzie najmniejsza dla $a = b = c = k$, czyli dla sześcianu.

★ **Zadanie FS3**
Załóżmy, że mamy łańcuch N obiektów, które można podzielić na k rozłącznych grup. Obiekty należące do tej samej grupy są nierozróżnialne. Ile istnieje permutacji takiego łańcucha, jeżeli w i-tej grupie znajduje się n_i obiektów? *Podpowiedź*: ile istnieje permutacji N obiektów rozróżnialnych? Ile będzie tych permutacji, jeżeli dwa spośród obiektów są nierozróżnialne? Ile, jeżeli $3, 4, \ldots, n$ jest nierozróżnialnych?

Odpowiedź: $P = \frac{N!}{n_0! n_1! n_2! \ldots n_{k-1}!}$

*Skompilowane z wielu źródeł. Tylko do użytku na zajęciach.

⋆ **Zadanie** FS4
Układ składa się z N rozróżnialnych cząstek, z których każda może znaleźć się w jednym ze stanów o energii ε_i ($i = 0, 1, 2, 3, \ldots$; trzeba tu wyraźnie zaznaczyć, że indeks i numeruje poszczególne **stany kwantowe**, a nie dopuszczalne wartości energii cząstki - w ogólnym przypadku może zachodzić $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ dla pewnych par i, j). Wyznacz (poprzez maksymalizację entropii) liczbę cząstek w i-tym stanie, jeżeli układ znajduje się w równowadze a jego energia całkowita wynosi E (temperatura układu wynosi T). Wykaż, że entropię i energię układu możemy wyrazić wzorami

$$S = Nk\frac{d}{dT}(T\ln Z)$$

$$E = NkT^2\frac{d}{dT}(\ln Z)$$

gdzie Z to suma statystyczna.

Odpowiedź: $\frac{n_i}{N} = \frac{1}{Z}e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}$, $Z = \sum_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}$

⋆ **Zadanie** FS5
Układ N rozróżnialnych momentów magnetycznych o wartości μ znajduje się w polu magnetycznym o wartości indukcji magnetycznej B. Załóżmy, że możliwe są dwa ustawienia momentów magnetycznych - zgodne z polem (o energii $\varepsilon_+ = -\mu B$) i przeciwne do pola (o energii $\varepsilon_- = +\mu B$). Wyznacz entropię oraz prawdopodobieństwa znalezienia momentów magnetycznych ustawionych zgodnie i przeciwnie do pola w stanie równowagi (energia układu wynosi E, temperatura układu wynosi T). Ile będą wynosić te prawdopodobieństwa i entropia dla bardzo małych i bardzo dużych temperatur?

Odpowiedź: $p_+ = \frac{n_+}{N} = \frac{1}{1+e^{-2\mu B/kT}}$, $p_- = \frac{n_-}{N} = \frac{1}{1+e^{2\mu B/kT}}$,
$S = kN\left[\frac{\ln\left(1+e^{-2\mu B/kT}\right)}{e^{-2\mu B/kT}} + \frac{\ln\left(1+e^{2\mu B/kT}\right)}{e^{2\mu B/kT}}\right]$
Małe T: $p_+ = 1$, $p_- = 0$, $S = 0$; Duże T: $p_+ = 1/2$, $p_- = 1/2$, $S = k\ln 2^N$

⋆ **Zadanie** FS6
Układ składa się z N rozróżnialnych cząstek drgających z tą samą częstością ν. Ponieważ cząstki mogą drgać w trzech niezależnych kierunkach, każdej z nich odpowiadają trzy niezależne oscylatory harmoniczne (kwantowe oscylatory o dopuszczalnych energiach $\varepsilon_i = (i + 1/2)\hbar\nu$; jest to tak zwany model Einsteina). Wyznacz sumę statystyczną, entropię i energię w funkcji temperatury.

Odpowiedź: $Z = \frac{e^{-\hbar\nu/2kT}}{1-e^{-\hbar\nu/kT}}$, $S = 3Nk\left[\frac{\hbar\nu}{kT}\left(e^{\hbar\nu/kT}-1\right)^{-1} - \ln\left(1-e^{-\hbar\nu/kT}\right)\right]$,
$E = 3N\hbar\nu\left[\left(e^{\hbar\nu/kT}-1\right)^{-1} + \frac{1}{2}\right]$

⋆ **Zadanie FS7**

Na ile różnych sposobów można n nierozróżnialnych obiektów umieścić w w rozróżnialnych pudełkach? *Podpowiedź*: Można ten problem sformułować w sposób alternatywny - na ile różnych sposobów możemy rozmieścić $w-1$ nierozróżnialnych patyczków pomiędzy n elementami. Dla przykładu, kiedy $n=6$ a $w=5$, poniższa konfiguracja patyczków odpowiada 0 cząstkom w pierwszym pudełku, 2 w drugim, 0 w trzecim, 3 w czwartym i 1 w piątym.

|◯ ◯||◯ ◯ ◯|◯

Na pierwszy rzut oka widać, że każdej unikalnej konfiguracji patyczków odpowiada unikalne rozłożenie obiektów w pudełkach. Problem ten najłatwiej rozwiązać zakładając na początku, że patyczki są rozróżnialne, a następnie biorąc poprawkę na ich nierozróżnialność.

Odpowiedź: $p=\frac{(w+n-1)!}{n!(w-1)!}$

⋆ **Zadanie FS8**

Załóżmy, że układ składa się z N nierozróżnialnych cząstek (rozważać będziemy gaz doskonały). Dla takiego układu definiujemy makrostan poprzez grupowanie poziomów energetycznych: jeżeli mamy w_i stanów, których energia jest bliska energii ε_i, wówczas interesuje nas liczba cząstek n_i znajdujących się w jednym z tych w_i stanów. Makrostanem jest rozkład energii $(n_0, n_1, n_2, \ldots)$. Na ile sposobów można zrealizować każdy makrostan przy założeniu, że $w_i \gg n_i$? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że energia cząstki będzie bliska ε_i (cząstka znajdzie się w jednym z w_i stanów o energiach bliskich ε_i)? Wykaż, że entropię takiego układu można wyrazić wzorem:

$$\frac{S}{kN} = 1 - \ln N + \frac{d}{dT} T \ln Z$$

Odpowiedź: $P = \prod_i \frac{(w_i+n_i-1)!}{n_i!(w_i-1)!} \approx \prod_i \frac{(w_i)^{n_i}}{n_i!}$, $p_i = \frac{1}{Z} w_i e^{-\varepsilon_i/kT}$, $Z = \sum_i w_i e^{-\varepsilon_i/kT}$

⋆ **Zadanie FS9**

Wyznacz funkcję gęstości stanów dla cząstek gazu doskonałego (czyli układu cząstek zamkniętych w trójwymiarowej studni potencjału o objętości L^3). Energia poszczególnych stanów to:

$$E_{p,q,r} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}\left(p^2+q^2+r^2\right)$$

dla $p, q, r \in \mathbb{N}$. Korzystając z gęstości stanów wyznacz sumę statystyczną.

Odpowiedź: $g(\varepsilon) = \frac{L^3}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$, $Z = L^3\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$

⋆ **Zadanie FS10**

Wyznacz, korzystając z gęstości stanów i sumy statystycznej, entropię gazu doskonałego (jest to tak zwane równanie Sackura-Tetrodego).

Odpowiedź: $\frac{S}{kN} = \frac{5}{2} + \ln \frac{L^3}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{mkT}{2\pi\hbar^2}$

⋆ **Zadanie FS11**

Wyznacz, korzystając z gęstości stanów i sumy statystycznej, rozkład prędkości cząstek w gazie doskonałym (rozkład Maxwella). *Podpowiedź*: $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$, $p(\varepsilon)\, d\varepsilon = p(v)\, dv$.

Odpowiedź: $p(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$