

# Zadania z dynamiki\*

Maciej J. Mrowiński

11 marca 2010

\*\* **Zadanie DYN1**

Na ciało działa siła  $F(t) = f_0 \cos \omega t$  (przy czym  $f_0$  i  $\omega$  to stałe). W chwili początkowej ciało miało prędkość  $v(0) = 0$  i znajdowało się w punkcie  $x(0) = -\frac{f_0}{m\omega^2}$ . Wyznacz położenie i prędkość ciała w funkcji czasu.

*Odpowiedź:*  $v(t) = \frac{f_0}{m\omega} \sin \omega t$ ,  $x(t) = -\frac{f_0}{m\omega^2} \cos \omega t$

\*\* **Zadanie DYN2**

Na ciało działa siła  $F(t) = f_0 e^{-at}$  (przy czym  $f_0$  i  $a$  to stałe). W chwili początkowej ciało miało prędkość  $v(0) = 0$  i znajdowało się w punkcie  $x(0) = 0$ . Wyznacz położenie i prędkość ciała w funkcji czasu. Do jakiej prędkości  $v_{gr}$  ciało będzie przyspieszane (jaka będzie jego prędkość w granicy dla nieskończonego czasu)?

*Odpowiedź:*  $v(t) = \frac{f_0}{ma} (1 - e^{-at})$ ,  $x(t) = \frac{f_0}{ma} t + \frac{f_0}{ma^2} (e^{-at} - 1)$ ,  $v_{gr} = \frac{f_0}{ma}$

\*\* **Zadanie DYN3**

W chwili  $t = 0$  na będącą w spoczynku cząstkę o masie  $m$  zaczęła działać siła  $\vec{F} = \vec{a}t(\tau - t)$ , gdzie  $\vec{a}$  i  $\tau$  to stałe. Jeżeli siła działała na cząstkę przez czas  $\tau$ , to jaki pęd uzyskała w tym czasie cząstka i jaką drogę przebyła?

*Odpowiedź:*  $\vec{p} = \frac{\vec{a}\tau^3}{6}$ ,  $s = \frac{|\vec{a}|\tau^4}{12m}$

\*\* **Zadanie DYN4**

Na poruszające się ciało działa siła oporu o wartości  $F(t) = -b\sqrt{v}$ , gdzie  $v$  jest prędkością ciała,  $b$  - dodatnią stałą. Zakładając, że w chwili  $t = 0$  prędkość ciała wynosiła  $v_0$  wyznacz czas  $\tau$  po jakim ciało zatrzyma się i drogę  $s_\tau$  jaką przebędzie do chwili zatrzymania.

*Odpowiedź:*  $\tau = \frac{2m\sqrt{v_0}}{b}$ ,  $s_\tau = \frac{2mv_0^{\frac{3}{2}}}{3b}$

\*Skompilowane z wielu źródeł. Tylko do użytku na zajęciach. Do rozwiązania zadań oznaczonych symbolem \* potrzebna jest jedynie wiedza matematyczna z liceum. Zadania z \*\* wymagają zastosowania pochodnych/całek. Zadania z \*\*\* wykraczają poza program.

★★ **Zadanie DYN5**

Samochód o masie  $m$  hamowany jest siłą oporu  $F = -kv^2$ . Jaką drogę przebędzie samochód, zanim jego prędkość zmaleje do połowy?

Odpowiedź:  $s = \frac{m}{k} \ln 2$

★★ **Zadanie DYN6**

Pocisk przebił na wylot deskę o grubości  $h$  zmniejszając przy tym swoją prędkość z  $v_0$  do  $v$ . Oblicz czas przelotu pocisku przez deskę, jeżeli siła oporu z jaką deska działała na pocisk była proporcjonalna do kwadratu prędkości.

Odpowiedź:  $\tau = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln \frac{v_0}{v}}$

★★ **Zadanie DYN7**

Spadochroniarz wyskakuje z lecącego idealnie poziomo na dużej wysokości samolotu. Jak będzie zależała od czasu jego składowa prędkość prostopadła do podłoża, jeżeli działające na niego siły oporu powietrza są proporcjonalne do prędkości (współczynnik proporcjonalności wynosi  $\beta > 0$ ) i odwrotnie do niej skierowane? Czy prędkość spadochroniarza będzie ciągle rosła? Jeżeli nie, to jaką graniczną wartość osiągnie? Jak będzie zależeć od czasu przyspieszenie spadochroniarza? Przyjmij, że początkowa prędkość spadochroniarza wynosiła  $v(0) = 0$ .

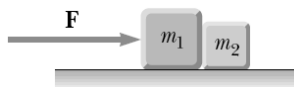
Odpowiedź:  $v(t) = \frac{mg}{b} \left( e^{-\frac{b}{m}t} - 1 \right)$ ,  $v_{gr} = \frac{mg}{b}$ ,  $a(t) = -ge^{-\frac{b}{m}t}$

★★ **Zadanie DYN8**

Współrzędne cząstki na płaszczyźnie  $XY$  wynoszą odpowiednio  $x = a \sin \omega t$  i  $y = b \cos \omega t$ , gdzie  $a$ ,  $b$  i  $\omega$  to stałe. Znajdź siłę działającą na cząstkę.

Odpowiedź:  $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$

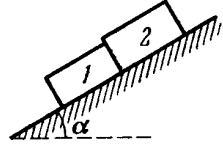
★ **Zadanie DYN9**



Na gładkiej powierzchni położono dwa stykające się ze sobą bokami ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$ . Na pierwsze z ciał (patrz rysunek) zaczęto działać siłą równą co do wartości  $F$ . Jakie będzie przyspieszenie układu? Z jaką siłą będą na siebie działały ciała?

Odpowiedź:  $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$ ,  $R = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$

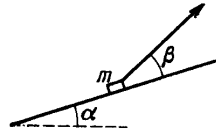
★ **Zadanie DYN10**



Ciała o masie  $m_1$  i  $m_2$  umieszczono na równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\alpha$ . Wyznacz a) siłę, z jaką ciała działają na siebie podczas ruchu i b) minimalny kąt nachylenia równi, przy którym ciała zaczną się zsuwać. Współczynniki tarcia ciał o powierzchnie równi wynoszą odpowiednio  $f_1$  i  $f_2$ .

Odpowiedź:  $R = (f_1 - f_2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha$ , b)  $\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2}{m_1 + m_2}$

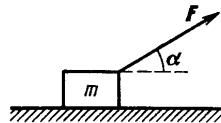
★★ **Zadanie DYN11**



Ciało o masie  $m$  jest wciągane przy użyciu sznurka po równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\alpha$  do podłoża. Pod jakim kątem w stosunku do powierzchni równi należy nachylić sznurek, aby jego naciąg był jak najmniejszy? Ile będzie wtedy wynosił naciąg? Zakładamy, że ciało porusza się ruchem jednostajnym a współczynnik tarcia wynosi  $f$ .

Odpowiedź:  $\operatorname{tg} \beta = f$ ,  $T = \frac{m g (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\sqrt{1 + f^2}}$

★★ **Zadanie DYN12**



Na ciało o masie  $m$  w chwili  $t = 0$  zaczęto działać siłą  $F = at$ , gdzie  $a$  to stała większa od zera. Siła przyłożona została pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Jaką prędkość uzyska ciało do chwili oderwania się od podłoża i jaką drogę w tym czasie przebędzie?

Odpowiedź:  $v = \frac{m g^2 \cos \alpha}{2a \sin^2 \alpha}$ ,  $s = \frac{m^2 g^3 \cos \alpha}{6a^2 \sin^3 \alpha}$

★ **Zadanie DYN13**

Jaką prędkość początkową  $v_0$  trzeba nadać ciału, aby wjechało na szczyt równi o długości  $l$  i kącie nachylenia  $\alpha$ , jeżeli współczynnik tarcia wynosi  $f$ . Oblicz czas  $\tau$  trwania ruchu.

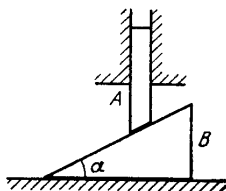
Odpowiedź:  $v_0 = \sqrt{2gl(\sin \alpha + f \cos \alpha)}$ ,  $\tau = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}}$

★ **Zadanie DYN14**

Ciało znajdowało się u podstawy równi pochyłej nachylonej pod kątem  $\alpha$  do podłoża. W chwili początkowej  $t = 0$  nadana została mu pewna (nieznana nam) prędkość początkowa i na skutek tego ciało zaczęło poruszać się po równi. Jaka jest wartość współczynnika tarcia, jeżeli czas ruchu ciała w górę równi jest  $k$  razy mniejszy od czasu zjeżdżania z równi?

*Odpowiedź:*  $f = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \operatorname{tg} \alpha$

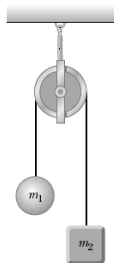
★ **Zadanie DYN15**



Znajdź przyspieszenia ciał  $A$  i  $B$  jeżeli w układzie nie występuje tarcie a stosunek masy ciała  $B$  do  $A$  wynosi  $\beta$ . Kąt nachylenia powierzchni ciała  $B$  jest dany i wynosi  $\alpha$ .

*Odpowiedź:*  $a_A = \frac{g}{1 + \beta \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ ,  $a_B = \frac{g}{\operatorname{tg} \alpha + \beta \operatorname{ctg} \alpha}$

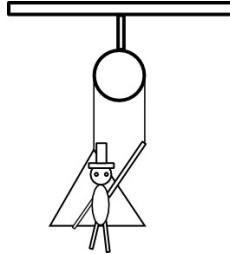
★ **Zadanie DYN16**



Dwa ciała, o masach  $m_1$  i  $m_2$ , połączono linką i przerzucono przez bloczek (patrz rysunek - jest to tak zwana maszyna Atwoda). Jakie będzie przyspieszenie masy 1? Jakie będzie napięcie linki?

*Odpowiedź:*  $a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$ ,  $T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

★ **Zadanie DYN17**



Malarz o masie  $M$  siedzi na "krześle bosmańskim", wiszącym przy ścianie wysokiego budynku (patrz rysunek). Pragnąc szybko podjechać do góry, malarz ciągnie za zwisający koniec liny z taką siłą, że jego nacisk na krzesło zmniejsza się do  $F_N$ . Masa krzesła wynosi  $m$ . Z jakim przyspieszeniem  $a$  porusza się malarz z krzesłem do góry? Z jaką siłą  $F$  ciągnie malarz za linę?

*Odpowiedź:*  $a = \frac{2F_N - (M-m)g}{M-m}$ ,  $F = \frac{M+m}{M-m} F_N$

★ **Zadanie DYN18**

Na linie przerzuconej przez nieruchomy blok i przyczepionej do ciężarka o masie  $m$  znajduje się małpa o masie  $M$  (na drugim końcu liny). Z jakim przyspieszeniem będzie poruszać się ciężarek w przypadku, kiedy a) małpa nie porusza się względem liny, b) małpa wspina się ze stałą prędkością  $v$  względem liny, c) małpa wspina się po linie ze stałym przyspieszeniem  $a_0$  względem liny?

*Odpowiedź:* a)  $a = \frac{M-m}{M+m} g$ , b)  $a = \frac{M-m}{M+m} g$ , c)  $a = \frac{M(g+a_0) - mg}{M+m} g$

★ **Zadanie DYN19**

Małpa o masie  $M$  wisi na linie przerzuconej przez nieważki blok i obciążonej masą  $m$ . Jakie jest przyspieszenie  $a$  masy  $m$ , jeśli małpa przebiera łapami tak, że stale znajduje się na tej samej wysokości? Przyjąć  $M > m$  i założyć, że małpa działa na linę stałą siłą.

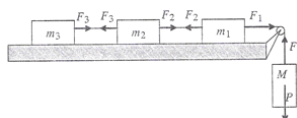
*Odpowiedź:*  $a = \left(\frac{M}{m} - 1\right) g$

★ **Zadanie DYN20**

Na końcach nieważkiej nici, przerzuconej przez nieważki bloczek, zawieszono ciężarki o masach  $m_1$  i  $m_2$ . Lżejszy z nich znajduje się o  $l$  metrów niżej od cięższego. Po jakim czasie ciężarki znajdą się na tej samej wysokości, jeśli puścimy je swobodnie?

Odpowiedź:  $\tau = \sqrt{\frac{l(m_2+m_1)}{g(m_2-m_1)}}$

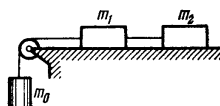
★ **Zadanie DYN21**



Na stole przymocowano jedna za drugą masy  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$ . Znajdź przyspieszenie układu i naprężenia wszystkich nici.

Odpowiedź:  $a = \frac{Mg}{M+m_1+m_2+m_3}$ ,  $F_1 = \frac{M(m_1+m_2+m_3)g}{M+m_1+m_2+m_3}$ ,  $F_2 = \frac{M(m_2+m_3)g}{M+m_1+m_2+m_3}$ ,  $F_3 = \frac{Mm_3g}{M+m_1+m_2+m_3}$

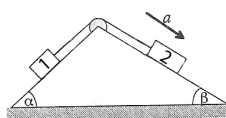
★ **Zadanie DYN22**



Dla układu takiego, jak na rysunku, wyznacz przyspieszenie zwisającego ciężarka, jeżeli ciężarki mają masy  $m_0$ ,  $m_1$  i  $m_2$ , a współczynnik tarcia pomiędzy ciężarkami a podłożem wynosi  $f$ . Wyznacz również napięcie linki łączącej ciężarki znajdujące się na podłożu.

Odpowiedź:  $a = \frac{m_0 - f(m_1+m_2)}{m_0+m_1+m_2}g$ ,  $T = \frac{(1+f)m_0m_2g}{m_0+m_1+m_2}$

★ **Zadanie DYN23**



Dwa ciała o masach  $m_1$  i  $m_2$  powiązane nierozciągliwą nicią umieszczono na równi pochyłej. Wyznacz przyspieszenie ciał oraz naciąg nici. Współczynnik tarcia pomiędzy masami a podłożem wynosi  $f$ , kąty pomiędzy równią a podłożem wynoszą odpowiednio  $\alpha$  i  $\beta$ .

Odpowiedź:  $a = \frac{m_2(\sin\beta - f\cos\beta) - m_1(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{m_1+m_2}g$ ,  $F_N = \frac{m_1m_2g[f(\cos\alpha - \cos\beta) + \sin\alpha + \sin\beta]}{m_1+m_2}$

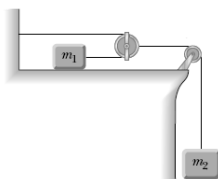
★ **Zadanie DYN24**



Jaką siłą należy działać na sznur, aby ciało o masie  $M$  pozostawało w spoczynku?

*Odpowiedź:*  $F = \frac{1}{2}Mg$

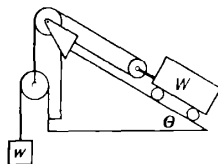
★ **Zadanie DYN25**



Dwa ciała, o masach  $m_1$  i  $m_2$ , połączone ze sobą przy pomocy systemu bloczków (patrz rysunek). Jakie będzie przyspieszenie masy 2?

*Odpowiedź:*  $a_2 = \frac{m_2}{m_2 + 4m_1}g$

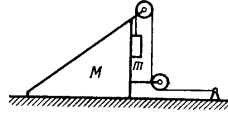
★ **Zadanie DYN26**



Ciężar wózka umieszczonego na równi pochyłej (o kącie nachylenia  $\Theta$ ) zrównoważony jest ciężarkiem  $w$ . Tarcie wszystkich części pomijamy. Jaki jest ciężar wózka  $W$ ?

*Odpowiedź:*  $W = \frac{4w}{\sin \Theta}$

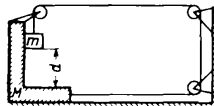
★ **Zadanie DYN27**



Współczynnik tarcia pomiędzy klockiem o masie  $m$  a równią o masie  $M$  wynosi  $f$ . Znajdź wartość przyspieszenia klocka. Tarcie pomiędzy podłożem a równią nie występuje.

*Odpowiedź:*  $a = \frac{g\sqrt{2}}{\frac{M}{m} + f + 2}$

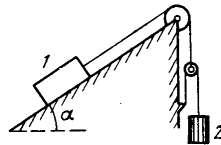
★ **Zadanie DYN28**



W układzie pokazanym na rysunku wszystkie powierzchnie są gładkie. W pewnej chwili masie  $m$ , początkowo spoczywającej w odległości  $d$  od podstawy utworzonej przez masę  $M$ , pozwalamy swobodnie się poruszać. Po jakim czasie od chwili uwolnienia masa  $m$  uderzy w tę podstawę?

*Odpowiedź:*  $t = \frac{d(sm+M)}{2mg}$

★ **Zadanie DYN29**

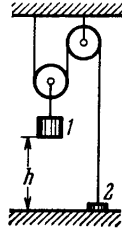


Jakie będzie przyspieszenie ciała 2, jeżeli jego masa jest  $\eta$  razy większa od masy ciała 1? Kąt nachylenia równi wynosi  $\alpha$ , tarcia nie uwzględniamy.

*Odpowiedź:*  $a_2 = \frac{2g(2\eta - \sin \alpha)}{4\eta + 1}$



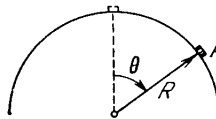
★ **Zadanie DYN30**



Masa ciała 1 jest  $\eta$  razy większa od masy ciała 2. W chwili  $t = 0$  ciało 1 znajduje się na wysokości  $h$  a ciało 2 styka się z podłożem. Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się ciało 2?

Odpowiedź:  $H = \frac{6b\eta}{4+\eta}$

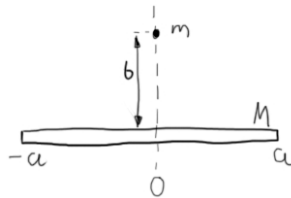
★★ **Zadanie DYN31**



Małe ciało A ześlizguje się po sferze o promieniu  $R$ . Znajdź kąt, przy którym ciało oderwie się od powierzchni i prędkość, jaką do tego czasu osiągnie.

Odpowiedź:  $\theta = \cos^{-1} \frac{2}{3}$ ,  $v = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$

★★★ **Zadanie DYN32**



Wyznacz wartość całkowitej siły grawitacyjnej, z jaką na ciało o masie  $m$  działa jednorodny pręt o masie  $M$  i długości  $2a$ . Załóż, że ciało  $m$  leży na osi dzielącej pręt na dwie równe połowy, w odległości  $b$  od niego.

Odpowiedź:  $F = \frac{GmM}{b\sqrt{a^2+b^2}}$

★★★ **Zadanie DYN33**

Wyznacz wartość całkowitej siły grawitacyjnej, z jaką na ciało o masie  $m$  działa jednorodny dysk o masie  $M$  i promieniu  $R$ . Załóż, że ciało  $m$  leży na przechodzącej przez środek dysku osi prostopadłej do jego powierzchni.

Odpowiedź:  $F = \frac{2mMG}{R^2} \left( 1 - \frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}} \right)$