Zestaw 06: Drgania

Maciej J. Mrowiński

1 stycznia 2019

Zestaw do samodzielnego rozwiązania po wykładzie z drgań. Nie jest obowiązkowy i nie oddajecie mi tych rozwiązań. Jeżeli ktoś ma problemy/pytania, to oczywiście zapraszam na konsultacje.

Pytania

- Jak definiujemy siłę harmoniczną (prawo Hooke'a)?
- Jak porusza się ciało, na które działa siła harmoniczna?
- Czy siła harmoniczna jest zachowawcza? Jeżeli tak, to jaki odpowiada jej potencjał?
- Jaka zastępcza stała sprężystości odpowiada równoległemu połączeniu sprężyn? Jaka zastępcza stała sprężystości odpowiada szeregowemu połączeniu sprężyn?
- Czym są drgania tłumione? Z jakimi możemy mieć do czynienia przypadkami drgań tłumionych?
- Czym są drgania wymuszone? Na czym polega zjawisko rezonansu?

Problemy obliczeniowe

- Rozwiąż równanie opisujące ruch wahadła o długości l stosując przybliżenie małych wychyleń. Wyznacz okres drgań.
- Wyznacz położenie w funkcji czasu[1] dla oscylatora tłumionego[2], rozważając osobno przypadek drgań tłumionych i przetłumionych. Na podstawie uzyskanych rozwiązań wyznacz postać rozwiązania dla przypadku granicznego, między tłumieniem a przetłumieniem[3]. We wszystkich trzech przypadkach przyjmij warunki początkowe $x(t=0) = 0\,\mathrm{m}$ i $v(t=0) = v_0$ m/s.

Problemy numeryczne

- Równanie opisujące ruch wahadła o długości l ma postać[4]

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\varphi \tag{1}$$

  gdzie $\omega_0^2 = g/l$. Jest to równanie, które już wiele razy rozwiązywaliśmy numerycznie, tylko z inaczej oznaczonymi zmiennymi[5].

[1] Tą samą metodą, której użyliśmy na wykładzie dla zwykłego oscylatora - to znaczy przewidując wynik w postaci $x(t) = Ce^{rt}$.

[2] Czyli oscylatora, na który działa siła hamująca $F = -bv$, gdzie b to pewna stała.

[3] Wymaga to wysilenia kilku szarych komórek, ale daje się zrobić. Nie chodzi mi o rozwiązanie od początku równania różniczkowego dla tego konkretnego przypadku, ale o wyznaczenie na podstawie wcześniej uzyskanych wyników tego rozwiązania.

[4] Tak, jest to podpowiedź do podpunktu obliczeniowego!

[5] Podpowiedź dla tych, którzy przy tworzeniu postaci oszczędzają na percepcji: $x \to \varphi$.

Porównajcie więc dla kilku wychyleń początkowych φ_0 rozwiązanie numeryczne tego pełnego równania bez przybliżenia małych wychyleń z wynikiem analitycznym zakładającym to przybliżenie. Załóżcie, że prędkość początkowa[6] $\omega(t = 0) = 0\,\mathrm{rad/s}$.

- Porównajcie wyniki analityczne uzyskane dla oscylatora tłumionego z wynikami numerycznymi[7]. Możecie w ten sposób sprawdzić, czy udało się wam poprawnie odgadnąć postać rozwiązania dla przypadku granicznego.
- Rozwiążcie również numerycznie równanie ruchu dla oscylatora z wymuszeniem[8] i porównajcie to rozwiązanie z wynikami analitycznymi podanymi na wykładzie[9].

[6] Jest to trochę niefortunny konflikt oznaczeń.

[7] Pamiętajcie, żeby użyć tych samych warunków początkowych. Ta podpowiedź dotyczy oczywiście wszystkich podpunktów.

[8] oba przypadki

[9] Przy ich wyznaczaniu przyjąłem zerową prędkość początkową i zerowe położenie początkowe