Zestaw 04: Siły bezwładności

Maciej J. Mrowiński

1 stycznia 2019

Zestaw do samodzielnego rozwiązania po wykładzie z sił bezwładności. Nie jest obowiązkowy i nie oddajecie mi tych rozwiązań. Jeżeli ktoś ma problemy/pytania, to oczywiście zapraszam na konsultacje.

Pytania

- Jak jest zdefiniowana transformacja Galileusza i jak należy ją interpretować?
- O czym mówi zasada względności Galileusza?
- Czy w układach nieinercjalnych spełniona jest druga zasada dynamiki Newtona?
- Czym są siły bezwładności? Czy są to „prawdziwe" siły? Jak możemy wytłumaczyć ich genezę?
- Jak definiujemy siłę d'Alemberta?
- Jak definiujemy siłę odśrodkową?
- Jak definiujemy siłę Coriolisa?

Problemy obliczeniowe

- Na skutek awarii winda o masie m_w zaczyna spadać w szybie, którego wysokość wynosi h_s. Załóżmy, że działa na nią siła tarcia o stałej wartości T_w. Jeżeli wysokość kabiny windy wynosi h_w, to z jaką prędkością początkową musi podskoczyć znajdujący się w kabinie obserwator, aby przed zderzeniem z dnem szybu dotknąć sufitu windy? Załóż, że obserwator jest punktem materialnym i nie wpływa na ruch windy, a winda w chwili początkowej znajdowała się na szczycie szybu.

Problemy numeryczne

- Na początku spróbujemy zademonstrować mechanizm powstawania w układach nieinercjalnych przyspieszeń, które nie są powiązane z żadnymi siłami. Wyobraźmy sobie, że na dwuwymiarowym placu zabaw znajduje się karuzela, która wiruje wokół własnej osi z prędkością kątową ω_0. Dla uproszczenia załóżmy, że środek karuzeli[1] pokrywa się ze środkiem układu współrzęd-

[1] Jej oś obrotu.

nych. Na karuzeli, po przeciwległych stronach, siedzi dwójka dzieci - jedno dziecko w chwili początkowej znajduje się w punkcie $\vec{r_d} = [0, -r_{dx}]$, a drugie w punkcie $-\vec{r_d}$. Dziecko znajdujące się „na dole"[2] rzuca w kierunku dziecka „na górze" piłkę, nadając jej prędkość początkową $\vec{v_0} = [0, v_{0x}]$[3]. Stwórzcie procedurę[4], która narysuje z punktu widzenia układu inercjalnego[5] pozycję dzieci na karuzeli po upływie czasu t oraz, na tym samym obrazku, tor piłki od chwili 0 do t. Następnie stwórzcie drugą procedurę, która narysuje ten sam rysunek - czyli pozycję dzieci i tor piłki, ale z punktu widzenia układu nieinercjalnego, którego środek pokrywa się ze środkiem karuzeli, i który wiruje wokół własnej osi[6] z tą samą prędkością kątową ω_0. To drugie zadanie z pozoru wygląda na skomplikowane, ale można je wykonać korzystając jedynie z prostych przekształceń algebraiczno-geometrycznych[7]. Podczas robienia rysunków przyjmijcie $\omega_0 = 1\,\mathrm{rad/s}$, $r_{dx} = 1\,\mathrm{m}$ i $v_{0x} = 2\,\mathrm{m/s}$. Bonus za zrobienie animacji przedstawiającej ruch piłki. Porównajcie tory w obu układach. Czy jesteście w stanie wyjaśnić dlaczego tor piłki wygląda inaczej dla różnych obserwatorów[8]?

[2] Czyli w punkcie $\vec{r_d}$.

[3] Oczywiście względem karuzeli.

[4] Napiszcie program, który będzie generował rysunek albo dane, na podstawie których rysunek zostanie wygenerowany w innym narzędziu.

[5] Czyli nieruchomego układu związanego z placem zabaw.

[6] Siłą rzeczy jest to ta sama oś obrotu, co oś karuzeli.

[7] Hint: przypomnijcie sobie, w jaki sposób przechodziliśmy z układu inercjalnego do nieinercjalnego na wykładzie. Jak w tym problemie powiązany jest wektor wodzący w układzie inercjalnym i w nieinercjalnym? Jakie dwie liczby podałby Stefan, gdybyśmy go spytali o położenie piłki w układzie nieinercjalnym? Znając tor w układzie inercjalnym, można go łatwo przekształcić w tor w układzie nieinercjalnym - czysta geometria. I właśnie chciałbym, żebyście tak do tego podeszli.

[8] W tym wyjaśnieniu słowo „siła" nie powinno się pojawić - na oko widać, że tu nie ma żadnych sił.

- W poprzednim podpunkcie pokazaliśmy, że w zakrzywieniu toru piłki w układzie nieinercjalnym nie ma nic mistycznego, a jego odtworzenie wymaga jedynie dwóch prostych rzutowań.[9] Ten sam problem można jednak rozwiązać z punktu widzenia obserwatora w układzie nieinercjalnym w sposób bardziej skomplikowany, ale jednocześnie przy tym bardziej ekscytujący - całkując równania ruchu piłki z uwzględnieniem sił bezwładności.[10] Podejdziemy do tego zagadnienia oczywiście nie od strony analitycznej, ale od numerycznej, jednak wcześniej musimy jeszcze pokonać jedną przeszkodę.

  W poprzednim zestawie wprowadziliśmy algorytm velocity Verlet i wykorzystaliśmy go do numerycznego całkowania równań ruchu dla ciał, na które działa siła centralna. Jeżeli chcielibyśmy wykorzystać ten algorytm również i tutaj, to napotkamy na pewną trudność, która zaszyta jest w równaniu 6.[11] Wartość prędkości w chwili $t + 1$ określana jest zgodnie z tym równaniem na podstawie wartości przyspieszenia również w chwili $t + 1$. Nie jest to problematyczne, jeżeli przyspieszenie zależy explicite jedynie od czasu i położenia[12], ale jeżeli zależy również od prędkości, to siłą rzeczy mamy problem. Problem, który musimy jakoś rozwiązać, ponieważ w naszym przypadku siła od prędkości w istocie zależy. Dlatego skorzystamy ze zmodyfikowanej wersji algorytmu velocity Verlet, która wygląda następująco:

$$v_{i+1/2} = v_i + \frac{1}{2}\Delta t\; a(t_i, v_i, x_i), \tag{1}$$

[9] Tak, to był drugi hint!

[10] Tu należy jeszcze raz podkreślić, że nie są to realne siły, lecz korekty do przyspieszenia wynikające z nieinercjalności układu.

[11] Oczywiście równaniu 6 z poprzedniego zestawu.

[12] Położenie w chwili $t + 1$ na tym etapie już znamy.

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \; v_{i+1/2}, \tag{2}$$

$$v'_{i+1} = v_i + \Delta t \; a(t_i, v_i, x_i), \tag{3}$$

$$v_{i+1} = v_{i+1/2} + \frac{1}{2}\Delta t \; a(t_{i+1}, v'_{i+1}, x_{i+1}). \tag{4}$$

Główna modyfikacja polega jak widać na dodaniu równania 3, w którym wprowadzamy pomocniczą wartość prędkości w chwili $t+1$ estymowaną po Eulerowsku na podstawie przyspieszenia w chwili t. Ta estymowana wartość jest następnie używana do wyznaczenia właściwej wartości prędkości w równaniu 4.

Uzbrojeni w tę poprawioną, działającą również w przypadku sił zależnych od prędkości wersję velocity Verlet, możemy w końcu przejść do kolejnej części zadania. Spróbujcie numerycznie rozwiązać równania ruchu dla problemu z poprzedniego podpunktu - czyli takie równania, jakie opisują ruch piłki w nieinercjalnym układzie odniesienia związanym z karuzelą. Pamiętajcie, że należy uwzględnić zarówno siłę odśrodkową, jak i siłę Coriolisa. Nanieście uzyskany tor piłki na rysunek. Czy pokrywa się on z torem wyznaczonym geometrycznie?[13]

Rozpatrując ruch w rzeczywistych układach nieinercjalnych nie jesteśmy w stanie rozseparować sił Coriolisa i odśrodkowej[14], ale podczas symulacji numerycznej oczywiście możemy zrealizować każdy szalony pomysł, jaki nam tylko wpadnie do głowy. Rozwiążcie więc z osobna równania ruchu uwzględniające tylko jedną z tych sił. Która z sił ma większy wpływ na trajektorię ciała?

[13] Musi! Jeżeli się nie pokrywają, to znaczy, że gdzieś jest błąd.

[14] Czy potraficie wyobrazić sobie układ inercjalny poruszający się w taki sposób, że występuje w nim tylko jedna z tych sił?