Zestaw 03: Dynamika

Maciej J. Mrowiński

1 stycznia 2019

Zestaw do samodzielnego rozwiązania po wykładzie z dynamiki. Nie jest obowiązkowy i nie oddajecie mi tych rozwiązań. Jeżeli ktoś ma problemy/pytania, to oczywiście zapraszam na konsultacje.

Pytania

- Jak brzmi pierwsza zasada dynamiki Newtona?
- Jak brzmi druga zasada dynamiki Newtona?
- Jak brzmi trzecia zasada dynamiki Newtona?
- Jak definiujemy układ inercjalny?
- Czy istnieje tylko jeden układ inercjalny?
- Czy układ związany z dowolnym punktem na powierzchni Ziemi jest inercjalny?

Problemy obliczeniowe

- Na ciało, któremu nadano początkową prędkość v_0 działa siła oporu o wartości bv (gdzie $b > 0$ to pewna stała). Wyznacz zależność prędkości i położenia tego ciała od czasu. Czy ciało kiedyś się zatrzyma?
- Położenie ciała zmienia się w następujący sposób w czasie:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega_0 t), \tag{1}$$

  gdzie A, β i ω_0 to stałe. Wyznacz siłę wypadkową działającą na to ciało.

Problemy numeryczne

- W pierwszym zestawie wprowadziliśmy bardzo prostą i zarazem najpewniej najgorszą metodę numerycznego całkowania równań ruchu - tak zwany schemat Eulera[1]. Eksperymenty numeryczne zawarte w tym zestawie przeprowadzimy przy pomocy innego, lepszego algorytmu - *velocity Verlet*. Algorytm ten pozwala na rozwiązanie równań ruchu

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t), \tag{2}$$

[1] nie nazwaliśmy wtedy tego, co robiliśmy po imieniu, ale taka jest właśnie nazwa tamtej metody

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t, x), \tag{3}$$

jeżeli tylko znane jest przyspieszenie $a(t, x)$ i warunki początkowe: $x(t = 0) = x_0$ oraz $v(t = 0) = v_0$.

Przy pomocy velocity Verlet wyznaczamy iteracyjnie wartości położenia[2] x_{i+1} oraz prędkości v_{i+1} w kolejnym, $i + 1$ kroku, na podstawie wartości położenia x_i oraz prędkości v_i w kroku poprzedzającym[3]. Robimy to korzystając z następujących równań[4]:

$$v_{i+1/2} = v_i + \frac{1}{2}\Delta t\ a(t_i, x_i), \tag{4}$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t\ v_{i+1/2}, \tag{5}$$

$$v_{i+1} = v_{i+1/2} + \frac{1}{2}\Delta t\ a(t_{i+1}, x_{i+1}), \tag{6}$$

gdzie $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ to krok czasowy[5]. Algorytm zatrzymujemy w momencie, kiedy np. upłynie określony czas[6].

- Dla rozgrzewki spróbujmy rozwiązać prosty problem jednowymiarowy. Załóżmy, że siła działająca na ciało o masie m ma postać

$$F(t) = A_0\ e^{\beta t}, \tag{7}$$

co oczywiście prowadzi do przyspieszenia

$$a(t) = a_0\ e^{\beta t}, \tag{8}$$

gdzie A_0, $a_0 = A_0/m$ i β to stałe. Wyznacz analitycznie zależność położenia $x(t)$ od czasu. Wyznacz tę samą zależność numerycznie, przy pomocy algorytmu velocity Verlet, przyjmując np. $a_0 = 1\,\mathrm{m/s^2}$, $\beta = -1\,\mathrm{s^{-1}}$ oraz $\beta = 1\,\mathrm{s^{-1}}$, $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ i czas wykonania algorytmu $t_{\max} = 2\,\mathrm{s}$. Porównaj wyniki analityczne i numeryczne na wykresie[7].

- Po tej rozgrzewce możemy przejść do głównej części programu, czyli do sił centralnych w dwu wymiarach. Będzie to jednak wymagało najpierw pewnej inwestycji intelektualnej w uogólnienie algorytmu velocity Verlet na przypadek dwuwymiarowy, co pozostawiam jako ćwiczenie do samodzielnego rozwiązania czytelnikowi[8].

Siłą centralną nazywamy dowolną siłę, którą można przedstawić jako[9]

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\ \hat{r}, \tag{9}$$

gdzie $r = |\vec{r}|$, a $\hat{r} = \vec{r}/r$.

[2] są to standardowe oznaczenia i będziemy ich od tej pory konsekwentnie używać - zapis w_i oznacza wartość pewnej zmiennej w po upływie czasu $t_i = i\ \Delta t$

[3] startujemy oczywiście z warunków początkowych: na podstawie v_0 i x_0 wyznaczamy v_1 i x_1, potem na podstawie v_1 i x_1 wyznaczamy v_2 i x_2, itd.

[4] intuicyjnie rzecz ujmując: na początku przeskakujemy z prędkością nie o cały krok, ale o połowę (równanie 4), potem korzystając z tej połowicznej wartości prędkości wyznaczamy wartość położenia po upływie całego kroku (równanie 5), a następnie doskakujemy z prędkością do całego kroku, ale używamy przy tym już nowej wartości położenia do wyznaczenia przyspieszenia/siły (równanie 6)

[5] czyli czas, jaki upływa pomiędzy kolejnymi krokami (wywołaniami) algorytmu; zakładamy, że krok czasowy jest stały

[6] czytaj: po wykonaniu odpowiedniej liczby kroków; mamy tu na myśli nie czas realny, ale czas w symulacji mierzony poprzez zmienną t_i

[7] czy jesteś w stanie przewidzieć asymptotyczne zachowanie $x(t)$ dla tych dwóch wartości parametru β?

[8] hint: na każdy kierunek, w tym przypadku X i Y, przypadają po dwa równania do rozwiązania (równania 2 oraz 3); należy tylko uważać na to, że w ogólności składowe przyspieszenia w kierunkach X i Y zależą zarówno od położenia na osi X, jak i od położenia na osi Y

[9] tłumacząc łopatologicznie: jest to siła, której wartość zależy jedynie od odległości od środka układu współrzędnych natomiast kierunek pokrywa się z kierunkiem wektora wodzącego

Przykładem siły centralnej jest chociażby siła przyciągania między dwoma ciałami[10] o masach m_1 i m_2, równa co do wartości

$$F(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{10}$$

gdzie G to stała grawitacji, a r to odległość między środkami ciał.

Podczas naszych eksperymentów numerycznych będziemy właśnie rozpatrywać siły, które mają postać zgodną z równaniem 10[11]. Założymy więc, że przyspieszenie ciała w polu takiej siły ma postać[12]:

$$\vec{a}(\vec{r}) = -\frac{\beta}{r^2}\,\hat{r} \tag{11}$$

gdzie β to pewien uniwersalny parametr[13], a $\vec{r}$ to wektor wodzący. Niech początkowe położenie ciała wynosi

$$\vec{r}_0 = [0, r_{y0}], \tag{12}$$

a początkowa prędkość[14]

$$\vec{v}_0 = v_0\,[\cos\phi_0, \sin\phi_0]. \tag{13}$$

Korzystając z algorytmu velocity Verlet wyznacz trajektorię ciała dla kilku różnych wartości v_0 i ϕ_0. Przyjmij przy tym[15], że $\beta = 1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$, $r_{y0} = 1\,\mathrm{m}$, $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$ a $t_{\mathrm{max}} = 10\,\mathrm{s}$. Narysuj wyznaczone trajektorie na wykresie. Jaki mają kształt? Czy możliwe jest takie dobranie prędkości początkowej, aby ciało poruszało się po okręgu?

[10] jeżeli założymy, że układ odniesienia związany jest z jednym z tych ciał

[11] czyli odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości; czy znasz inny przykład takiej siły?

[12] to oznacza, że „źródło” siły znajduje się w środku układu współrzędnych i jest nieruchome

[13] jeżeli przyjmiemy np., że mamy do czynienia z dwoma ciałami oddziałującymi grawitacyjnie, przy czym jedno z nich (o masie m_1) pozostaje nieruchome w środku układu współrzędnych, a my chcemy opisać ruch drugiego ciała (o masie m_2), wówczas $\beta = Gm_1$

[14] dzięki takiej postaci jesteśmy w stanie łatwo określać kierunek (sięgnijmy pamięcią do informacji zdobytych podczas studiowania biegunowego układu współrzędnych - ϕ_0 to kąt nachylenia między wektorem prędkości a osią X) i wartość prędkości początkowej

[15] w zależności od innych parametrów może być niezbędna modyfikacja kroku czasowego (zmniejszenie) lub czasu symulacji (wydłużenie)